3. Zur Statistik der Fourierkoeffizienten der natürlichen Strahlung; von M. v. Laue.

In einer Entgegnung auf unsere Untersuchungen über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie¹⁾ macht uns Hr. Einstein zwei Einwände, die wir hier eingehend besprechen möchten, obwohl wir — wie wir sogleich vorausschicken wollen — dem zweiten eine große Berechtigung zusprechen müssen. Denn so klargestellt, wie es bei der Wichtigkeit der Frage zu wünschen wäre, scheint uns die Sachlage bisher noch nicht.

I.

Den ersten dieser Einwände können wir in enger Anlehnung an Hrn. Einsteins Worte so aussprechen: Wenn auch in den Formeln (33), (34), (35) unserer ersten Arbeit eine statistische Abhängigkeit der Koeffizienten voneinander liegt, so darf daraus noch nicht gefolgert werden, daß auch bei natürlicher Strahlung solche Abhängigkeit vorhanden ist. „Denn es ist doch gar nicht gesagt, daß der Grad von Unordnung, welchen jene ungeordnete Verteilung der Resonatoren über die Schicht von der Dicke $2c\tau$ mit sich bringt, derselbe sei, wie bei der natürlichen Strahlung. Dieser Verdacht erhebt sich um so dringender, als nach Laues rechnerischen Ergebnissen der Grad der statistischen Abhängigkeit zweier durch die Indizes p und p' charakterisierten Glieder der Entwicklung für die resultierende Strahlung wesentlich durch den Wert

$$\frac{\pi |p - p'| \tau}{T}$$

bedingt werde, d. h. durch eine von der Schichtdicke abhängige Größe, während doch eine derartige statistische Abhängigkeit bei der natürlichen Strahlung — falls eine solche vorhanden

1) Vgl. hierzu M. v. Laue, Ann. d. Phys. 47. p. 853. 1915 und A. Einstein, ebenda, p. 879.

wäre — nichts zu tun haben dürfte mit der besonderen Erzeugungsart der betrachteten Strahlung.“

Hierzu möchten wir fragen: Warum soll Strahlung, die von vielen „natürlich“ strahlenden Quellpunkten ausgeht, nicht natürliche Strahlung sein? Wir wüßten zurzeit überhaupt keine bessere Bestimmung dieses Begriffes zu geben, als diesen Hinweis auf ihre Entstehung. Daß nach unseren Gleichungen die Stärke der statistischen Koppelung von der Dicke der Kugelschicht abhängt, über welche wir die Resonatoren verteilt haben, wäre dann, aber auch nur dann, für unsere Schlußfolgerung verhängnisvoll, wenn die Größe τ sonst keine Bedeutung für die die Strahlung darstellende Reihe (30) hätte. Tatsächlich aber bestimmt sie neben der Entwicklungszeit T die Zeitdauer, in welcher die genannte Reihe die von allen Strahlungsquellen herrührende Gesamtstrahlung darstellt, wie auch schon früher erwähnt wurde. Höchstens könnte Hr. Einstein in unserer Betrachtung die Berücksichtigung der Absorption und Zerstreuung der Strahlung vermissen; doch glauben wir schon in Abschnitt III der früheren Arbeit (p. 874) wahrscheinlich gemacht zu haben, daß dies für die Frage nach der statistischen Koppelung nichts ausmacht. Wir glauben daher, daran festhalten zu sollen, daß sich aus der Zusammensetzung der Strahlung aus vielen Einzelstrahlungen kein Grund gegen die statistische Koppelung verschiedener Fourierkoeffizienten herleiten läßt.

II.

Auf ganz anderem Boden steht der zweite Einwand, da er sich um die Entstehung der Strahlung aus Einzelstrahlungen überhaupt nicht mehr kümmert, sondern einfach die Fourierentwicklung einer Schwingungsfunktion $f(t)$, also die Schwingung irgendeines linearen Gebildes, behandelt. Hr. Einstein führt zunächst ein ganz bestimmtes Wahrscheinlichkeitsgesetz für die Koeffizienten ein, nämlich:

$$(1) \quad \begin{cases} \text{const} \times e^{-Q} dA_1 dB_1 dA_2 dB_2 \dots \\ Q = \sum_m \sum_n (d_{mn} A_m A_n + e_{mn} B_m B_n + f_{mn} A_m B_n). \end{cases}$$

Wir stimmen ihm darin zu. Unser wesentlichster Grund dafür, der andere Wahrscheinlichkeitsgesetze ausschließt, ist der der „Isotropie“. Geht eine Schwingung nach allen Richtungen

des Raumes in derselben Art vor sich, und setzen wir für drei zueinander senkrechte Schwingungsrichtungen (x, y, z) die übereinstimmenden Wahrscheinlichkeitsgesetze

$$\text{const } e^{-Q^{(x)}} dA^{(x)} dB_1^{(x)} dA_2^{(x)} dB_3^{(x)} \dots, \\ Q = \sum_m \sum_n (d_{mn} A_m^{(x)} A_n^{(x)} + e_{mn} B_m^{(x)} B_n^{(x)} + 2f_{mn} A_m^{(x)} B_n^{(x)}) \\ \text{usw.}$$

voraus, so folgt für drei andere zueinander senkrechte Richtungen (ξ, η, ζ) wegen

$$Q^{(x)} + Q^{(y)} + Q^{(z)} = Q^{(\xi)} + Q^{(\eta)} + Q^{(\zeta)}$$

und wegen

$$\int dA_m^{(x)} dA_m^{(y)} dA_m^{(z)} = \int dA_m^{(\xi)} dA_m^{(\eta)} dA_m^{(\zeta)}, \\ \int dB_m^{(x)} dB_m^{(y)} dB_m^{(z)} = \int dB_m^{(\xi)} dB_m^{(\eta)} dB_m^{(\zeta)}$$

dasselbe Wahrscheinlichkeitsgesetz. (Man bestätigt die drei letzten Gleichungen am einfachsten, indem man $A_m^{(x)}, A_m^{(y)}, A_m^{(z)}$ einerseits, $A_m^{(\xi)}, A_m^{(\eta)}, A_m^{(\zeta)}$ andererseits als Punktkoordinaten im dreidimensionalen Raum auffaßt und berücksichtigt, daß zwischen ihnen orthogonale Transformationsformeln bestehen; für die Koeffizienten B gilt dasselbe.)

Nun zeigt Hr. Einstein, daß die Konstanten f für alle Indizes, die Konstanten d und e für gemischte Indizes verschwinden müssen, so daß F in eine Summe reiner Quadrate übergeht und die statistische Koppelung zwischen verschiedenen Koeffizienten wegfällt. Sein Beweis beruht auf dem Schluß von einem großen Entwicklungsbereich auf einen kleineren Teilbereich und das in ihm geltende Wahrscheinlichkeitsgesetz. Wir halten diesen Gedanken für recht glücklich, nur scheint es uns bedenklich, daß bei der Mittelwertbildung in der zweiten Gleichung auf p. 884 auch solche Teilbereiche berücksichtigt werden, die sich teilweise überdecken und deshalb in statistischer Hinsicht nicht voneinander unabhängig sind. Denn um jene Mittelwerte zu bilden, sollte man aus der Schwingungskurve $f(t)$ an sehr vielen *getrennten* Stellen Bereiche gleicher Größe herausgreifen und über sie mitteln; es erscheint uns keineswegs als selbstverständlich, daß Hrn. Einsteins Verfahren zum gleichen Ergebnis führt. Mag dies Bedenken nun berechtigt sein oder nicht, jedenfalls wollen wir

im folgenden seine Überlegung so umgestalten, daß dabei lediglich von Teilbereichen die Rede ist, die sich vollständig ausschließen, und auch diese werden wir nicht zu klein wählen dürfen, wenn in ihnen die statistischen Verhältnisse voneinander unabhängig sein sollen.

Das folgende Verfahren macht, da die Zahl der Fourierkoeffizienten im allgemeinen keine endliche ist, von der Theorie der quadratischen Formen unendlich vieler Veränderlichen Gebrauch. Ich hatte mich dabei der sehr wirksamen Unterstützung der Herren Kollegen E. Hellinger (Frankfurt) und E. Hilb (Würzburg) zu erfreuen; ich möchte ihnen auch an dieser Stelle meinen Dank dafür aussprechen.

III.

Wir entwickeln die stetige Funktion $f(t)$ für die Zeit $0 < t < T$ in eine Fouriersche Kosinus-Sinus-Reihe; deren Koeffizienten mögen A_n und B_n heißen. Für die unendliche Zahl dieser Koeffizienten nehmen wir das Wahrscheinlichkeitsgesetz (1) an.

Wir wollen vorausschicken, daß man dies Gesetz wohl besser in der Form schreibe:

$$\lim_{N=\infty} (\text{const} + e^{-Q_N} dA_1 dB_1 \dots dA_N dB_N) \\ Q_N = \sum_1^N \sum_1^N (d_{mn} A_n A_m + e_{mn} B_m B_n + f_{mn} A_m B_n).$$

Die Konstante wäre für jedes N so zu bestimmen, daß man bei Ausführung aller Integrationen den Wert 1 erhält.

Sodann unterteilen wir den genannten Bereich durch die $k-1$ Zeitpunkte

$$T_1 = \frac{1}{k} T, \quad T_2 = \frac{2}{k} T, \dots \quad T_i = \frac{i}{k} T \dots \quad T_{k-1} = \frac{k-1}{k} T$$

in k gleich große Teilbereiche, deren erster von 0 bis T_1 , deren i -ter von T_{i-1} bis T_i und deren k -ter von T_{k-1} bis T reicht. k ist beliebig, doch werden wir später eine obere Grenze dafür festsetzen müssen. Für jeden dieser Teilbereiche stellen wir dieselbe Funktion $f(t)$ durch eine Kosinus-Sinus-Reihe dar und nennen die dem i -ten Teilbereich entsprechenden Fourierkoeffizienten $a_n^{(i)}$ und $b_n^{(i)}$. Durch Formeln, die leicht aus den Gleichungen (10) bei Hrn. Einstein (p. 888) zu ent-

nehmen sind, lassen sich alle $a_n^{(i)}$ und $b_n^{(i)}$ linear aus den A_n und B_n berechnen. Durch Umkehrung dieser Formeln stellt man die A_n , B_n linear durch die $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ dar und kann so den Ausdruck (1) zu einem Wahrscheinlichkeitsgesetz für die Gesamtheit der $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ machen. Wir fragen: Unter welchen Umständen gilt für jeden Teilbereich ein Wahrscheinlichkeitsgesetz von derselben Form (1) wie für den ganzen Bereich von 0 bis T ?

Wir gewinnen an Allgemeinheit und Übersichtlichkeit, wenn wir die besprochenen Kosinus- und Sinusfunktionen durch irgendein vollständiges System normierter orthogonaler Funktionen¹⁾ ersetzen; unsere Kosinus und Sinus sind (wenn man sie noch mit dem Faktor $\sqrt{2/T}$ multipliziert) ein besonderer Fall eines solchen Systems. Nennen wir diese Funktionen für den Bereich von 0 bis T $\Phi_n(t)$, für den i -ten Teilbereich $\varphi_n^{(i)}(t)$, so gilt im ganzen Bereich eine Entwicklung

$$(3) \quad f(t) = \sum_1^\infty F_p \Phi_p(t)$$

im i -ten Teilbereich aber entsprechend

$$(4) \quad f(t) = \sum_1^\infty f_p^{(i)} \varphi_p^{(i)}(t).$$

Da sich die Koeffizienten dieser Entwicklungen ganz wie gewöhnliche Fourierkoeffizienten durch Integralformeln

$$F_p = \int_0^T f(\tau) \Phi_p(\tau) d\tau, \quad f_p^{(i)} = \int_{T_{i-1}}^{T_i} f(\tau) \varphi_p^{(i)}(\tau) d\tau$$

aus $f(t)$ berechnen lassen, lassen sich alle $f_p^{(i)}$ linear durch die F_n ausdrücken, wie wir es soeben an dem besonderen Fall der A_n , B_n und $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ gesehen haben.

Nach (3) folgt aus dem Hurwitzschen Theorem²⁾

$$(5) \quad \int_0^T f^2(t) dt = \sum_1^\infty F_p^2$$

1) Vgl. wegen Orthogonalität und Normierung weiter unten Gl. (10a), wegen Vollständigkeit D. Hilbert, Göttinger Nachr. 1906. p. 435, bes. 442.

2) A. Hurwitz, Mathem. Ann. 57. p. 425. 1903 und 59. p. 553. 1904. Vgl. auch A. Kneser, Integralgleichungen, Braunschweig 1911, § 6.

und nach (4) entsprechend:

$$(6) \quad \int_{T_{i-1}}^{T_i} f^2(t) dt = \sum_p f_p^{(i)2}.$$

Für jeden Teilbereich gilt eine Gleichung (6); addiert man sie alle, so findet man, da

$$\sum_i \int_{T_{i-1}}^{T_i} f^2(t) dt = \int_0^T f^2(t) dt$$

ist:

$$(6a) \quad \sum_i \sum_p f_p^{(i)2} = \sum_p F_p^2.$$

Genau wie wenn die Summen endlich wären, folgt hieraus: In den Gleichungen, welche die $f_p^{(i)}$ durch die F_p oder umgekehrt die F_p durch die $f_p^{(i)}$ ausdrücken, genügen die Koeffizienten den Orthogonalitätsbedingungen. Man kann infolgedessen das unendliche Differentialprodukt

$$dF_1 dF_2 \dots$$

gleichsetzen dem Produkt aus den Differentialen aller $f_n^{(i)}$

$$df_1^{(1)} df_2^{(1)} \dots df_1^{(2)} df_2^{(2)} \dots df_1^{(k)} df_2^{(k)} \dots,$$

wie wenn die Zahl dieser Veränderlichen endlich wäre. Die Anwendung auf unseren besonderen Fall, in welchem die $\Phi_n(t)$ und $\varphi_n^{(i)}(t)$ Kosinus- und Sinusfunktionen mit konstanten Faktoren sind, ergibt, daß man in (1) das Produkt

$$dA_1 dB_1 dA_2 dB_2 \dots$$

mit einer Veränderung des konstanten Faktors ersetzen kann durch

$$da_1^{(1)} db_1^{(1)} da_2^{(1)} db_2^{(1)} \dots da_1^{(2)} db_1^{(2)} da_2^{(2)} db_2^{(2)} \dots \\ da_1^{(k)} db_1^{(k)} da_2^{(k)} db_2^{(k)} \dots$$

Da der Übergang von den F_n zu den $f_n^{(i)}$ linear erfolgt, so geht jede quadratische Form

$$(7) \quad Q = \sum_p \sum_q K_{pq} F_p F_q$$

über in eine quadratische Form

$$(8) \quad Q = \sum_i^k \sum_j^k \sum_p \sum_q k_{pq}^{(i,j)} f_p^{(i)} f_q^{(j)}.$$

Also wird in dem Wahrscheinlichkeitsgesetz (1) der Exponent Q eine quadratische Form aller $a_n^{(i)}$ und $b_n^{(i)}$. Damit aber jeder Teilbereich ein Wahrscheinlichkeitsgesetz von derselben Art erhält, wie der ganze Bereich, müssen wir fordern:

1. Die Wahrscheinlichkeitsgesetze für verschiedene Teilbereiche müssen voneinander unabhängig sein, wenigstens wenn diese Teilbereiche nicht zu klein sind. Denn wir haben das Gesetz (1) für den Bereich von 0 bis T ebenfalls ohne Rücksicht auf andere Zeitbereiche angesetzt. Daß es dabei freilich für die Größe der Teilbereiche eine untere Grenze geben muß, sieht man daran, daß ja die Werte der Schwingungsfunktion $f(t)$ in sehr kleinen benachbarten Bereichen schon aus Stetigkeitsgründen in einem gewissen Zusammenhang stehen, so daß solche Bereiche in statistischer Hinsicht sicher nicht unabhängig sind. Man darf deshalb die Zahl k der Unterteilungen bei vorgegebenem Wert von T nicht zu groß, aber unterhalb einer gewissen Grenze beliebig wählen. Mathematisch spricht sich diese Forderung so aus, daß die im Wahrscheinlichkeitsgesetz auftretende Form Q statt durch (8) durch die vereinfachte Formel

$$(9) \quad Q = \sum_1^k \sum_p \sum_q k_{p,q}^{(i)} f_p^{(i)} f_q^{(i)}$$

dargestellt sein soll, in welcher alle Glieder mit gemischten oberen Indizes fehlen.

2. Das Wahrscheinlichkeitsgesetz soll bei gegebener Größe des Entwicklungsbereiches von dessen Anfangszeitpunkt unabhängig sein.

Um die Transformation der Form Q durchzuführen, machen wir von einem in der Theorie dieser Formen wohlbekannten Satz Gebrauch, den wir hier aber zur Erleichterung für den Leser in aller Kürze, ohne auf Konvergenzfragen einzugehen, ableiten wollen.¹⁾ Eine beliebige Funktion $K(t, u)$ kann man entsprechend der Gleichung (3) nach t für den Bereich von 0 bis T in eine Reihe

$$(10) \quad K(t, u) = \sum_p K_p(u) \Phi_p(t)$$

entwickeln, deren Koeffizienten $K_p(u)$ natürlich noch Funktionen von u sind. Multiplizieren wir die Gleichungen (3)

1) D. Hilbert, Göttinger Nachr. 1904. p. 439 bzw. 452.

und (10), so folgt durch Integration nach t , da man die Reihen gliedweise integrieren und nach der Definition der $\Phi_p(t)$ als normierter orthogonaler Funktionen

$$(10a) \quad \int_0^T \Phi_p(t) \Phi_q(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{wenn } p = q \\ 0, & \text{wenn } p \text{ von } q \text{ verschieden} \end{cases}$$

setzen darf:

$$(11) \quad \int_0^T K(t, u) f(t) dt = \sum_p K_p(u) F_p.$$

Jeden der Koeffizienten $K_p(u)$ können wir aber für den Bereich $0 < u < T$ wieder in eine Reihe

$$(12) \quad K_p(u) = \sum_q K_{pq} \Phi_q(u)$$

entwickeln. Führen wir nun noch eine beliebige stetige Funktion $g(u)$ ein, für welche in demselben Bereiche

$$(13) \quad g(u) = \sum_q G_q \Phi_q(u)$$

gilt, so folgt aus (12) und (13) auf dem soeben beschrittenen Wege:

$$(14) \quad \int_0^T K_p(u) g(u) du = \sum_q K_{pq} G_q.$$

Multiplizieren wir schließlich (11) mit $g(u) du$, so ergibt sich durch Integration nach u von 0 bis T :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^T K(t, u) f(t) g(u) dt du &= \int_0^T \left(\sum_p K_p(u) F_p \right) g(u) du \\ &= \sum_p F_p \int_0^T K_p(u) g(u) du = \sum_p \sum_q K_{pq} F_p G_q. \end{aligned}$$

Wählen wir $g(t) = f(t)$, so wird hieraus:

$$(15) \quad \int_0^T \int_0^T K(t, u) f(t) f(u) dt du = \sum_p \sum_q K_{pq} F_p F_q.$$

Aus (10) und (12) folgt überdies:

$$(16) \quad K(t, u) = \sum_p \sum_q K_{pq} \Phi_p(t) \Phi_q(u).$$

Multipliziert man dies mit $\Phi_p(t)\Phi_q(u)dtdu$, so findet man durch Integration nach beiden Veränderlichen von 0 bis T nach (10a):

$$(17) \quad K_{pq} = \int_0^T \int_0^T K(t, u) \Phi_p(t) \Phi_q(u) dt du.$$

Das System der Konstanten K_{pq} und die Funktion $K(t, u)$ bedingen sich somit gegenseitig; man kann aus den K_{pq} nach (16) diese Funktion und nach (17) umgekehrt aus ihr die K_{pq} bestimmen. Da selbstverständlich $K_{pq} = K_{qp}$ ist, so wird nach (16) $K(t, u) = K(u, t)$ eine symmetrische Funktion der beiden Veränderlichen.

Fig. 1.

Infolgedessen gibt es auf jeden Fall eine Funktion $K(t, u)$ derart, daß man nach (15) die quadratische Form (7)

$$(18) \quad Q = \sum_p \sum_q K_{pq} F_p F_q = \int_0^T \int_0^T K(t, u) f(t) f(u) dt du$$

setzen kann.¹⁾ Die Integration ist in der tu -Ebene über ein Quadrat von der Seitenlänge T auszuführen (vgl. Fig. 1).

1) Daß die zuerst von Hrn. Einstein (1910) gestellte Frage nach einem Wahrscheinlichkeitsgesetz der Fourierkoeffizienten einen guten mathematischen Sinn hat, erkennt man daran, daß das Wahrscheinlichkeitsgesetz (1) nichts an sich hat, was auf die Entwicklung von $f(t)$ nach

Die Geraden $t = T_1, T_2 \dots T_{k-1}$ und $u = T_1, T_2 \dots T_{k-1}$ teilen dies in k^2 gleiche Teilquadrate. Unsere Forderung 1 verlangt nun, daß sich Q darstellen läßt als Summe von k Doppelintegralen

$$(19) \quad \int_{T_{i-1}}^{T_i} \int_{T_{i-1}}^{T_i} K^{(i)}(t, u) f(t) f(u) dt du,$$

deren jedes sich auf ein auf der Diagonale $t = u$ gelegenes (wir sagen kürzer: diagonalgelegenes) Teilquadrat bezieht. Denn entsprechend der Formel (15) kann man das Integral (19)

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} \int_{T_{i-1}}^{T_i} K^{(i)}(t, u) f(t) f(u) dt du = \sum_p \sum_q k_{pq}^{(i)} f_p^{(i)} f_q^{(i)}$$

setzen, findet also dann, aber auch nur dann, für Q die Darstellung (9). Damit aber im Integral (18) die Anteile der nicht diagonal gelegenen Teilquadrate verschwinden, muß die Funktion $K(t, u)$ nur in der Nähe der Diagonale $t = u$ wesentlich von 0 verschieden sein. Nebenbei sieht man auch, daß die in (19) eingeführte Funktion $K(t, u) = K(u, t)$ ist.

Freilich sieht man auch sofort, daß dies nicht streng zutreffen kann. Denn legt man längs dieser Diagonale einen Streifen fest, in welchem $K(t, u)$ allein merklich von 0 verschieden ist, so verläuft er nur dann so gut wie vollständig in diagonal gelegenen Teilquadra'ten, wenn diese nicht zu klein, die Zahl k der Unterteilungen also nicht zu groß ist. Wollte man k weiter und weiter wachsen lassen, so würden schließlich auch nicht diagonal gelegene Teilquadrate ganz oder zu erheblichen Teilen in jenen Streifen zu liegen kommen, also auch einen merklichen Beitrag zum Integral (18) liefern. (In der Figur ist die Annäherung besser, wenn wir die Strecke von 0 bis T nur in 5 statt in 10 Teile zerlegen.) Dies aber stimmt zu dem schon oben ausgeführten, daß es sich hier nur um eine Näherung für hinreichend kleine k handeln kann.

Kosinus- und Sinusfunktionen hinweist, sobald man in ihm den Exponenten Q durch das Doppelintegral (18) ersetzt. Denn das unendliche Differentialprodukt in (1) verändert sich nicht, wenn man die genannten Funktionen durch irgendein anderes vollständiges, orthogonales System normierter Funktionen ersetzt; der Beweis für diese Behauptung ergibt sich, wie auf p. 672, aus dem Hurwitzschen Theorem. Ausdruck (1) ist somit schlechthin als ein Wahrscheinlichkeitsgesetz für die Funktion $f(t)$ zu bezeichnen.

Um noch mehr über $K(t, u)$ zu erfahren, wird es nun zweckmäßig sein, statt t und u die Veränderlichen

$$v = t + u, w = t - u$$

einzuführen. $K(t, u)$ geht dadurch in eine Funktion

$$L(v, w) = K\left(\frac{1}{2}(v + w), \frac{1}{2}(v - w)\right)!$$

über, die nach dem Gesagten nur für kleine Werte von w erhebliche Werte annimmt. Der stetigen Verschiebung des Anfangspunktes unseres Entwicklungsbereiches entspricht nun eine stetige diagonale Verschiebung des zugehörigen Quadrates in der Figur. Da sich hierbei nach Forderung 2 das durch $K(t, u) = L(v, w)$ vollständig bestimmte Wahrscheinlichkeitsgesetz nicht ändern darf, so muß L eine von v unabhängige Funktion $L(w)$ von w allein sein, und zwar eine gerade Funktion von w , da $K(t, u)$ eine symmetrische Funktion von t und u war.

Damit ist es nun leicht gemacht, die gesuchten Werte der Koeffizienten K_{pq} aus der Gleichung (17) abzuleiten. Wir gehen aber sogleich zu dem besonderen Fall über, daß die Funktionen $\Phi_p(t)$ durch

$$\sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi n}{T} t \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi n}{T} t$$

zu ersetzen sind. Mit der in 1 angewandten Bezeichnungsweise liefert Gleichung (17), wenn man als Integrationsvariablen v und w einführt:

$$(20) \quad \begin{cases} d_{mn} = \frac{1}{T} \iint L(w) \cos\left(\frac{\pi m}{T}(v + w)\right) \cos\left(\frac{\pi n}{T}(v - w)\right) dv dw, \\ e_{mn} = \frac{1}{T} \iint L(w) \sin\left(\frac{\pi m}{T}(v + w)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{T}(v - w)\right) dv dw, \\ f_{mn} = \frac{1}{T} \iint L(w) \cos\left(\frac{\pi m}{T}(v + w)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{T}(v - w)\right) dv dw. \end{cases}$$

Der Integrationsbereich ist zunächst das große Quadrat unserer Figur. Wir bleiben aber im Rahmen der schon oben benutzten Näherung, wenn wir uns bei der Integration auf einen Streifen zu beiden Seiten der mehrfach erwähnten Diagonalen beschränken, dessen Breite so zu wählen ist, daß $L(w)$ außerhalb so gut wie Null ist. Desgleichen dürfen wir ruhig, obwohl wir damit den Bereich unseres Quadrates etwas überschreiten, nach v von 0 bis $2T$ integrieren. Dann wird der Integrationsbereich ein in der Figur eingezeichnetes schmales Rechteck,

dessen kurze Seiten durch die Eckpunkte unseres Quadrates gehen. Auf diese Art finden wir aus (20):

$$\begin{aligned} d_{mn} &= \frac{1}{2T} \int L(w) dw \int_0^{2T} dv \left\{ \cos \frac{\pi}{T} \left((m-n)v + (m+n)w \right) \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{\pi}{T} \left((m+n)v + (m-n)w \right) \right\}, \\ e_{mn} &= \frac{1}{2T} \int L(w) dw \int_0^{2T} dv \left\{ \cos \frac{\pi}{T} \left((m-n)v + (m+n)w \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\pi}{T} \left((m+n)v + (m-n)w \right) \right\}, \\ f_{mn} &= \frac{1}{2T} \int L(w) dw \int_0^{2T} dv \left\{ \sin \frac{\pi}{T} \left((m+n)v + (m-n)w \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{\pi}{T} \left((m-n)v + (m+n)w \right) \right\}. \end{aligned}$$

Die Integration nach v liefert hier stets 0, außer wenn $m = n$ ist. Für diesen Fall aber ergibt sie:

$$(21) \quad \begin{cases} d_{nn} = e_{nn} = \int L(w) \cos \left(\frac{2\pi n}{T} w \right) dw = C_n, \\ f_{nn} = - \int L(w) \sin \left(\frac{2\pi n}{T} w \right) dw. \end{cases}$$

Da $L(w)$ eine gerade Funktion ist, ist auch $f_{nn} = 0$.

Im Wahrscheinlichkeitsgesetz (1) verschwinden damit alle die Summanden im Exponenten Q , in denen sich eine statistische Koppelung von Partialschwingungen verschiedener Frequenz ausspräche. Es wird einfach

$$Q = \sum_n C_n (A_n^2 + B_n^2).$$

Dies Ergebnis stimmt mit dem von Hrn. Einstein abgeleiteten völlig überein.

Die C_n sind dabei die gewöhnlichen Fourierkoeffizienten der Funktion $L(w)$ für den Entwicklungsbereich von $-\frac{1}{2}T$ bis $+\frac{1}{2}T$; denn wegen der Besonderheit der Funktion $L(w)$ können wir in (21) den bestimmten Integralen ohne weiteres diese Grenzen geben. Man erkennt daran, daß sie zwar von der Größe des für $f(t)$ gewählten Entwicklungsbereiches, die gleich T ist, abhängt, nicht aber gemäß Forderung 2 von dessen Anfangszeitpunkt. Die auf die Teilbereiche von 0

bis T_1 , T_1 bis T_2 usw. bezüglichen Wahrscheinlichkeitsgesetze erhalten somit alle genau die gleiche Form.

Es gibt also kein Wahrscheinlichkeitsgesetz mit Koppelungsgliedern, das auf beliebige Zeitbereiche anwendbar wäre. Nun wäre es an sich wohl denkbar, daß es in der Natur bevorzugte Zeitbereiche gäbe, die man hier zu benutzen hätte; für annähernd einfarbige Schwingungen könnte die Periode oder der reziproke Wert der spektralen Breite (in Schwingungszahlen gemessen) ein Maß für solche Zeiten abgeben. Doch scheint uns eine derartige Theorie wenig aussichtsreich.

In unserer ersten Arbeit benutzten wir für die Strahlung Fourierreihen, die nur für einen Teil des Entwicklungsbereiches die wirkliche Schwingung darstellten. Wenden wir aber das Ergebnis dieses Abschnittes auf die Schwingungen einzelner Strahlungsquellen an, so folgt daraus, daß die mathematischen Hoffnungen,

$$a_p a_{p'} \cos(\vartheta_p - \vartheta_{p'}), \quad a_p a_{p'} \sin(\vartheta_p - \vartheta_{p'}),$$

welche in den Gleichungen (34) und (35) der früheren Arbeit die entscheidende Rolle spielen, Null sind. Damit fällt auch für derartige Reihen jedes Koppelungsglied fort.

Frankfurt, Oktober 1915.

(Eingegangen 14. Oktober 1915.)