Sopra un recentissimo scritto del sig. L. Stickelberger.

(Lettera di F. CASORATI al Direttore degli Annali.)

Stimatissimo Sig. Direttore

Pavia, 28 Dicembre 1880.

Vorrei che questa lettera giungesse in tempo per essere inserta, se Ella permette, nel fascicolo degli Annali che sta per uscire. Essa m'è dettata dalla penosa impressione che mi fa il preambolo di una pubblicazione di questi giorni, intitolata:

ZUR THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

AKADEMISCHE ANTRITTSSCHRIFT

VON

Dr. LUDWIG STICKELBERGER

ausserord. Prof. der Mathematik an der Universität zu Freiburg I. B.

Ella sa che il fascicolo 1.^o del tomo X dei nostri Annali veniva in luce nel luglio; adesso poi le dico, che, sino dal principio di agosto, io trasmetteva copia del mio lavoro (*), contenuto nel fascicolo, a persone aventi strettissimi rapporti di studio col sig. STICKELBERGER. Perciò Ella comprenderà la meraviglia ed il disgusto mio nel vedere che il sig. STICKELBERGER presenta *quietamente ed in maniera impersonale* nel preambolo della sua Antrittsschrift (**) *una delle idee cardinali* del mio lavoro (***) prima di fare alcuna menzione del

(*) Intitolato: *Il Calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio principalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilità complessa.*

(**) Nella prima pagina, colle parole « In dem ersten Theile dieser Arbeit (§ 1-4) werden zunächst im Anschluss an die vollständige Integration eines Systems von Differenzengleichungen, etc. ».

(***) Cioè quella di introdurre in questo argomento il *Calcolo delle differenze.*

medesimo. E questo non è tutto. Più oltre, si compiace di citarlo, ma per tentare d'infirmarne il valore con un'osservazione (*), che non può venire se non da chi non abbia capito lo scopo della mia Memoria, o ponga interesse a svogliare altrui dal prenderne cognizione. E, per giunta, dice ch'è *appena* comparsa (**), e che riposa sulle stesse considerazioni della sua (***), e non viceversa, che la sua riposa sulle stesse considerazioni della mia.

Come Ella vede, il professore di Friburgo è troppo generoso e troppo cortese verso il suo collega di Pavia!

Ma ritorniamo all'*osservazione*. Il titolo e tutta l'introduzione della mia Memoria dicono e ridicono chiaramente (a chi non vuole frantendere) che scopo di essa non è di trattare minutamente qualche determinata questione, bensì di presentare idee e considerazioni d'indole generale, in virtù delle quali il *Calcolo delle differenze* viene ad acquistare, a mio giudizio, nuova ed inattesa importanza nell'analisi della variabilità continua. Del resto, anche senza queste dichiarazioni, trovando un capitolo di sole quattro pagine dedicato alle belle scoperte del sig. FUCHS, il lettore capisce che non era mio intendimento di offrire un'ampia e minuta rifusione delle ricerche accumulate in questo campo; ma che mi premeva soltanto di dimostrare la fecondità delle mie idee con una applicazione, che, per l'attualità e l'importanza della cosa, attirasse l'attenzione degli Annalisti (****). Ora domando: in qual forma dovevo presentare quest'applicazione, per essere più sicuro di colpire ed interessare il lettore? Evidentemente, nella forma più semplice, più familiare, meno impacciata da simboli e da calcoli, e più prontamente conclusiva, che fosse possibile. I lettori competenti giudicheranno se io abbia scelto forma opportuna o no. Per intanto, seguito a credere di sì. Far vedere che l'integrale *completo* dell'equazione differenziale a coefficienti variabili soddisfa un'*equazione alle differenze a coefficienti costanti*, e conchiuderne immediatamente che le *note* formole per gli integrali di questa *si traducono* in espressioni analitiche per gli integrali di quella: ecco le idee facili, se si vuole, ma nuove, a mio credere, e cardinali, che, nel capitolo quarto, era mio scopo di far apprezzare dal lettore. Il quale ben vedrà, dunque, quanto sia fuor di posto il *nicht rathsam*, con cui il sig. STICKELBERGER s'è troppo affrettato di raccomandare la mia Memoria.

(*) Pag. seconda (numerata 4), lin. 3 « Aus diesem Grunde scheint es nicht rathsam, etc. ».

(**) Ibid., lin. 6 « eben erschienenen Abhandlung ».

(***) Ibid. « die auf ähnlichen Betrachtungen wie die vorliegende beruht ».

(****) Annali di Matematica, tomo X, pag. 10 e seguente « e ne mostrerò subito la fecondità, ecc. ».

Come poi avrei fatta la ricerca dei sottogruppi di integrali (*), o trattato altri punti, e perchè abbia fatto stampare trentasei pagine e non più; il sig. STICKELBERGER per adesso non lo può sapere.

Ed ora vorrei finire. Ma ad ogni nuova occhiata che getto sulle prime tre pagine, il malvolere del sig. STICKELBERGER mi sembra aggravarsi. Ed ecco che devo sospettare un altro cattivo pensiero nella pag. terza. Ond'è che domando: perchè mai il sig. STICKELBERGER non dichiara, neppure qui apertamente, a chi sia dovuto l'*attuale* ravvicinamento fra le equazioni differenziali e quelle alle differenze; mentre, quando segnala quest'ultime equazioni (**), si dà premura di avvertire il lettore che l'introduzione del logaritmo come variabile indipendente è dovuta a RIEMANN ed al sig. HAMBURGER? Ma il sig. HAMBURGER, che, nell'applicare opportunamente alla distinzione degli integrali in sottogruppi un procedimento del sig. JORDAN, non ha punto tentato di nascondere la paternità, riconoscerà certamente colla lealtà stessa, che, nell'uso da lui fatto di $\log x$, non entra affatto la mia idea di *tradurre i risultati del Calcolo delle differenze in altrettanti di spettanza della variabilità continua e complessa* (***). Nè in nessun luogo io trovai che questa idea fosse concepita ed esposta da RIEMANN; il quale introduceva bensì nell'equazione differenziale le derivate rispetto a $\log x$, ma per semplice ragione di brevità; lasciandone i coefficienti, per la ragione stessa, ancora espressi in x , e non facendo allusione di sorta al Calcolo delle differenze (****).

Terminerò domandando al sig. STICKELBERGER, se proprio tutte le parti della mia Memoria *riposino sulle stesse considerazioni della sua*; per esempio, anche il capitolo secondo, dove è dato il teorema (*****) sul determinante

(*) Si persuada pure il sig. STICKELBERGER, che, dopo attenta lettura dell'articolo del sig. HAMBURGER (*Bemerkung*, etc. nel tomo 76 del Giornale di BORCHARDT), non è facile di smarrirsi in questa ricerca; la quale può essere condotta all'ultimo compimento senza abbandonare la via tracciata dal sig. HAMBURGER.

(**) Le equazioni segnate (3).

(***) Nella pag. 122 del tomo 76 egli indica bensì con u il $\frac{\log(x-a)}{2\pi i}$, ma dice apertamente *der Einfachheit wegen*; ed usa bensì il simbolo Δ , ma senza affatto chiamare in aiuto il Calcolo delle differenze. E neppure lo invoca nella Memoria del tomo 83.

(****) A calmare gli scrupoli, se veramente li ha, di plagio mio su RIEMANN, il sig. STICKELBERGER potrebbe leggere le *Notizie storiche* e tutte le *Sezioni* successive della *Teoria delle funzioni di variabili complesse*, pubblicata in Pavia nel 1868, allo scopo di diffondere in Italia i principj della variabilità complessa, e specialmente le idee e i risultati di RIEMANN appunto e di CAUCHY.

(*****) Prendo quest'occasione per avvertire d'aver scritto inesattamente la formola (*Annali di Matem.*, tomo 10, pag. 20) su cui si fonda la dimostrazione del teorema. La formola

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \theta y_1 & \theta y_2 & \dots & \theta y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{n-1} y_1 & \theta^{n-1} y_2 & \dots & \theta^{n-1} y_n \end{vmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 & \dots & \Delta y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{n-1} y_1 & \Delta^{n-1} y_2 & \dots & \Delta^{n-1} y_n \end{vmatrix};$$

teorema ch'egli non avrebbe dovuto dimenticare; non foss'altro perchè contiene come caso particolare quello sul determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ D y_1 & D y_2 & \dots & D y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-1} y_1 & D^{n-1} y_2 & \dots & D^{n-1} y_n \end{vmatrix},$$

considerato in special modo dal sig. FROBENIUS, i cui lavori il sig. STICKELBERGER non ignora, nè smania di screditare.

Perdoni, sig. Direttore, la noja di questa lettera, ed aggradisca l'attestazione del rispettosso affetto del

Suo devotissimo

F. CASORATI.

esatta è:

$$(-1)^{n-1} \theta y_1 \cdot \theta^2 y_1 \dots \theta^{n-2} y_1 \Theta =$$

$$= \begin{vmatrix} y_2 \cdot \theta y_1 - & y_1 \cdot \theta y_2 \cdot & y_n \cdot \theta y_1 - & y_1 \cdot \theta y_n \\ \theta y_2 \cdot \theta^2 y_1 - & \theta y_1 \cdot \theta^2 y_2 \cdot & \theta y_n \cdot \theta^2 y_1 - & \theta y_1 \cdot \theta^2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{n-2} y_2 \cdot \theta^{n-1} y_1 - & \theta^{n-2} y_1 \cdot \theta^{n-1} y_2 \cdot & \theta^{n-2} y_n \cdot \theta^{n-1} y_1 - & \theta^{n-2} y_1 \cdot \theta^{n-1} y_n \end{vmatrix},$$

di cui il secondo membro può anche scriversi come segue

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ \theta y_2 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ \theta y_3 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} y_n & y_1 \\ \theta y_n & \theta y_1 \end{vmatrix} \\ \theta \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ \theta y_2 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \theta \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ \theta y_3 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \dots & \theta \begin{vmatrix} y_n & y_1 \\ \theta y_n & \theta y_1 \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{n-1} \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ \theta y_2 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \theta^{n-1} \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ \theta y_3 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \dots & \theta^{n-1} \begin{vmatrix} y_n & y_1 \\ \theta y_n & \theta y_1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Correggendo lo sbaglio, la dimostrazione riesce ancor più breve.