Klassifikation der Raumkorrelationen.

Von

Karl Kommerell in Stuttgart.

In meiner Arbeit über nichtaffine Raumkollineationen (Jahresber. der Deutsch. Math. Ver. 29 (1920), S. 1—27, eine zweite über die affinen Kollineationen wird demnächst ebendort erscheinen) habe ich eine Einteilung der Kollineationen des dreidimensionalen Raums nach neuen Gesichtspunkten gegeben. In dieser Arbeit soll eine Klassifikation der Raumkorrelationen gegeben werden, derart, daß aus den Koeffizienten der Gleichung (1), welche die Korrelation festlegt, die Art der Abbildung vollständig übersehen werden kann. Dieses Problem ist, abgesehen von Ansätzen, die sich bei Magnus¹⁾ finden, bisher noch nicht bearbeitet worden. Es wird sich zeigen, daß es eine Verallgemeinerung des Klassifikationsproblems für Flächen zweiter Ordnung ist. Für jeden der abgebildeten Räume wird man zu einem Hauptachsenproblem geführt: diese beiden verschmelzen in ein einziges, wenn die Bilinearform (1), welche die Abbildung definiert, symmetrisch ist; das Klassifikationsproblem bezieht sich dann auf diejenige Fläche zweiter Ordnung, welche die durch die symmetrische Bilinearform (1) definierte Polarverwandtschaft vermittelt. Wegen der Ergebnisse dieser Arbeit im einzelnen verweisen wir auf den folgenden Text. Die Untersuchung selbst soll so geführt werden, daß eine Übertragung auf mehrdimensionale Räume leicht möglich ist.

Durch die bilineare Gleichung

$$(1) \quad \sum a_{ik} x_i x'_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

wo die x_i, x'_k sich auf zwei kartesische Rechtssysteme beziehen mögen, wird der Raum R auf den Raum R' relativ bezogen; dabei setzen wir

¹⁾ L. J. Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analyt. Geom. des Raumes, 1837, S. 120—149; den von Magnus betrachteten Spezialfall behandelt Th. Reye, Journ. f. Math. 79 (1875), S. 166—171, synthetisch.

voraus, daß im allgemeinen $a_{ik} \neq a_{ki}$ und daß die Determinante

$$(2) \quad A = |a_{ik}| \neq 0$$

sei, d. h. wir beschränken uns auf nichtsinguläre Korrelationen. Wir führen nun in jedem der Räume durch die Gleichungen

$$(3) \quad \begin{aligned} X_i &= l_i x_1 + m_i x_2 + n_i x_3 + X_{i0} x_4, & X'_i &= l'_i x'_1 + m'_i x'_2 + n'_i x'_3 + X'_{i0} x'_4, \\ X_4 &= x_4, & X'_4 &= x'_4 \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3)$$

je ein neues Koordinatensystem ein und bestimmen die zur Verfügung stehenden Konstanten so, daß die in den X_i, X'_k geschriebene bilineare Gleichung (1) möglichst einfach sind. Dabei sollen die l_i, m_i, n_i und ebenso die l'_i, m'_i, n'_i die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution der Determinante $+1$ sein. Wie im Falle der Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung, so ist auch hier zu unterscheiden, ob A_{44} , d. h. die Unterdeterminante von a_{44} in A , von Null verschieden oder gleich Null ist. Im ersten Falle läßt sich zeigen, daß die Bilinearform $\sum a_{ik} x_i x'_k$ durch (3) in die *kanonische Form*

$$(4) \quad i_1 X_1 X'_1 + i_2 X_2 X'_2 + i_3 X_3 X'_3 + i_4 X_4 X'_4$$

übergeführt werden kann, im zweiten Falle in die *kanonische Form*

$$(5) \quad i_1 X_1 X'_1 + i_2 X_2 X'_2 + i_3 X_4 X'_3 + i_4 X_3 X'_4.$$

Darnach zerfallen die Korrelationen in zwei Klassen, die wir als *zentrale* ($A_{44} \neq 0$) und *parabolische* ($A_{44} = 0$) unterscheiden. Wir behandeln zuerst:

I. Die zentralen Korrelationen ($A_{44} \neq 0$).

Setzt man aus (3) die Werte der X_i, X'_k in (4) ein und vergleicht die Koeffizienten der entstehenden Bilinearform mit den Koeffizienten der Form $\sum a_{ik} x_i x'_k$, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$(6) \quad \begin{aligned} a_{11} &= i_1 l_1 l'_1 + i_2 l_2 l'_2 + i_3 l_3 l'_3, & a_{21} &= i_1 l_1 m'_1 + i_2 l_2 m'_2 + i_3 l_3 m'_3, \\ a_{12} &= i_1 m_1 l'_1 + i_2 m_2 l'_2 + i_3 m_3 l'_3, & a_{22} &= i_1 m_1 m'_1 + i_2 m_2 m'_2 + i_3 m_3 m'_3, \\ a_{13} &= i_1 n_1 l'_1 + i_2 n_2 l'_2 + i_3 n_3 l'_3; & a_{23} &= i_1 n_1 m'_1 + i_2 n_2 m'_2 + i_3 n_3 m'_3; \\ & & a_{31} &= i_1 l_1 n'_1 + i_2 l_2 n'_2 + i_3 l_3 n'_3, \\ & & a_{32} &= i_1 m_1 n'_1 + i_2 m_2 n'_2 + i_3 m_3 n'_3, \\ & & a_{33} &= i_1 n_1 n'_1 + i_2 n_2 n'_2 + i_3 n_3 n'_3. \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} a_{14} &= i_1 l'_1 X_{10} + i_2 l'_2 X_{20} + i_3 l'_3 X_{30}, & a_{41} &= i_1 l_1 X'_{10} + i_2 l_2 X'_{20} + i_3 l_3 X'_{30}, \\ a_{24} &= i_1 m'_1 X_{10} + i_2 m'_2 X_{20} + i_3 m'_3 X_{30}, & a_{42} &= i_1 m_1 X'_{10} + i_2 m_2 X'_{20} + i_3 m_3 X'_{30}, \\ a_{34} &= i_1 n'_1 X_{10} + i_2 n'_2 X_{20} + i_3 n'_3 X_{30}; & a_{43} &= i_1 n_1 X'_{10} + i_2 n_2 X'_{20} + i_3 n_3 X'_{30}. \\ & & a_{44} &= i_1 X_{10} X'_{10} + i_2 X_{20} X'_{20} + i_3 X_{30} X'_{30} + i_4. \end{aligned}$$

Dies sind für die 28 unbekannten Größen 16 Gleichungen; dabei bestehen aber noch je 6 Gleichungen für die l_i , m_i , n_i bzw. l'_i , m'_i , n'_i , da diese die Koeffizienten orthogonaler Substitutionen sind. Die Anzahl der Gleichungen ist also gerade ausreichend. Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$(8) \quad \begin{aligned} b_{ik} &= b_{ki} = a_{1i} a_{1k} + a_{2i} a_{2k} + a_{3i} a_{3k}, \\ b'_{ik} &= b'_{ki} = a_{1i} a'_{k1} + a_{2i} a'_{k2} + a_{3i} a'_{k3}. \end{aligned} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Aus den Gleichungen (6) erhält man dann

$$(9) \quad \begin{aligned} b_{11} &= i_1^2 l_1^2 + i_2^2 l_2^2 + i_3^2 l_3^2, & b_{21} &= i_1^2 m_1 l_1 + i_2^2 m_2 l_2 + i_3^2 m_3 l_3, \\ b_{12} &= i_1^2 l_1 m_1 + i_2^2 l_2 m_2 + i_3^2 l_3 m_3, & b_{22} &= i_1^2 m_1^2 + i_2^2 m_2^2 + i_3^2 m_3^2, \\ b_{13} &= i_1^2 l_1 n_1 + i_2^2 l_2 n_2 + i_3^2 l_3 n_3, & b_{23} &= i_1^2 m_1 n_1 + i_2^2 m_2 n_2 + i_3^2 m_3 n_3, \\ b_{31} &= i_1^2 n_1 l_1 + i_2^2 n_2 l_2 + i_3^2 n_3 l_3, \\ b_{32} &= i_1^2 n_1 m_1 + i_2^2 n_2 m_2 + i_3^2 n_3 m_3, \\ b_{33} &= i_1^2 n_1^2 + i_2^2 n_2^2 + i_3^2 n_3^2. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man ein entsprechendes System in den gestrichenen Größen b'_{ik} , l'_i , m'_i , n'_i . Jede der drei Spalten in (9) multipliziert man der Reihe nach mit l_k , m_k , n_k und addiert jedesmal. Es folgt so

$$(10) \quad \begin{aligned} (b_{11} - i_k^2) l_k + b_{12} m_k + b_{13} n_k &= 0, \\ b_{21} l_k + (b_{22} - i_k^2) m_k + b_{23} n_k &= 0, \\ b_{31} l_k + b_{32} m_k + (b_{33} - i_k^2) n_k &= 0. \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Daraus ergibt sich, daß i_1^2 , i_2^2 , i_3^2 die Wurzeln der *Hauptachsengleichung* in i^2 sind

$$(11) \quad \begin{vmatrix} b_{11} - i^2 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - i^2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - i^2 \end{vmatrix} = 0,$$

wo man i nicht mit der imaginären Einheit verwechseln wird; diese Gleichung besitzt drei *reelle, positive*²⁾ Wurzeln. Da die Determinante $|b_{ik}| = A_{44}^2 \neq 0$ ist, so sind die Wurzeln i_1^2 , i_2^2 , i_3^2 alle von Null verschieden.

Aus (10) erhält man für $k = 1, 2, 3$ die Verhältnisse der Richtungskosinus l_k , m_k , n_k , von denen man genau wie beim Transformationsproblem der Flächen zweiter Ordnung zeigt, daß $l_k l_\mu + m_k m_\mu + n_k n_\mu = 0$ ist. Man hat jetzt die Richtungskosinus so zu bestimmen, daß ihre Determinante den Wert $+1$ erhält. Ersetzt man in (10) und (11) die b_{ik} , l_k , m_k , n_k durch die gestrichenen Werte, so erhält man auch für R' eine *Hauptachsengleichung*; diese besitzt dieselben Wurzeln wie (11), da $|b_{ik}| = |b'_{ik}| = A_{44}^2$ ist. Ist in (1) $a_{ik} = a_{ki}$, so ist auch $b_{ik} = b'_{ik}$; das

²⁾ Das Letztere folgt aus dem Satz von Descartes.

System l_k, m_k, n_k ist dasselbe wie das System l'_k, m'_k, n'_k ; sie definieren die Richtungskosinus der Hauptachsen der Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$, welche die Ordnungsfläche des durch (1) definierten Polarsystems ist; dabei ist vorausgesetzt, daß die Koordinatensysteme in beiden Räumen zusammenfallen. Die Gleichung (11) kann dann in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11} - i a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - i a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} + i a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + i a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + i \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden. Aus alldem geht hervor, daß das hier behandelte Problem eine Verallgemeinerung des Hauptachsenproblems der Flächen zweiter Ordnung ist.

Da durch (11) nur die Quadrate der Größen i_1^2, i_2^2, i_3^2 bestimmt sind, so ist noch anzugeben, mit welchen Vorzeichen i_1, i_2, i_3 zu versehen sind. Zu diesem Zweck leite man aus (6) das Gleichungssystem

$$(12) \quad \begin{aligned} i_k l'_k &= a_{11} l_k + a_{12} m_k + a_{13} n_k, & i_k m'_k &= a_{21} l_k + a_{22} m_k + a_{23} n_k, \\ i_k n'_k &= a_{31} l_k + a_{32} m_k + a_{33} n_k \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3)$$

ab. Aus diesen Gleichungen erhält man i_1, i_2, i_3 mit ganz bestimmten Vorzeichen, nachdem die l_k, l'_k bestimmt sind. Zur Berechnung von i_1, i_2, i_3, l_k, l'_k usw. wurden bisher stets Gleichungen benützt, die aus (6) abgeleitet wurden. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die nach den angegebenen Vorschriften berechneten Größen auch wirklich das System (6) befriedigen. Dreht man bei den Richtungskosinus $l_k, m_k, n_k, l'_k, m'_k, n'_k$ das Vorzeichen um, so ändern i_k und i'_k das Vorzeichen. Dies hängt damit zusammen, daß in der bilinearen Gleichung

$$(13) \quad i_1 X_1 X'_1 + i_2 X_2 X'_2 + i_3 X_3 X'_3 + i_4 X_4 X'_4 = 0,$$

durch welche die Korrelation in bezug auf die neuen Koordinatensysteme bestimmt ist, die positiven Richtungen von zwei Koordinatenachsen des einen Raums mit ihren negativen vertauscht werden können, wenn gleichzeitig das Vorzeichen von zwei der Größen i_k passend geändert wird. Umgekehrt ist es auch gestattet, das Vorzeichen von zwei der Größen i_k gleichzeitig zu ändern, da dies einer Umklappung um eine Koordinatenachse um den Winkel π gleichkommt.

Nachdem so die Richtungen der neuen Koordinatenachsen in beiden Räumen bestimmt sind, handelt es sich noch um die *Bestimmung des neuen Ursprungs* für jeden der beiden Räume. Aus den Gleichungen (7) erhält man die Größen X_{k0} und X'_{k0} . Nach (3) bedeuten z. B. X_{k0} die (nichthomogenen) Koordinaten des alten Ursprungs im Raume R in bezug auf das neue System. Nennt man x_{k0} die nichthomogenen Koordinaten

des neuen Ursprungs in bezug auf das alte System, so hat man nach (3) die Beziehungen

$$\begin{aligned} -x_{10} &= l_1 X_{10} + l_2 X_{20} + l_3 X_{30}, & -x_{20} &= m_1 X_{10} + m_2 X_{20} + m_3 X_{30}, \\ & & -x_{30} &= n_1 X_{10} + n_2 X_{20} + n_3 X_{30}. \end{aligned}$$

Multipliziert man jede der Gleichungen (12) mit X_{k0} und summiert man von $k=1$ bis $k=3$, so erhält man mit Rücksicht auf die letzten Gleichungen und (7)

$$\begin{aligned} a_{11}x_{10} + a_{12}x_{20} + a_{13}x_{30} + a_{14} &= 0, & a_{21}x_{10} + a_{22}x_{20} + a_{23}x_{30} + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_{10} + a_{32}x_{20} + a_{33}x_{30} + a_{34} &= 0 \end{aligned}$$

und hieraus

$$(14) \quad \begin{aligned} x_{10} : x_{20} : x_{30} : 1 &= A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44}, \\ x'_{10} : x'_{20} : x'_{30} : 1 &= A_{14} : A_{24} : A_{34} : A_{44}, \end{aligned}$$

wo die x'_{k0} entsprechende Bedeutung für den Raum R' haben und entsprechend gewonnen werden. Dabei bedeutet A_{ik} die Unterdeterminante von a_{ik} in A .

Aus der Gleichung

$$i_1 i_2 i_3 = \begin{vmatrix} i_1 l_1 & i_1 m_1 & i_1 n_1 \\ i_2 l_2 & i_2 m_2 & i_2 n_2 \\ i_3 l_3 & i_3 m_3 & i_3 n_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l'_1 & m'_1 & n'_1 \\ l'_2 & m'_2 & n'_2 \\ l'_3 & m'_3 & n'_3 \end{vmatrix}$$

erhält man durch Multiplikation nach Spalten und Beachtung von (7)

$$(15) \quad i_1 i_2 i_3 = A_{44},$$

und ebenso aus

$$i_1 i_2 i_3 i_4 = \begin{vmatrix} i_1 l_1 & i_1 m_1 & i_1 n_1 & i_1 X_{10} \\ i_2 l_2 & i_2 m_2 & i_2 n_2 & i_2 X_{20} \\ i_3 l_3 & i_3 m_3 & i_3 n_3 & i_3 X_{30} \\ 0 & 0 & 0 & i_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l'_1 & m'_1 & n'_1 & X'_{10} \\ l'_2 & m'_2 & n'_2 & X'_{20} \\ l'_3 & m'_3 & n'_3 & X'_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

gemäß den Gl. (6) und (7)

$$(16) \quad i_1 i_2 i_3 i_4 = A,$$

also

$$(17) \quad i_4 = \frac{A}{A_{44}}.$$

Damit sind alle Konstanten der Transformation bestimmt.

Orientiert man nun die beiden Räume so gegeneinander, daß die neuen Koordinatenachsen zusammenfallen, so lehrt die bilineare Beziehung (13), daß die beiden Räume sich in *polarreziproker* Lage in Beziehung auf die Fläche zweiter Ordnung

$$(18) \quad i_1 X_1^2 + i_2 X_2^2 + i_3 X_3^2 + i_4 X_4^2 = 0$$

befinden. *Zwei durch zentrale Korrelation aufeinander bezogene Räume lassen sich also stets in eine solche gegenseitige Lage bringen, daß sie ein Polarsystem bilden und zwar auf vier Arten³⁾*, letzteres, weil um jede der Koordinatenachsen um den Winkel π umgeklappt werden kann. Aus (15) und (16) kann geschlossen werden, daß für $A > 0$ die Ordnungsfläche (18) des Polarsystems ein einmantliges Hyperboloid oder ein imaginäres Ellipsoid, für $A < 0$ ein zweimantliges Hyperboloid oder ein reelles Ellipsoid ist. Danach zerfallen entsprechend dem Vorzeichen von A die zentralen Korrelationen in zwei Unterklassen.

In jedem der Räume existiert nach den obigen Ausführungen ein ganz bestimmtes Koordinatensystem, auf das bezogen die bilineare Gleichung die kanonische Form (13) annimmt. Die Ebenen dieses Systems nennen wir die *Hauptebenen* und den Ursprung den *Mittelpunkt* des entsprechenden Raumes. Die Gl. (14) geben die Mittelpunktskoordinaten. Zwei Ebenen im Raume R , die symmetrisch zu einer Hauptebene liegen, entsprechen in R' zwei Punkte, die symmetrisch zu einer Hauptebene von R' liegen. Die Größen i_k nennen wir die *Invarianten der Korrelation*. Verschiebt man nämlich jeden der Räume beliebig gegen die Koordinatensysteme, auf die sich (1) bezieht, und führt dann die Reduktion aus, so müssen sich natürlich für $i_1:i_2:i_3:i_4$ bei passender Wahl der positiven Richtungen der Hauptachsen dieselben Werte ergeben wie vorher. Diese Invarianz kann auch analytisch bestätigt werden.

Es kann vorkommen, daß die Hauptachsengleichung (11) eine *Doppelwurzel* besitzt: die Bedingung dafür, daß eine solche auftreten kann, ist nach dem bekannten Satze von Weierstraß die, daß die Determinante der linken Seite von (11) den Rang 1 annimmt. Wie im Falle der Flächen zweiter Ordnung so zeigt man auch hier, daß immer noch orthogonale Substitutionen (3) bestehen, welche die Bilinearform (1) in die kanonische (4) überführen. Die Ordnungsfläche (18) ist dann eine Rotationsfläche. Die Korrelation ist *rotatorisch*.

Sind endlich alle drei Wurzeln in (11) einander gleich, was dann eintritt, wenn $b_{11} = b_{22} = b_{33}$, $b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$ ist, so werden die Hauptebenen gänzlich unbestimmt und die Korrelation kann durch eine reelle oder imaginäre Kugel erzeugt werden. Die Elemente in A_{44} sind dann bis auf einen Faktor die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution.

II. Die parabolischen Korrelationen ($A_{44} = 0$).

Wie die Paraboloiden durch $A_{44} = 0$ definiert sind, so sind die parabolischen Korrelationen durch $A_{44} = 0$ charakterisiert. In A_{44} dürfen aber nicht alle Minoren zweiten Grades verschwinden, da sonst $A = 0$ wäre,

³⁾ Vgl. L. J. Magnus und Th. Reye a. a. O.

wie man erkennt, wenn A nach den Elementen der letzten Zeile und Spalte entwickelt wird. Wir setzen also voraus, daß A_{44} den Rang 2 habe. Nun zeigen wir, daß die Bilinearform $\sum a_{ik} x_i x'_k$ vermöge der Gleichungen (3) in die kanonische Form (5) transformiert werden kann. Dies vorausgesetzt, existieren in diesem Falle in jedem Raume nur zwei *Hauptebenen*, welche sich in der einen *Hauptachse* schneiden. Für den Raum R sind die Hauptebenen die Ebenen $X_1 = 0$, $X_2 = 0$; in der Tat entsprechen gemäß der bilinearen Gleichung

$$(19) \quad i_1 X_1 X'_1 + i_2 X_2 X'_2 + i_3 X_4 X'_3 + i_4 X_3 X'_4 = 0$$

zwei Punkten in R , die symmetrisch zur Ebene $X_1 = 0$ liegen, in R' zwei zur Ebene $X'_1 = 0$ symmetrisch liegende Ebenen. Die beiden anderen neuen Koordinatenachsen mögen in jedem der beiden Räume als *Nebenachsen* bezeichnet werden. *Mittelpunkte* existieren nicht. Die Größen i_1, i_2 sollen die *Hauptinvarianten*, i_3, i_4 die *Nebeninvarianten* heißen.

Trägt man wie im Falle I die Werte der X_i, X'_i aus (3) in (5) ein und vergleicht die Koeffizienten der entstehenden Bilinearform mit den Koeffizienten der Form $\sum a_{ik} x_i x'_k$, so erhält man das System von Gleichungen

$$(20) \quad \begin{aligned} a_{11} &= i_1 l'_1 l'_1 + i_2 l'_2 l'_2, & a_{21} &= i_1 l'_1 m'_1 + i_2 l'_2 m'_2, & a_{31} &= i_1 l'_1 n'_1 + i_2 l'_2 n'_2, \\ a_{12} &= i_1 m'_1 l'_1 + i_2 m'_2 l'_2, & a_{22} &= i_1 m'_1 m'_1 + i_2 m'_2 m'_2, & a_{32} &= i_1 m'_1 n'_1 + i_2 m'_2 n'_2, \\ a_{13} &= i_1 n'_1 l'_1 + i_2 n'_2 l'_2, & a_{23} &= i_1 n'_1 m'_1 + i_2 n'_2 m'_2, & a_{33} &= i_1 n'_1 n'_1 + i_2 n'_2 n'_2, \end{aligned}$$

$$(21) \quad \begin{aligned} a_{14} &= i_1 l'_1 X'_{10} + i_2 l'_2 X'_{20} + i_3 l'_3, & a_{41} &= i_1 l_1 X'_{10} + i_2 l_2 X'_{20} + i_4 l_3, \\ a_{24} &= i_1 m'_1 X'_{10} + i_2 m'_2 X'_{20} + i_3 m'_3, & a_{42} &= i_1 m_1 X'_{10} + i_2 m_2 X'_{20} + i_4 m_3, \\ a_{34} &= i_1 n'_1 X'_{10} + i_2 n'_2 X'_{20} + i_3 n'_3, & a_{43} &= i_1 n_1 X'_{10} + i_2 n_2 X'_{20} + i_4 n_3; \end{aligned}$$

$$(22) \quad a_{44} = i_1 X_{10} X'_{10} + i_2 X_{20} X'_{20} + i_3 X'_{30} + i_4 X_{30}.$$

Die drei ersten Gleichungen in (20) sind linear in $i_1 l'_1, i_2 l'_2$, die mittleren in $i_1 m'_1, i_2 m'_2$ und die letzten in $i_1 n'_1, i_2 n'_2$; sollen diese verträglich sein, so müssen die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & l_1 & l_2 \\ a_{12} & m_1 & m_2 \\ a_{13} & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & l_1 & l_2 \\ a_{22} & m_1 & m_2 \\ a_{23} & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{31} & l_1 & l_2 \\ a_{32} & m_1 & m_2 \\ a_{33} & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

sein. Die Minoren der Elemente der ersten Spalten sind aber l_3, m_3, n_3 und die vorhergehenden Gleichungen lauten also

$$(23) \quad a_{k1} l_3 + a_{k2} m_3 + a_{k3} n_3 = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Da A_{44} den Rang 2 hat, so bestimmen sich aus (23) die *Richtungskosinus* l_3, m_3, n_3 der *Hauptachse* in R . Ersetzt man a_{ki} durch a_{ik} und

l_3, m_3, n_3 durch l'_3, m'_3, n'_3 , so erhält man aus (23) die Gleichungen, welche die *Richtungskosinus der Hauptachse in R'* bestimmen. Nun bilde man wie in I gemäß (8) und (20) die Gleichungen

$$(24) \quad \begin{aligned} b_{11} &= i_1^2 l_1^2 + i_2^2 l_2^2, & b_{31} &= i_1^2 m_1 l_1 + i_2^2 m_2 l_2, & b_{31} &= i_1^2 n_1 l_1 + i_2^2 n_2 l_2, \\ b_{12} &= i_1^2 l_1 m_1 + i_2^2 l_2 m_2, & b_{22} &= i_1^2 m_1^2 + i_2^2 m_2^2, & b_{32} &= i_1^2 n_1 m_1 + i_2^2 n_2 m_2, \\ b_{13} &= i_1^2 l_1 n_1 + i_2^2 l_2 n_2, & b_{23} &= i_1^2 m_1 n_1 + i_2^2 m_2 n_2, & b_{33} &= i_1^2 n_1^2 + i_2^2 n_2^2; \end{aligned}$$

sowie die entsprechenden Gleichungen in $b'_{ik}, l'_i, m'_i, n'_i$. Wie in I, so leitet man aus (24) ab

$$(25) \quad \begin{aligned} (b_{11} - i_k^2) l_k + b_{13} m_k + b_{13} n_k &= 0, \\ b_{21} l_k + (b_{22} - i_k^2) m_k + b_{33} n_k &= 0, \\ b_{31} l_k + b_{32} m_k + (b_{33} - i_k^2) n_k &= 0. \end{aligned} \quad (k=1, 2)$$

Daraus folgt, daß die *Quadrate der Hauptinvarianten i_1 und i_2* die Wurzeln der *Hauptachsengleichung*

$$(26) \quad \begin{vmatrix} b_{11} - i^2 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - i^2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - i^2 \end{vmatrix} = 0$$

sind. Diese besitzt *reelle, positive* Wurzeln. Die dritte Wurzel ist $= 0$, da $|b_{ik}| = A_{44}^2 = 0$ ist. Aus (25) bestimmen sich die *Richtungskosinus der Nebenachsen* und wenn man will auch die der Hauptachse für $i_k^2 = 0$. Denn multipliziert man die drei Gleichungen (23) der Reihe nach mit a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} ($i=1, 2, 3$) und addiert jedesmal, so ergibt sich (25) für $k=3$ und $i_k^2 = 0$. Die l_k, m_k, n_k sind so zu bestimmen, daß sie eine orthogonale Substitution der Determinante $+1$ bilden. Entsprechende Gleichungen erhält man für R' . Aus der Gleichung

$$-i_1 i_2 i_3 i_4 = \begin{vmatrix} i_1 l_1 & i_1 m_1 & i_1 n_1 & i_1 X_{10} \\ i_2 l_2 & i_2 m_2 & i_2 n_2 & i_2 X_{20} \\ i_3 l_3 & i_3 m_3 & i_3 n_3 & i_3 X_{30} \\ 0 & 0 & 0 & i_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l'_1 & m'_1 & n'_1 & X'_{10} \\ l'_2 & m'_2 & n'_2 & X'_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ l'_3 & m'_3 & n'_3 & X'_{30} \end{vmatrix},$$

in der die erste Determinante den Wert $i_1 i_2 i_3 i_4$, die zweite den Wert -1 besitzt, erhält man durch Multiplikation nach Spalten und mit Beachtung der Gleichungen (20) bis (22)

$$(27) \quad i_1 i_2 i_3 i_4 = -A.$$

Daraus kann geschlossen werden, daß alle Invarianten von Null verschieden sind. Besitzt also die Gl. (26) eine Doppelwurzel, so kann diese nicht gleich Null sein. Wie oben, so leitet man aus (20) die Gl. (12) ab, die aber jetzt nur für $k=1, 2$ gelten. Aus ihnen ergeben sich, nachdem die

positiven Richtungen der Nebenachsen gewählt sind, die *Hauptinvarianten* i_1, i_2 mit ganz bestimmten Vorzeichen. Man sieht auch umgekehrt ein, daß durch geeignete Festsetzung der positiven Richtungen der Achsen bewirkt werden kann, daß i_1 und i_2 beliebige Vorzeichen erhalten.

Aus den Gl. (21) erhält man jetzt

$$(28) \quad \begin{aligned} i_1 X_{10} &= a_{14} l'_1 + a_{24} m'_1 + a_{34} n'_1, & i_1 X'_{10} &= a_{11} l_1 + a_{12} m_1 + a_{13} n_1, \\ i_2 X_{20} &= a_{11} l'_2 + a_{21} m'_2 + a_{31} n'_2, & i_2 X'_{20} &= a_{41} l_2 + a_{42} m_2 + a_{43} n_2, \\ i_3 &= a_{14} l'_3 + a_{24} m'_3 + a_{34} n'_3, & i_4 &= a_{11} l_3 + a_{12} m_3 + a_{13} n_3. \end{aligned}$$

Aus diesen lassen sich $X_{10}, X_{20}, X'_{10}, X'_{20}, i_3$ und i_4 eindeutig bestimmen. Mit Hilfe der Gl. (23) und ihren entsprechenden ist es auch nicht schwer, die *Nebeninvarianten* i_3 und i_4 explizit durch die a_{ik} darzustellen. Es fehlen jetzt nur noch die Größen X_{30} und X'_{30} . Aus (22) ergibt sich

$$(29) \quad i_3 X'_{30} + i_4 X_{30} = a_{44} - (i_1 X_{10} X'_{10} + i_2 X_{20} X'_{20}).$$

Hier tritt eine Unbestimmtheit auf: Bestimmt man nämlich irgend zwei Zahlen X_{30}, X'_{30} , die (29) genügen, so ist diese Gleichung auch von $X_{30} + \varrho i_3, X'_{30} - \varrho i_4$ befriedigt, wo ϱ beliebig bleibt. Dies geht auch aus (19) unmittelbar hervor; denn die Substitution

$$(30) \quad \begin{aligned} x_1 &= X_1, & x_2 &= X_2, & x_3 &= X_3 + \varrho i_3 X_4, & x_4 &= X_4, \\ x'_1 &= X'_1, & x'_2 &= X'_2, & x'_3 &= X'_3 - \varrho i_4 X'_4, & x'_4 &= X'_4, \end{aligned}$$

wo ϱ beliebig ist, transformiert die bilineare Gleichung (19) in sich. Dies hat eine merkwürdige Konsequenz: Die Gleichungen (30) bedeuten Translationen der Koordinatensysteme parallel zu den Hauptachsen. Ist also P ein Punkt von R , Π' die ihm entsprechende Ebene in R' , so verschiebe man P in der Richtung der Hauptachse um den Betrag ϱi_3 bis S , zugleich übe man auf Π' in R' eine Translation parallel zur Hauptachse in R' im Betrag $-\varrho i_4$ aus, so daß Π' nach Σ' gelangt, dann entspricht dem Punkt S in R die Ebene Σ' in R' . Die parabolische Korrelation zeigt also einen *translatorischen* Charakter. Dies erinnert an das Nullsystem. In der Tat wird sich sogleich zeigen, daß die Räume in die Lage eines Nullsystems gebracht werden können, wenn $i_1^2 = i_2^2, i_3^2 = i_4^2$ und $A > 0$ ist.

Wie bei den zentralen Korrelationen, so ist auch hier zu bemerken, daß für $a_{ik} = a_{ki}$ das hier behandelte Problem nichts anderes ist als die Reduktion eines Paraboloids auf die Hauptebenen. Die Hauptebenen fallen in beiden Räumen zusammen (wenn x_i, x'_i in (1) auf dasselbe System bezogen werden) mit den Hauptebenen des Paraboloids $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ ($A_{44} = 0$), in bezug auf welches (1) eine polare Reziprozität definiert.

III. Unterklassen der parabolischen Korrelationen.

a) Rotatorische parabolische Korrelationen ($i_1^2 = i_2^2$).

Hat die *Hauptachsengleichung* (26) *zwei gleiche* Wurzeln, die dann nach dem Obigen von Null verschieden sind, so können die positiven Richtungen der Koordinatenachsen so festgelegt werden, daß die *Hauptinvarianten* i_1, i_2 selbst (nicht bloß ihre Quadrate) einander gleich sind. In diesem Falle wird die bilineare Gleichung (19), wie man leicht sieht, nicht geändert, wenn das Koordinatensystem in jedem der Räume um die Hauptachse um den beliebigen Winkel φ gedreht wird. Sind also Punkt P in R und Ebene Π' in R' entsprechende Elemente vor der Drehung und gehen sie durch die Drehung der Räume in S' bzw. S'' über, so sind auch dies entsprechende Elemente. Wir nennen die Korrelation *rotatorisch*. Es ist unmittelbar klar, welche Bedingungen die a_{ik} in (1) erfüllen müssen, damit die Korrelation parabolisch rotatorisch ist. Da nun auch entsprechende Translationen möglich sind, so zeigt eine derartige Korrelation *Schraubencharakter*. Tritt noch die Bedingung $i_3 = -i_4$ hinzu, so entspricht einer beliebigen Schraubung in R *dieselbe* Schraubung in R' : dann können die Räume in die Lage eines Nullsystems gebracht werden (s. unter d)).

b) Involutorische Korrelationen ($i_3^2 = i_4^2$).

Man kann fragen, welches die Bedingungen dafür sind, daß zwei durch parabolische Korrelation aufeinander bezogene Räume in polarreziproke Lage gebracht werden können. Zu diesem Zwecke beziehe man die Räume, die durch (19) reziprok aufeinander abgebildet sind, auf dasselbe Koordinatensystem. Jetzt verschiebe man den einen Raum beliebig gegen den anderen: sollen die Räume nunmehr in polarreziproker Lage sein, so muß die neue bilineare Gleichung, die aus (19) hervorgeht, symmetrisch sein. Führt man dies durch, so folgt $i_3^2 = i_4^2$. Mit Rücksicht auf die Raumverhältnisse der Zeitschrift unterdrücke ich den einfachen Beweis. Man kann annehmen, daß $i_3 = i_4$ ist; denn wäre $i_3 = -i_4$, so vertausche man i_3, i_4 mit $-i_3, -i_4$, was einer Umklappung des Raumes R um die X_1 -Achse entspricht, und es ist jetzt $i_3 = i_4$. Ist aber $i_3 = i_4$, so definiert (19) eine Polarverwandtschaft in bezug auf das *Paraboloid*

$$(31) \quad i_1 X_1^2 + i_2 X_2^2 + 2 i_3 X_3 X_4 = 0.$$

Die Räume befinden sich also in polarreziproker Lage. Wir nennen in diesem Falle die Korrelation *involutorisch*. Da die Räume noch durch Translation parallel zur Hauptachse gegeneinander verschoben werden können, so ist es auf unendlich viele Arten möglich, sie in polarreziproke

Lage zu bringen. Klappt man den einen Raum um die Hauptachse um den Winkel π um, so liegt er auch jetzt noch zum anderen Raum involutorisch. Die Ordnungsfläche hat jetzt aber die Gleichung

$$(32) \quad i_1 X_1^2 + i_2 X_2^2 - 2 i_3 X_3 X_4 = 0.$$

Auch in der neuen Lage können die Räume durch Translation gegeneinander verschoben werden, ohne daß die involutorische Lage zerstört wird. Es ist nicht schwer, die Beziehung $i_3^2 - i_4^2$ direkt in den a_{ik} anzuschreiben.

c) Die allgemeine parabolische Korrelation.

Ist $i_3^2 \neq i_4^2$, so ist es nach b) *nicht möglich, die Korrelation durch Polarität an einer Fläche zweiter Ordnung zu erzeugen*. Es fragt sich jetzt, wie zu einem Punkt P in R die entsprechende Ebene II' in R' zu konstruieren ist. Zu diesem Zwecke führe man für den Raum R die Ähnlichkeitstransformation

$$X_1 = i_3 \bar{X}_1, \quad X_2 = i_3 \bar{X}_2, \quad X_3 = i_3 \bar{X}_3, \quad X_4 = i_4 \bar{X}_4$$

aus, dann geht (19) über in

$$(33) \quad i_1 \bar{X}_1 X'_1 + i_2 \bar{X}_2 X'_2 + i_4 (\bar{X}_4 X'_3 + \bar{X}_3 X'_4) = 0.$$

Wird der transformierte Raum $\bar{R}$ und R' auf dasselbe System bezogen, so liegen sie jetzt involutarisch in bezug auf das Paraboloid

$$i_1 X_1^2 + i_2 X_2^2 + 2 i_4 X_3 X_4 = 0;$$

damit ist die gesuchte Konstruktion unmittelbar gegeben.

d) Die Nullkorrelation ($i_1^2 = i_2^2, i_3^2 = i_4^2, A > 0$).

Welches sind nun die Bedingungen dafür, daß zwei parabolisch korrelativ aufeinander bezogene Räume sich derart orientieren lassen, daß sie ein Nullsystem bilden? Man verfähre wie am Anfang von b); die neue bilineare Gleichung muß dann schiefssymmetrisch sein ($a_{ik} = -a_{ki}, a_{ii} = 0$). Man findet entweder $i_1 = i_2, i_3 = -i_4$ oder $i_1 = -i_2, i_3 = i_4$; auch hier möge der einfache Beweis unterdrückt werden. Beide Fälle sind nicht wesentlich verschieden; sie können nach (27) durch die gemeinsamen Bedingungen $i_1^2 = i_2^2, i_3^2 = i_4^2, A > 0$ charakterisiert werden. Setzen wir voraus, daß $i_1 = i_2, i_3 = -i_4$ ist, also die bilineare Gleichung (19)

$$(34) \quad X_1 X'_1 + X_2 X'_2 - \frac{i_4}{i_1} X_4 X'_3 + \frac{i_4}{i_1} X_3 X'_4 = 0$$

läutet, und setzt man

$$(35) \quad \frac{i_4}{i_1} = k,$$

so ist die korrelative Beziehung beider Räume gegeben durch die Gleichung

$$(36) \quad X_1 X'_1 + X_2 X'_2 - k X_4 X'_3 + k X_3 X'_4 = 0.$$

Wir beziehen jetzt die beiden Räume auf dasselbe Koordinatensystem und drehen den Raum R um die Hauptachse (X_3 -Achse) in positivem Sinne um $\frac{\pi}{2}$, so also, daß X_1, X_2 in $X_2, -X_1$ übergehen; dann lautet die Gleichung (36), welche die Abbildung der so orientierten Räume vermittelt,

$$(37) \quad X_2 X'_1 - X_1 X'_2 - k X_4 X'_3 + k X_3 X'_4 = 0.$$

Da jetzt die bilineare Gleichung *schiefsymmetrisch* ist, so ist durch (37) ein *Nullsystem* definiert. Damit ist erwiesen, daß die Bedingungen $i_1 = i_2, i_3 = -i_4$ hinreichend dafür sind, daß die bezogenen Räume in die Lage eines Nullsystems gebracht werden können. Man hätte den Raum R auch um $\frac{\pi}{2}$ im negativen Sinne um die Hauptachse drehen können und die Räume wären wieder in die Lage der Nullkorrelation gekommen. Man hätte eine Gleichung erhalten, die aus (37) durch Vertauschen von k mit $-k$ hervorgeht. Dies war nach bekannten Eigenschaften des Nullsystems vorauszusehen. Der *Parameter k des Nullsystems* (37), der durch (35) mit den Invarianten verknüpft ist, hat eine einfache geometrische Bedeutung. Sieht man in (37) X_i als feste Koordinaten, X'_i als veränderliche an, so stellt (37) die Nullebene des Punktes X_i dar; berechnet man ihren Neigungswinkel ϑ gegen die Hauptachse des Nullsystems (X_3 -Achse), so erhält man die bekannte Beziehung

$$(38) \quad r \operatorname{tg} \vartheta = k,$$

wo r der Abstand des Nullpunktes von der Hauptachse ist.

Die Bedingungen $i_1^2 = i_2^2, i_3^2 = i_4^2, A > 0$ für die Nullkorrelation drücken aus, daß die Nullkorrelation eine rotatorische, involutorische, parabolische Reziprozität mit positiver Determinante ist. Nach der gegebenen Klassifikation ist es evident, welche Beziehungen zwischen den Koeffizienten a_{ik} in (1) bestehen müssen, damit die durch (1) aufeinander bezogenen Räume in die Lage eines Nullsystems gebracht werden können. Auch der bekannte Schraubencharakter des Nullsystems („Strahlengewinde“) ist nach den allgemeinen Erörterungen von oben verständlich: Es ist dies eine Eigenschaft, die allen rotatorischen Korrelationen und nicht bloß dem Nullsystem zukommt.

Da die Bedingung $i_3^2 = i_4^2$ erfüllt ist, so muß es nach b) möglich sein, das Nullsystem durch Polarität an einem Paraboloid abzuleiten. Dies ist in der Tat der Fall: Ersetzt man nämlich in (37) X_1, X_2, X_3 der Reihe nach durch $X_2, X_1, -X_3$, so geht (37) in

$$(39) \quad X_1 X'_1 - X_2 X'_2 - k X_4 X'_3 - k X_3 X'_4 = 0$$

über, d. h. in die Gleichung der Polarebene in bezug auf das gleichseitig hyperbolische Paraboloid

$$(40) \quad X_1^2 - X_2^2 - 2k X_3 X_4 = 0.$$

Konstruiert man also in jedem Punkt P des Raumes in bezug auf das gleichseitige hyperbolische Paraboloid (40) die Polarebene Π' und dreht den Punkt um die Scheitelgerade $X_1 = X_2, X_3 = 0$ des Paraboloids um den Winkel π , so fällt der gedrehte Punkt in die Ebene Π' . Man erhält so ein Nullsystem mit dem Parameter k , dessen Achse die Paraboloidachse ist. Erfolgt die Drehung um die andere Scheitelgerade, so erhält man ein Nullsystem mit dem Parameter $-k$.

Dieser Satz, den Magnus⁴⁾ auf anderem Wege gefunden hat, und ebenso der folgende von Hauck⁵⁾ folgt mit notwendiger Konsequenz aus der gegebenen Theorie.

Da $i_1 = -i_2, i_3 = i_4$ die Bedingungen für das Nullsystem sind und durch eine Spiegelung an einer Koordinatenebene i_3 in $-i_3$ übergeführt werden kann, so ergibt sich, daß das Nullsystem auch durch Polarität an einem Rotationsparaboloid, verbunden mit einer Spiegelung, sich ableiten lassen muß. In der Tat, ersetzt man in (37) X_1, X_2, X_3 der Reihe nach durch $-X_2, X_1, -X_3$, so geht diese Gleichung in die Gleichung der Polarebene

$$(41) \quad X_1 X'_1 + X_2 X'_2 - k X_4 X'_3 - k X_3 X'_4 = 0$$

in bezug auf das Rotationsparaboloid

$$(42) \quad X_1^2 + X_2^2 - 2k X_3 X_4 = 0$$

über.

Konstruiert man also zu jedem Raumpunkt P in bezug auf das Rotationsparaboloid (42) die Polarebene Π' , dreht den Punkt P um die Rotationsachse in positivem Sinne um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ und spiegelt ihn dann an der Scheiteltangentialebene, so fällt der transformierte Punkt in die Ebene Π' , und man erhält so ein Nullsystem mit dem Parameter k . Wird die Drehung im negativen Sinne ausgeführt, so erhält man ein Nullsystem mit dem Parameter $-k$.

Übrigens läßt sich dies kürzer, als es bei Hauck geschieht, folgendermaßen rein geometrisch einsehen. Ist P ein Punkt, Π' seine Polarebene in bezug auf das Rotationsparaboloid, Q der Fußpunkt des Lotes von P

⁴⁾ L. J. Magnus, a. a. O. S. 320.

⁵⁾ G. Hauck, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 31 (1886), S. 362.

auf die Achse und S der Schnittpunkt von Π' mit der Achse, so ist unmittelbar zu sehen, daß $QO = OS$ ist, wo O der Scheitel des Paraboloids ist. Beachtet man noch, daß Π' auf der durch P gehenden Meridianebene senkrecht steht, so ist klar, daß der Punkt nach jener Drehung und Spiegelung in Π' fällt. Verschiebt man Π' parallel mit sich, so verschiebt sich P parallel zur Achse: daraus folgt die Translations-eigenschaft des Nullsystems und die Rotationseigenschaft, weil das Paraboloid eine Rotationsfläche ist. Damit ist ein elementarer Zugang zum Nullsystem und seinen wichtigsten Eigenschaften gegeben.

Stuttgart, den 14. Juni 1920.

(Eingegangen am 14. Juli 1920.)