**7. Bemerkungen zu der Arbeit des Hrn. Elmén
über elektrische Doppelbrechung
in Schwefelkohlenstoff bei niedrigem Potential;
von Walter König.**

Man kann nicht behaupten, daß die Versuche, die Konstante des Kerrschen Gesetzes der elektrischen Doppelbrechung ihrem absoluten Betrage nach für einen bestimmten Stoff zu ermitteln, bisher zu gut übereinstimmenden Ergebnissen geführt hätten. Für Schwefelkohlenstoff fand Hr. Quincke¹⁾ diese Konstante B für Natronlicht bei einer Sorte $= 3,28 \cdot 10^{-7}$, bei einer anderen Sorte $= 3,57 \cdot 10^{-7}$; Hr. Lemoine²⁾ fand B für rotes Licht zu $3,70 \cdot 10^{-7}$ und Hr. Blackwell³⁾ für Natriumlicht zu $3,57 \cdot 10^{-7}$. Aber die genannten Versuche haben doch durchaus die von Kerr aufgestellten Gesetzmäßigkeiten und damit die Konstanz des Faktors B bestätigt, und auch die Abweichungen der obigen Werte für B voneinander sind in Anbetracht der Verschiedenheit der Versuchsanordnungen und der Schwierigkeit der absoluten Messung der eingehenden Größen nicht derart, daß sie zu einem Zweifel an der Richtigkeit des Kerrschen Gesetzes Anlaß geben. Um so auffallender sind die Ergebnisse der Untersuchung, die Hr. Elmén vor einigen Jahren veröffentlicht hat.⁴⁾ Es ist ihm gelungen, mit Hilfe des äußerst empfindlichen elliptischen Kompensators von Brace die elektrische Doppelbrechung in Schwefelkohlenstoff bei niedrigen Potentialgradienten, bis zu 100 Volt/mm herunter, zu messen. Aber nach diesen Beobachtungen würde der Faktor B des Kerrschen Gesetzes keine Konstante sein, sondern bei niedrigen Werten des Potentialgefälles stark ansteigen. Daß dieses Resultat durchaus unwahrscheinlich ist,

1) G. Quincke, Wied. Ann. 19. p. 729. 1883.

2) V. Lemoine, Compt. rend. 122. p. 835. 1896.

3) H. L. Blackwell, Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences 41. p. 645. 1906.

4) G. W. Elmén, Ann. d. Phys. 16. p. 350. 1905.

darauf hat auch Hr. W. Voigt kürzlich hingewiesen.¹⁾ Inzwischen hat Hr. L. B. Morse nach einer kurzen Mitteilung²⁾ die Ergebnisse des Hrn. Elmén nicht bestätigt gefunden. Es dürfte unter diesen Umständen von Interesse sein, wenn man nachweisen könnte, daß das Ergebnis des Hrn. Elmén auf einer irrtümlichen Diskussion seiner Beobachtungen beruht, und daß eine andersartige Rechnung auch aus seinen Zahlen die Gültigkeit des Kerrschen Gesetzes und die Konstanz von B abzuleiten gestattet. Diesen Nachweis glaube ich im folgenden führen zu können.

Hr. Elmén hat seine Beobachtungen in der Weise diskutiert, daß er aus jeder Beobachtung nach der Gleichung

$$(1) \quad \Theta = \frac{45 \cdot l}{N} \cdot B \cdot \frac{P^2}{a^2}$$

die Größe B ausgerechnet hat. In dieser Gleichung bedeutet Θ den gemessenen Drehungswinkel des Kompensators, N die Ordnungszahl des Kompensators ($1:43,8$ für $\lambda = 560 \mu\mu$), l die Länge und a den Abstand der Kompensatorplatten und P die angelegte Potentialdifferenz in elektrostatischen Einheiten. Diese Art der Berechnung ergibt für B Werte, die z. B. in der Tab. 2 von $3,88 \cdot 10^{-7}$ für die höchste Potentialdifferenz ansteigen bis $7,09$ im Mittel für die beiden, sehr nahe gleichen niedrigsten Potentialwerte. Allein man kann die obige Gleichung auch in der Weise auf ihre Richtigkeit prüfen, daß man je zwei Beobachtungen miteinander kombiniert und B aus der Differenz der Werte nach der Gleichung berechnet:

$$(2) \quad \Theta_m - \Theta_n = \frac{45 \cdot l}{N} B \frac{P_m^2 - P_n^2}{a^2}.$$

Rechnet man in dieser Weise, so verschwindet die Veränderlichkeit von B und man erhält im ganzen Bereich der Beobachtungen nahezu konstante Werte (vgl. die Tabelle). Diese Tatsache besagt nichts anderes, als daß die Winkel Θ , die Hr. Elmén beobachtet hat, um einen konstanten Betrag vermindert werden müssen, um sie dem Kerrschen Gesetz in

1) W. Voigt, *Magneto- und Elektrooptik*, Leipzig 1908, p. 333.

2) L. B. Morse, *Phys. Rev.* 23. p. 252. 1906.

der Form der Gleichung (1) anzupassen, daß also die Beobachtungen dargestellt werden können durch die Gleichung

$$(3) \quad \Theta = \frac{45 \cdot l}{N} B \frac{P^2}{a^2} + \Theta_0.$$

In der Tat, wenn man das Verhältnis

$$\Theta / \frac{45 l P^2}{N a^2},$$

das Hr. Elmén als Wert von B betrachtet, und das ich mit B' bezeichnen will, aus dieser Gleichung berechnet, so erhält man

$$B' = B + \frac{N \cdot a^2 \cdot \Theta_0}{45 \cdot l \cdot P^2},$$

also einen Ausdruck, der nicht konstant ist, sondern mit abnehmendem P stark anwächst. Um die Zulässigkeit dieser Deutung der Elmén'schen Beobachtungen beurteilen zu können, ist es erforderlich, die Größe Θ_0 , also den konstanten Fehler, mit dem die Winkel Θ behaftet sein müßten, zu berechnen. Die Tabelle enthält die Berechnung sowohl von B als auch von Θ_0 aus 8 Kombinationen von je zwei Beobachtungen der Tab. 2 der Elmén'schen Arbeit. Dabei sind allerdings einzelne Gruppen nahe beieinander liegender Beobachtungen zunächst zu Mittelwerten vereinigt worden, mit Rücksicht auf die starken Schwankungen, die die beobachteten Winkelwerte, besonders bei niedrigen Potentialen, zeigen.

Tabelle

über die Berechnung von B und Θ_0 aus je zwei einzelnen Beobachtungen.

P_m in Volt	P_n	Θ_m	Θ_n	$B \times 10^7$		Θ_0
				nach (3)	nach (4)	
1365	245	11,65	0,62	3,84	4,05	0,27
1365	324	11,65	0,84	3,87	4,07	0,20
1365	543,5	11,65	1,98	3,89	4,07	0,16
1365	1019	11,65	6,525	3,91	4,05	0,08
1019	324	6,525	0,84	3,84	4,09	0,20
1019	543,5	6,525	1,98	3,86	4,08	0,17
543,5	324	1,98	0,84	3,76	4,14	0,13
543,5	245	1,98	0,62	3,65	4,05	0,19

Die Werte von Θ_0 schwanken zwischen $0,08^\circ$ und $0,27^\circ$ und gruppieren sich um den Mittelwert $0,175^\circ$ herum. Dieser Wert beträgt ein Drittel des kleinsten Wertes ($0,53^\circ$), der von Elmén überhaupt gemessen worden ist, und liegt erheblich unter der Grenze der Einstellungsgenauigkeit der Elmén'schen Messungen; denn nach Tab. 1 der Elmén'schen Arbeit liegen die einzelnen Kompensatorablesungen bis zu Beträgen von $23'$ bzw. $27'$, also $0,38^\circ$ bzw. $0,45^\circ$ auseinander, und das bei dem größten der überhaupt gemessenen Winkel; bei den kleinen Winkeln aber waren, wie Hr. Elmén selber angibt, die Beobachtungsfehler bedeutend, also gewiß größer als die oben angegebenen Grenzen. Danach dürfte also ein systematischer Fehler in den Θ -Werten von der Größe, wie sie erforderlich wäre, um die Beobachtungen mit dem Kerrschen Gesetz in Übereinstimmung zu bringen, wohl nicht ausgeschlossen erscheinen. Er könnte herrühren entweder von einem Fehler in der Nullpunktsjustierung des optischen Apparates¹⁾ oder — und das halte ich für das Wahrscheinlichere — von einer Doppelbrechung in den Deckgläsern des Flüssigkeits-troges, einem Effekt, der sich wegen seiner Kleinheit der direkten Beobachtung trotz der speziell daraufhin vorgenommenen Prüfung durchaus entzogen haben kann. Allerdings gibt Hr. Elmén an, daß er, um etwaige systematische Fehler zu eliminieren, den Apparat auseinandergenommen und unter anderen Verhältnissen wieder zusammengesetzt habe. Ob aber dabei auf einen Fehler der hier in Betracht gezogenen Art geachtet wurde, ist nicht ersichtlich. Vielleicht erscheint sogar die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß diese minimale Doppelbrechung, die stets einer Dehnung des Glases in Richtung der elektrischen Kraftlinien entsprach, durch Spannungen bedingt war, die in den dünnen Deckgläsern durch den Druck der in der Röhre befindlichen Flüssigkeit hervorgebracht wurden.

Hr. Elmén wirft statt dessen die Frage auf, ob das merkwürdige Ergebnis seiner Messungen durch Entstellung der Potentialwerte durch polarisationsartige Vorgänge an den Elektroden zu erklären wäre. Allein der Versuch, die Be-

1) Vgl. hierzu auch die Bemerkung, die Hr. W. Voigt an der früher genannten Stelle macht.

obachtungen durch eine Formel darzustellen, in der die Θ -Werte als richtig angenommen, die P -Werte dagegen mit einer Korrektur versehen würden, führt zu keiner Übereinstimmung mit den Beobachtungen, wenigstens nicht, wenn man an den P -Werten eine konstante Korrektur anzubringen versucht. Dagegen könnte man die Möglichkeit in Betracht ziehen, den Anschluß zwischen der Berechnung und der Beobachtung dadurch noch enger zu machen, daß man außer der Korrektur an den Θ -Werten auch noch eine solche an den P -Werten anbrächte. Denn es ist nicht zu leugnen, daß die in der obigen Tabelle zusammengestellten Werte für B noch einen, wenn auch geringfügigen Gang zeigen von entgegengesetzter Richtung wie derjenige der starken Veränderlichkeit von B bei der Elmén'schen Berechnung. Wenn man die Formel des Kerrschen Gesetzes in der Form schreibt

$$(4) \quad \Theta - \Theta_0 = \frac{45 \cdot l}{N} B \frac{(P - p)^2}{a^2},$$

so würde für B aus der Zusammenfassung je zweier Beobachtungen der Ausdruck folgen:

$$\begin{aligned} B &= \frac{(\Theta_m - \Theta_n) N a^2}{45 \cdot l \cdot (P_m^2 - P_n^2)} \left(1 + \frac{2p}{P_m + P_n} \right), \\ &= B_{m,n} \left(1 + \frac{2p}{P_m + P_n} \right), \end{aligned}$$

wobei die $B_{m,n}$ die in der 5. Spalte der Tabelle enthaltenen B -Werte bedeuten sollen. Berechnet man p aus der Kombination der beiden Extremwerte von $B_{m,n}$ (3,91 und 3,65), so erhält man für p den Wert 43,5 Volt und mit dieser Korrektur rückwärts berechnet, die in der letzten Spalte enthaltenen B -Werte, die nur noch zwischen 4,14 und 4,05 schwanken. Allein die Berechtigung einer so hohen Korrektur an den P -Werten ist doch höchst unwahrscheinlich. In Anbetracht der ziemlich beträchtlichen Unsicherheit der Beobachtungen Elmén's, wie sie aus den Schwankungen der beobachteten Θ -Werte für gleiche P -Werte ersichtlich ist — Schwankungen, die keineswegs immer den Temperaturschwankungen entsprechen —, dürfte die von mir aufgestellte Annahme eines sehr kleinen systematischen Fehlers in den Θ -Werten wohl ausreichen, um die Abweichungen vom Kerrschen Gesetze zu

erklären. Wie nahe sich bei dieser Annahme die Beobachtungen durch die Formel darstellen lassen, möge schließlich durch eine Kurvenzeichnung der gleichen Art, wie sie Hr.

Vergleichung der Berechnung mit den Beobachtungen.

Elmén in Fig. 4 seiner Arbeit benutzt hat, um die Abweichungen vom Kerrschen Gesetz zu veranschaulichen, gezeigt werden. Die Kurve ist unter Annahme von

$$\Theta_0 = 0,20^\circ \quad \text{und} \quad B = 3,76 \cdot 10^{-7}$$

berechnet. Die Beobachtungen der Tab. 2 von Elmén gruppieren sich gut um diese Kurve herum. Die Beobachtungen der Tab. 3 und 4 liegen unterhalb dieser Kurve, zeigen aber im übrigen das gleiche Verhalten. Aus einer Kombination der zwei ersten und der drei letzten Beobachtungen der Tab. 3 berechnet sich

$$\Theta_0 = 0,11^\circ \quad \text{und} \quad B = 3,65 \cdot 10^{-7},$$

und aus einer Kombination der zwei ersten Beobachtungen der Tab. 4 mit den beiden Werten für $P = 1017$ Volt der gleichen Tabelle ergibt sich

$$\Theta_0 = 0,30^\circ \quad \text{und} \quad B = 3,78 \cdot 10^{-7}.$$

Immer sind also die Werte der Korrektur Θ_0 so geringfügig, daß sie sich einer direkten Beobachtung stets entzogen haben

würden. Die B -Werte aber schließen sich bei dieser Art der Berechnung ziemlich gut an die Werte an, die von Lemoine ($3,70 \cdot 10^{-7}$) und von Blackwell ($3,59 \cdot 10^{-7}$) für B gefunden worden sind. Allerdings sind die Werte insofern nicht streng vergleichbar, als Lemoine mit rotem, Blackwell mit gelbem und Elmén mit grünem Licht beobachtet hat. Elmén hat in Tab. 5 seiner Arbeit auch Messungen für drei verschiedene Farben mitgeteilt. Werden diese in der oben angegebenen Weise berechnet, so erhält man für

$$\begin{array}{lll} \lambda = 620 & 540 & 490 \text{ } \mu\mu \\ B = 2,87 & 4,03 & 5,43 \cdot 10^{-7}. \end{array}$$

Die Werte von Lemoine und von Blackwell liegen oberhalb der hierdurch bestimmten Kurve. Andererseits aber liegen die Zahlen Elmén ganz beträchtlich über den Werten, die kürzlich Hr. C. F. Hagenow¹⁾ veröffentlicht hat. Aus seinen Beobachtungen folgt für die obigen λ -Werte

$$B = 2,66 \quad 3,20 \quad 3,68 \cdot 10^{-7}.$$

Diese Werte zeigen einen viel schwächeren Anstieg der Doppelbrechung mit abnehmender Wellenlänge, als die Werte Elmén's und sind ihrem absoluten Betrage nach niedriger als alle Werte, die bisher ermittelt wurden. Über diese weitgehenden Unterschiede in den jüngsten Arbeiten über elektrische Doppelbrechung können nur neue und noch sorgfältigere Untersuchungen entscheiden. Gegen die Richtigkeit des Kerrschen Gesetzes aber dürfte nach meiner Ansicht aus den Elmén'schen Beobachtungen ein Zweifel nicht hergeleitet werden.

Ich möchte zum Schluß darauf hinweisen, daß der vorliegende Fall, wenn die von mir angegebene Deutung der Beobachtungen als richtig angesehen werden kann, ein typisches Beispiel für eine häufiger vorkommende unzumutbare Diskussion von Beobachtungen ist. Wenn das an den Beobachtungen zu prüfende Gesetz die Form

$$y = a \cdot f(x)$$

hat, wobei a eine Konstante und $f(x)$ eine zugleich mit x verschwindende Funktion sein soll, so darf man aus der Inkonzanz

1) C. F. Hagenow, Phys. Rev. 27. p. 196. 1908.

des Verhältnisses $y/f(x)$ noch keineswegs den Schluß auf die Ungültigkeit des Gesetzes ziehen. Es bedarf vielmehr stets einer besonderen Untersuchung darüber, ob nicht außerordentlich geringfügige konstante Korrekturen an den y - oder x -Werten genügen, um die Abweichungen von dem Gesetze zu beseitigen. Ich habe schon früher einmal Gelegenheit gehabt, eine derartige irrtümliche Deutung von Beobachtungen in meiner Arbeit über den Magnetismus von Kristallen nachzuweisen.¹⁾ Die jener Arbeit beigegebenen Figg. 12 und 13 auf Taf. II des betreffenden Bandes der Annalen zeigen die Abweichungen von der Konstanz durch eine Kurve von genau dem gleichen Aussehen, wie die Kurve in Fig. 4 der Arbeit des Hrn. Elmén. Ein weiteres Beispiel bieten die Untersuchungen des Hrn. Bjerkén²⁾ über die Doppelbrechung von Gelatine. Hier wird das Verhältnis zwischen der Doppelbrechung und der Deformation bei einigen Versuchsreihen nicht konstant, sondern mit abnehmender Deformation wachsend gefunden und der Schluß daraus gezogen, daß sich ein allgemeines Gesetz für die Beziehung beider Größen nicht aufstellen lasse. Aber es genügt, statt der Beobachtungen selbst die Differenzen je zweier Beobachtungen zu vergleichen, um sehr nahe konstante Werte des Verhältnisses zwischen Doppelbrechung und Deformation zu erhalten. Die Inkonstanz erklärt sich also daraus, daß schon die ungedehnte Gelatine eine gewisse Doppelbrechung besaß. Daß in der Tat Doppelbrechung und Deformation einander proportional sind, hat später Hr. A. Leick³⁾ nachgewiesen und hat dabei in seiner Dissertation (jedoch nicht in dem in den Annalen veröffentlichten Auszug) auf die Möglichkeit aufmerksam gemacht, das abweichende Verhalten der Bjerkénschen Beobachtungen in der hier dargelegten Weise zu erklären. Als ein drittes Beispiel eines derartigen Falles dürften wohl die Beobachtungen der Hrn. Elmén anzusehen sein.

Gießen, Dezember 1908.

1) W. König, Wied. Ann. **31**. p. 296 ff. 1887.

2) P. v. Bjerkén, Wied. Ann. **43**. p. 812 u. 813. 1891.

3) A. Leick, Diss. Greifswald p. 29. 1903; Ann. d. Phys. **14**. p. 139. 1904.

(Eingegangen 23. Dezember 1908.)