SULLE ONDE SEMPLICI DI TIPO PERMANENTE E ROTAZIONALE ¹⁾.

NOTA DEL Prof. UMBERTO CISOTTI.

Si abbia un liquido pesante in equilibrio, in un canale rettilineo indefinito, a fondo orizzontale e a sponde verticali, parallele tra di loro.

Si immagini di turbare abbastanza poco l'equilibrio del liquido, di guisa che il pelo libero, prima perfettamente liscio, divenga ora leggermente increspato. Ciò si può ottenere, per es., mediante un opportuno getto istantaneo di aria sullo specchio libero. Si propaga allora nel canale un movimento ondulatorio che è stato oggetto di ricerche classiche.

Ordinariamente si ammette che il movimento abbia luogo per piani paralleli alle sponde, e sia *irrotazionale*. Ed è notoria la esistenza di una soluzione approssimata delle equazioni idrodinamiche, corrispondente a *onde progressive semplici*, di profilo sinusoidale ²⁾. In questa soluzione, la velocità c di propagazione dell'onda si esprime in funzione della sua lunghezza λ e della profondità media h [rapporto tra la portata apparente ³⁾ q e la velocità c] mediante la relazione di *Airy*:

$$(1) \quad c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{\lambda},$$

g essendo l'accelerazione di gravità.

Non mi sembra privo di interesse saggiare la esistenza, nello stesso ordine di approssimazione, di onde progressive

¹⁾ *R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*. Vol. XLVI, fasc. 16-17.

²⁾ Cfr. ad es. Lamb. « *Lehrbuch der Hydrodynamik* », (trad. tedesca). [Teubner, 1907, §§ 228-230].

³⁾ Cioè rispetto ad un osservatore che accompagna l'onda.

semplici, aventi ancora profilo sinussoideale, ma più generali di quelle studiate da *Airy*.

Ciò forma argomento della presente Nota.

Abbandonando l'ipotesi della irrotazionalità del moto ondoso, si trova appunto che esistono infiniti tipi di onde progressive sinussoideali, aventi carattere permanente e *rotazionale*

Per tutti il vortice risulta costante sia sopra ogni orizzontale, sia (a meno di quantità di ordine superiore) sul pelo libero. Si constata che

$$(II) \quad h = \frac{q}{c},$$

non rappresenta più, come nel caso irrotazionale, la profondità media del canale, cioè il valor medio delle altezze del pelo libero sul fondo, ma questa — H — è invece legata a quella dalla relazione:

$$(III) \quad H = h + \nu f(h),$$

essendo f una funzione arbitraria che caratterizza la distribuzione dei vortici e ν una costante infinitesima, pure arbitraria, che ne regola la intensità.

È pertanto opportuno di chiamare: h *profondità media fittizia*; H *profondità media reale*. Esse coincidono per le onde irrotazionali ($\nu = 0$).

È degna di rilievo la circostanza che continuano a valere tutti i risultati relativi alle onde irrotazionali, e in particolare la relazione (I), purchè h venga ovunque sostituita con H . Che se si vuole introdurre in (I), a mezzo di (III), la profondità media fittizia h , si ha la formula di *Airy* generalizzata:

$$(IV) \quad c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{\lambda} + g\nu f(h) \operatorname{sech}^2 \frac{2\pi h}{\lambda}.$$

§ 1.

Equazioni indefinite ridotte alla prima approssimazione.

Sieno: u^* la componente orizzontale (nel senso della propagazione dell'onda) della velocità in un punto P, v^* la componente verticale, ascendente.

Posto

$$(1) \quad \begin{cases} u^* = c u, \\ v^* = c v, \end{cases}$$

dove c è il valore assoluto della velocità di propagazione dell'onda, le quantità

$$u = \frac{u^*}{c}, \quad v = \frac{v^*}{c},$$

sono *puri numeri*, inquantochè entrambi sono rapporti di velocità.

Ammetterò che u e v e le loro derivate sieno quantità di primo ordine, con che si viene a tradurre in forma analitica la circostanza che la perturbazione del liquido è piccola.

Sia Oxy una coppia di assi, dotata della traslazione apparente della massa liquida, coll'asse Ox coincidente col fondo del canale e diretto nel senso opposto alla traslazione e l'asse Oy verticale ascendente. La velocità di propagazione del moto ondoso ha per componenti $-c, 0$.

Sieno ancora: g il valore assoluto dell'accelerazione di gravità; p il valore assoluto della pressione specifica in un punto generico.

Se si assume $=1$ la densità costante del liquido, le equazioni indefinite che legano $u^* = c u$, $v^* = c v$, p, g sono notoriamente, a meno di quantità di ordine superiore al primo:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} c \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ c \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - g, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Se si ammette che il moto perturbato abbia carattere permanente, rispetto agli assi mobili, è

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ciò posto le equazioni (2) divengono in definitiva:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial y} - g, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

§ 2.

Riduzione del sistema (3). — Integrale generale.

Si soddisfa, nel modo più generale, all'ultima delle equazioni (3), introducendo una funzione $\psi(x, y)$, e ponendo

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Se $f(y)$ designa una funzione arbitraria della sola y , e si indicano con $f'(y)$ e $f''(y)$ le sue derivate, prima e seconda, la eliminazione della pressione p tra le due prime di (3), porge l'equazione

$$(5) \quad \Delta \psi = \nu f''(y),$$

cui deve soddisfare la funzione $\psi(x, y)$. Con ν indico una costante arbitraria infinitesima, la quale serve a mettere in rilievo che la funzione ψ e le sue derivate vanno trattate come quantità di primo ordine.

Il sistema (3) risulta pertanto equivalente a quello costituito dalle equazioni (4), (5) e dalla seguente :

$$(6) \quad p = c^2 \left\{ -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \nu f'(y) \right\} - g y + \text{costante} ,$$

la quale definisce in ogni punto la pressione p , una volta che sia nota la funzione ψ e sia assegnata la f .

A norma di (1) e (4) la *funzione di corrente di Stokes* è

$$(7) \quad \psi^* = c \psi .$$

Ne segue, che le linee di corrente *assolute* hanno per equazioni

$$\psi = \text{costante} ;$$

mentre le linee di corrente *apparenti* (quali risultano cioè ad un osservatore dotato del moto degli assi Oxy) hanno le equazioni

$$(8) \quad y + \psi = \text{costante} .$$

L'integrale generale di (5) è

$$(9) \quad \psi(x, y) = \alpha A(x, y) + \nu f(y) ,$$

dove $A(x, y)$ rappresenta una funzione armonica arbitraria, ed α è una costante arbitraria infinitesima.

Facendo in (9) $\alpha = 0$, si ha la soluzione particolare

$$(10) \quad \psi = \nu f(y) .$$

Da questa, tenuto conto di (8), scende che il moto ad essa corrispondente dà luogo a linee di flusso apparenti che sono rette orizzontali, parallele al fondo del canale. Inoltre per la (10) stessa, la (6) diviene

$$(11) \quad p = -g y + \text{costante} ,$$

cioè la *pressione idrodinamica coincide colla pressione idrostatica* ¹⁾.

¹⁾ Cfr. Cisotti. « Moti di un liquido che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni ». [Rend. della R. Accademia dei Lincei, Serie V, Vol. XIX, pag. 373-376].

Il vortice

$$(12) \quad \omega = \frac{c}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{c}{2} \Delta_2 \psi = -\frac{c}{2} f''(y),$$

che è perpendicolare al piano del moto, ha valore costante sopra ogni linea di flusso.

§ 3.

Le onde irrotazionali di Airy. — Condizioni ai limiti.

Se si tratta, in particolare, di onde irrotazionali è

$$v = 0,$$

e si può, secondo *Airy*, attribuire a ψ l'espressione ¹⁾:

$$(13) \quad \psi(x, y) = \alpha A = 2\alpha \sinh \frac{2\pi y}{\lambda} \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + t \right);$$

la costante (infinitesima) α , a priori arbitraria, dipende dall'altezza dell'onda, β è una costante arbitraria e λ è la lunghezza d'onda.

La (13) soddisfa alla condizione relativa al fondo del canale:

$$(14) \quad \psi = 0 \quad \text{per} \quad y = 0;$$

e soddisfa inoltre alla condizione che riguarda il pelo libero:

$$(15) \quad p = \text{costante} \quad \text{per} \quad c(\psi + y) = q,$$

— q portata *apparente* della corrente — purchè, com'è ben noto, la velocità di propagazione c dell'onda sia legata alla sua lunghezza λ ed alla *profondità media del canale*

$$(16) \quad h = \frac{q}{c},$$

dalla relazione di *Airy*:

$$(17) \quad c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{\lambda}.$$

¹⁾ Cfr Lamb., l. c. § 230.

§ 4.

Le onde rotazionali.

Considero ora il moto più generale, definito dalla (8)

$$\psi(x, y) = \alpha A(x, y) + \nu f(y),$$

dove $A(x, y)$ ha l'espressione che risulta da (13).

Se si impone alla $f(y)$ di annullarsi per $y=0$, cioè che sia

$$(18) \quad f(0) = 0,$$

rimane soddisfatta la condizione (14) relativa al fondo del canale.

Cerchiamo ora di rendere soddisfatta la condizione (15) che si riferisce al pelo libero.

Converrà a tal uopo avere presenti le espressioni che assumono, nel caso attuale, la pressione p e la funzione di corrente ψ^* .

Da (6) per (9) e (13) si ha:

$$(19) \quad p = -\frac{4\pi\alpha c^2}{\lambda} \cosh \frac{2\pi y}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \rho\right) - gy + \text{costante}$$

mentre ora

$$(20) \quad \psi = e2\alpha \sinh \frac{2\pi y}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \rho\right) + \nu f(y).$$

Sia $y=H$ il livello medio; posto

$$(21) \quad y = H(1 + \eta),$$

ηH rappresenta, in ogni punto, il sopraelevamento [positivo verso l'alto, negativo verso il basso] del liquido dal livello medio, e quindi:

$$\eta = \frac{\eta H}{H},$$

è il rapporto fra detto sopraelevamento ed il livello medio H . Come si vede η è un *puro numero*, in quanto è rapporto di due lunghezze.

Sopra il pelo libero η è a ritenersi quantità di primo ordine. Si avrà pertanto, ivi:

$$\cosh \frac{2\pi y}{\lambda} = \cosh \frac{2\pi H}{\lambda} + 2\pi\eta \frac{H}{\lambda} \sinh \frac{2\pi H}{\lambda},$$

$$\sinh \frac{2\pi y}{\lambda} = \sinh \frac{2\pi H}{\lambda} + 2\pi\eta \frac{H}{\lambda} \cosh \frac{2\pi H}{\lambda},$$

$$f(y) = f(H) + \eta H f'(H).$$

Per queste possiamo ricavare da (19) e (20) le espressioni che spettano a p e a ψ^* rispettivamente sul pelo libero.

Si ottiene, a meno di quantità di ordine superiore:

$$(19) \quad p = -\frac{4\pi\alpha c^2}{\lambda} \cosh \frac{2\pi H}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \beta\right) - gy + \text{costante};$$

$$(20) \quad \psi = e2\alpha \sinh \frac{2\pi H}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \beta\right) + \nu f(H).$$

Ciò posto, si vede immediatamente che la condizione (15), relativa al pelo libero, è soddisfatta ponendo:

$$(22) \quad c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tgh} \frac{2\pi H}{\lambda},$$

mentre il pelo libero è, come nelle onde irrotazionali, sinusoidale, ed ha per equazione:

$$(23) \quad y = \frac{q}{c} - 2\alpha \sinh \frac{2\pi H}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \beta\right) + \nu f(H).$$

Posto, come in (16),

$$h = \frac{q}{c},$$

da (23) si ricava per la profondità media H , l'espressione definita dalla relazione funzionale:

$$(24) \quad H = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda y dx = h + \nu f(H).$$

La parte funzionale può farsi scomparire se si nota che risultando da (24) H somma di un termine finito $[h]$ e di un termine di primo ordine $[\nu f(H)]$ è — a meno di quantità di ordine superiore al primo —

$$\nu f(H) = \nu f(h);$$

allora alla (24) si può sostituire la seguente :

$$(25) \quad H = h + \nu f(h),$$

h — rapporto tra la portata apparente e la velocità di propagazione dell'onda — può chiamarsi *profondità media fittizia*; H — valor medio delle altezze del pelo libero sul fondo — è a dirsi *profondità media reale*. Da (25) risulta che, in generale, esse sono distinte; coincidono per le onde irrotazionali $[\nu = 0]$.

Per la (25), l'equazione (23) del pelo libero può scriversi :

$$(23') \quad y = H - 2\alpha \sinh \frac{2\pi H}{\lambda} \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \beta \right).$$

Concludendo : *alle onde rotazionali si possono applicare tutti i risultati relativi a quelle irrotazionali, purchè h venga sostituito con H .*

La formula (22) esprime la velocità di propagazione dell'onda mediante la profondità media reale H . Si può, a mezzo di (25), introdurre la profondità media fittizia h ed ottenere così la formula di *Airy* generalizzata.

Essendo, infatti, colla solita approssimazione :

$$\tanh \frac{2\pi G}{\lambda} = \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} + \nu \frac{2\pi f(h)}{\lambda} \operatorname{sech}^2 \frac{2\pi h}{\lambda},$$

la (22) può scriversi :

$$(22') \quad c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} + \nu g f(h) \operatorname{sech}^2 \frac{2\pi h}{\lambda},$$

che è appunto la formula annunciata.