**3. Über die lineare Differentialgleichung für
gekoppelte elektrische Schwingungen und die
Wurzeln der Gleichung vierten Grades;
von J. Sommer.**

Die Integration der linearen Differentialgleichung

$$a_0 \varphi'''' + a_1 \varphi''' + a_2 \varphi'' + a_3 \varphi' + a_4 \varphi = \psi(t),$$

welche exakt die kleinen Schwingungen und in erster Annäherung jede Art einfach gekoppelter Schwingungen darstellt, erfordert die Auflösung ihrer charakteristischen oder determinierenden Gleichung

$$f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

Man will nun aber gerne die im allgemeinen umständliche, exakte Berechnung der Wurzeln dieser Gleichung vermeiden, besonders wenn es sich zunächst bloß um die qualitative Beschreibung des Schwingungsvorganges handelt. Hierzu ist es ausreichend zu wissen, wie die Wurzeln der charakteristischen Gleichung hinsichtlich ihrer Realität und des Vorzeichens ihrer reellen Teile beschaffen sind, wozu man nur gewisse rationale Funktionen der Koeffizienten zu kennen braucht.

Die Frage nach der Gesamtzahl der reellen Wurzeln bzw. nach der Anzahl der reellen Wurzeln, welche innerhalb eines bestimmten Intervalles liegen, ist sogar für Gleichungen beliebigen Grades durch den Lehrsatz von J. K. Fr. Sturm in der Theorie vollständig lösbar und ist speziell für Gleichungen vierten Grades noch leicht zu beantworten. Nach Sturm hat Ch. Hermite neue Hilfsmittel zur Beantwortung dieser Frage nach der Anzahl reeller Wurzeln angegeben, wobei er von den Eigenschaften quadratischer Formen mit n veränderlichen Gebrauch machte. Ausgehend von diesem gleichen Gedanken, hat ferner Hr. A. Hurwitz¹⁾ die

1) A. Hurwitz, Math. Annal. **46**. p. 273 f. Leipzig 1895.

Bedingungen aufgestellt, unter welchen eine Gleichung n ten Grades nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. Hr. Hurwitz löste die hiermit gestellte Aufgabe in elegantester Weise unter Verwendung des Cauchyschen Residuensatzes, also mit den Hilfsmitteln der höheren Analysis.

Wenn es danach auch nicht mehr schwer ist, alle Bedingungen aufzustellen, durch welche sich die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades, nach Realität und des Vorzeichens ihres reellen Teiles, vollkommen charakterisieren lassen, so glaubte ich doch, dem Physiker und Techniker einen Dienst zu erweisen mit einer Zusammenstellung dieser Bedingungen und ihrer elementaren Ableitung. So ist aus solchem Wunsche, der mir persönlich schon oft entgegentrat, die nachfolgende Zusammenstellung entstanden.

Eine solche Zusammenstellung ist insbesondere dann notwendig, wenn es gilt, die Konstanten zu ermitteln, für welche zum voraus bestimmte Schwingungstypen sich ergeben, oder wenn, anders ausgedrückt, die Beschaffenheit der Wurzeln der charakteristischen Gleichung vorgeschrieben ist.

In einem letzten Paragraphen habe ich dann die Anwendung dieser Bedingungen auf die Integration der verkürzten Differentialgleichung ohne zweites Glied

$$a_0 \varphi'''' + a_1 \varphi''' + a_2 \varphi'' + a_3 \varphi' + a_4 \varphi = 0$$

gemacht, indem ich in einigen Bildern die wichtigsten Kurventypen zeichnete, welche durch die Differentialgleichung dargestellt sind, oder indem ich wenigstens angab, wie diese Bilder leicht zu zeichnen sind.

§ 1. Realitätsbedingungen für die Wurzeln der Gleichung vierten Grades.

Im folgenden sollen stets a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 reelle, gegebene Zahlenkoeffizienten bezeichnen, und insbesondere soll a_0 durchgehend eine positive GröÙe bedeuten $a_0 > 0$, indem dies keinerlei Beschränkung der Allgemeinheit ist.

Nun sei

$$(1) \quad f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

und

$$f_1(x) \equiv f'(x) = 4 a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 2 a_2 x + a_3,$$

dann dividiere man $f(x)$ durch $f_1(x)$, nenne den Quotienten $q_1(x)$ und den Rest, nachdem man vorher darin die Vorzeichen sämtlicher Koeffizienten in das entgegengesetzte Vorzeichen umgewandelt hat, $f_2(x)$, so daß

$$f(x) = q_1(x) f_1(x) - f_2(x)$$

wird, und setze dieses Divisionsverfahren so lange fort

$$f_1(x) = q_2(x) f_2(x) - f_3(x)$$

$$f_2(x) = q_3(x) f_3(x) - f_4,$$

bis man auf einen von x unabhängigen konstanten Rest f_4 kommt; alsdann bilden die Funktionen

$$(2) \quad f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4$$

eine Sturmsche Kette und der Satz von Sturm, auf dem unsere Entwicklungen aufgebaut sind, lautet folgendermaßen:

Die Gleichung $f(x) = 0$ besitzt so viele reelle Wurzeln in dem Intervall zwischen zwei reellen Zahlen x_1 und $x_2 > x_1$, als der Überschuß der Anzahl der Zeichenwechsel in der Sturmischen Kette (2) für $x = x_1$ über die Anzahl der Zeichenwechsel dieser Kette für $x = x_2$ beträgt.

Das oben beschriebene Divisionsverfahren ist für die bi-quadratische Funktion $f(x)$ noch leicht ausführbar und liefert außer $f(x)$ und $f_1(x)$ noch die Funktionen der Kette (2):

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} f_2(x) &= \frac{-1}{16a_0} \{ (8a_0a_2 - 3a_1^2)x^2 + (12a_0a_3 - 2a_1a_2)x \\ &\quad + (16a_0a_4 - a_1a_3) \} \\ &\equiv \frac{-1}{16a_0} \{ b_0x^2 + b_1x + b_2 \}, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} f_3(x) &= -\frac{16a_0}{b_0^2} \{ (-2a_1^2a_2^2 + 6a_1^3 - 28a_0a_1a_2a_3 + 12a_0a_1^2a_4 \\ &\quad + 8a_0a_2^3 - 32a_0^2a_2a_4 + 36a_0^3a_3^2)x + (-a_1^3a_2a_3 \\ &\quad + 9a_1^3a_4 - 32a_0a_1a_2a_4 - 3a_0a_1a_3^2 + 4a_0a_2^2a_3 \\ &\quad + 48a_0^2a_3^2a_4) \} \\ &\equiv -\frac{1}{b_0^2} \{ c_0x + c_1 \} \equiv -\frac{1}{b_0^2} \{ (b_0(2a_2b_0 - 3a_1b_1) \\ &\quad - 4a_0(b_0b_2 - b_1^2))x + b_0(a_3b_0 - 3a_1b_2) + 4a_0b_1b_2 \}, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} f_4 &= \frac{16a_0b_0^2}{27c_0^2} [4(a_2^3 - 3a_1a_3 + 12a_0a_4)^2 - (27a_1^2a_4 \\ &\quad + 27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 72a_0a_2a_4 - 9a_1a_3a_4)^2] \\ &\equiv \frac{1}{16a_0c_0^2} [b_0c_1^2 - b_1c_0c_1 + b_2c_0^2]. \end{aligned} \right.$$

Die letzte Größe ist also eine Konstante, nämlich eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 , und unterscheidet sich von der *Discriminante* D der Funktion $f(x)$ nur um einen konstanten, außerwesentlichen Faktor. Der Gleichförmigkeit halber will ich auch an Stelle und zu den vorübergehend eingeführten Bezeichnungen b_0, c_0 noch D_0 und D_1 schreiben, so daß hinfort gelten soll:

$$(3a) \quad D_1 = 8 a_0 a_2 - 3 a_1^2,$$

$$(4a) \quad \left\{ \begin{aligned} D_2 = & -2 a_1^2 a_2^2 + 6 a_1^3 a_3 - 28 a_0 a_1 a_2 a_3 + 12 a_0 a_1^2 a_4 \\ & + 8 a_0 a_2^3 - 32 a_0^2 a_2 a_4 + 36 a_0^2 a_3^2, \end{aligned} \right.$$

$$(5a) \quad \left\{ \begin{aligned} D_3 = 27 D = & 4(a_2^2 - 3 a_1 a_3 + 12 a_0 a_4)^3 - (27 a_1^2 a_4 \\ & + 27 a_0 a_3^2 + 2 a_2^3 - 72 a_0 a_2 a_4 - 9 a_1 a_2 a_3)^2. \end{aligned} \right.$$

Falls etwa schon $D_1 = 0$ ausfällt, so ist die oben angegebene Sturmsche Kette durch eine einfachere zu ersetzen, worauf wir unten zurückkommen. Zuerst sei $D_1 \neq 0$ vorausgesetzt.

Ist nun zunächst $D_3 = 0$, d. h. verschwindet die Discriminante der Funktion $f(x)$, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln, mindestens aber eine Doppelwurzel, und diese mehrfachen Wurzeln lassen sich bequem bestimmen. Es ist nämlich jeder m -fache Wurzelfaktor $(x - w)^m$ von $f(x)$ ein $(m - 1)$ -facher Faktor von $f_1(x)$ und daher erhält man alle mehrfachen Wurzeln, indem man den größten gemeinsamen Teiler der Funktionen $f(x)$ und $f_1(x)$ berechnet mit Hilfe des bereits beschriebenen Divisionsverfahrens. Dieser Teiler stimmt eben bis auf einen Zahlenfaktor mit einer der Funktionen in der Sturmschen Kette überein. Nach Absonderung dieses Teilers aus $f(x)$ sind dann die Wurzeln von $f(x) = 0$ ohne weiteres zu bestimmen, indem keine höheren Gleichungen als solche zweiten Grades aufzulösen sind.

Ist $D \neq 0$, so hat $f(x) = 0$ nur einfache Wurzeln, und wir können dann den Satz von Sturm anwenden auf ein Intervall, in dem die sämtlichen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen. Da nun für hinreichend große absolute Beträge von x die Vorzeichen der Funktionen $f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ mit den Vorzeichen der Glieder ihrer höchsten Potenzen übereinstimmen, so setze man in verständlicher, abgekürzter Redeweise in der Sturmschen Kette die Werte $x_2 = +\infty$ und $x_1 = -\infty$, dann folgt, daß die Gleichung

$f(x) = 0$ so viele reelle verschiedene Wurzeln besitzt als der Überschuß der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der zweiten der nachstehenden Reihen über die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der ersten Reihe

$$(6) \quad +a_0, +a_0, -D_1, -D_2, D_3,$$

$$(6a) \quad +a_0, -a_0, -D_1, +D_2, D_3$$

beträgt, wo nun auch D statt D_3 gesetzt werden kann.

Die Größen D_1, D_2, D können positiv oder negativ sein, und je nach den verschiedenen Möglichkeiten erhält man für die Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ folgende Fälle:

(I) $D < 0$: zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln;

(IIa) $D > 0, D_1 > 0$: alle Wurzeln imaginär;

(IIb) $D > 0, D_1 < 0, D_2 > 0$: alle Wurzeln imaginär;

(IIc) $D > 0, D_1 < 0, D_2 < 0$: alle vier Wurzeln reell.¹⁾

Es ist hier der Ausdruck imaginär in dem allgemeineren Sinne — rein imaginär und komplex umfassend — zu verstehen, und natürlich treten diese imaginären Wurzeln paarweise konjugiert auf.

Die angeführten Bedingungen in den vier Fällen sind von einander unabhängig; denn zu jedem Falle lassen sich unschwer Beispiele konstruieren. Ferner folgt aus dem Sturmschen Satz u. a., daß nicht gleichzeitig $D < 0, D_1 > 0, D_2 < 0$ sein kann.

Ganz leicht erledigt sich der Ausnahmefall, in dem $D_1 = 0$ ausfällt. Dann wird die Sturmsche Kette aus den Funktionen gebildet:

$$f(x); f_1(x); f_2(x) = -\frac{1}{16a_0} \{b_1 x + b_2\}; f_3 = \frac{64a_0}{b_1^3} D,$$

und für die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ hat man:

(I') $D < 0$: zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln,

(II') $D > 0$: alle Wurzeln imaginär.

1) Man vgl. z. B. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 1. 2. Aufl. p. 276 u. 297, Braunschweig 1898, wo die Bedingungen für den Fall $a_1 = 0$ angegeben sind.

Es fällt auf, daß die Gleichung $f(x) = 0$ stets imaginäre Wurzeln besitzen muß, wenn $D_1 = 0$ ist. Das ist auch verständlich, wenn man D_1 durch die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 dieser Gleichung ausdrückt:

$$D_1 = -a_0^2 \{ (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 \}.$$

Hiernach kann dieser Ausdruck nicht verschwinden, wenn alle Wurzeln reell sind, mit Ausnahme des hier ausgeschiedenen Falles, in dem $D = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ ist.

Falls endlich $D_2 = 0$ wird, $D_1 \neq 0$, so ist mit $D_1 > 0$ auch $D > 0$ und mit $D_1 < 0$ zugleich $D < 0$, so daß man für $D > 0$ wieder lauter imaginäre Wurzeln und für $D < 0$ zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln erhält.

§ 2. Die Vorzeichenbestimmung der Wurzeln.

Nach der Aufstellung der Bedingungen für die Realität der Wurzeln wollen wir nun diejenigen weiteren Bedingungen ermitteln, unter welchen die reellen Teile der Wurzeln entweder positiv oder negativ sind.

Hat $f(x) = 0$ zunächst rein imaginäre, von Null verschiedene Wurzeln $x = iw$, so ist

$$f(iw) = a_0 w^4 - a_2 w^2 + a_4 - i(a_1 w^3 - a_3 w) = 0,$$

weshalb gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 w^4 - a_2 w^2 + a_4 &= 0 \\ a_1 w^2 - a_3 &= 0 \end{aligned}$$

für ein reelles w erfüllt sein müssen, Das ist nur möglich, wenn

$$\Delta = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 = 0$$

wird. Diese Bedingung ist notwendig und ist durch einige naheliegende weitere Bedingungen über a_1, a_3 und a_0, a_2, a_4 zu einer hinreichenden Bedingung zu ergänzen. Wir können diesen Fall als erledigt ansehen.

Die weitere Diskussion ist besonders einfach, wenn alle Wurzeln reell sind, indem dann allein schon die Descartes'sche Zeichenregel eine Entscheidung über die Anzahl positiver und negativer Wurzeln liefert. Diese Regel lautet:

Vermindert man die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der aufeinanderfolgenden Koeffizienten der Funktion $f(x)$

— bzw. $f(-x)$ — um die Anzahl der reellen positiven — bzw. negativen — Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, so ist die Differenz Null, oder eine gerade ganze Zahl.

Um aber im Falle komplexer Wurzeln auch das Vorzeichen der reellen Teile bestimmen zu können, brauchen wir außerdem noch eine Funktion der Wurzeln von $f(x) = 0$, in welcher diese reellen Teile selbständig auftreten. Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die vier Wurzeln, so leistet dies die symmetrische Funktion:

(1) $\Pi = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$, welche sich rational und ganz durch die Koeffizienten der Funktion $f(x)$ ausdrücken läßt, indem die Umrechnung ergibt:

$$(2) \quad \Pi = \frac{1}{a_0^3} (a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2) = \frac{\Delta}{a_0^3}.$$

Da $a_0 > 0$ vorausgesetzt ist, so hat Π immer gleiches Vorzeichen mit ihrem wesentlichen Faktor

$$(3) \quad \Delta = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2.$$

Wenn $f(x) = 0$ zwei reelle Wurzeln, etwa x_1 und x_2 , und ferner zwei komplexe Wurzeln hat, welche mit

$$x_3, x_4 = \varrho \pm i\sigma$$

bezeichnet werden mögen, so ist das Teilprodukt aus Π

$$(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4) = [(x_1 + \varrho)^2 + \sigma^2] [(x_2 + \varrho)^2 + \sigma^2] = k^2 > 0$$

reell und positiv, ferner

$$x_3 + x_4 = 2\varrho \quad \text{und} \quad x_1 + x_2,$$

reell, also

$$(4) \quad \Pi = 2k^2(x_1 + x_2)\varrho.$$

Neben diesem Ausdrucke, dessen Vorzeichen nur von dem von $x_1 + x_2$ und ϱ abhängt, hat man dann noch zur Verfügung:

$$(5) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (x_1 + x_2) + 2\varrho = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$(6) \quad x_1 x_2 x_3 x_4 = (x_1 x_2)(\varrho^2 + \sigma^2) = \frac{a_4}{a_0},$$

wonach, wegen $\varrho^2 + \sigma^2 > 0$, das Vorzeichen des Produktes in der letzten Gleichung nur von x_1 und x_2 abhängt.

Diese Beziehungen gestatten in mehreren Fällen schon die eindeutige Bestimmung der Vorzeichen von x_1, x_2, ϱ , oder liefern umgekehrt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für bestimmte Vorzeichen. Sind aber die Produkte $x_1 x_2$ und $(x_1 + x_2) \varrho$ zugleich negativ, so würde aus

$$(x_1 + x_2) + 2\varrho = -\frac{a_1}{a_0}$$

das Vorzeichen von ϱ noch nicht bestimmt sein; dann haben aber wieder

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

und ϱ gleiches Vorzeichen und man gelangt zu einer Entscheidung über das Vorzeichen von ϱ , indem man zu der Gleichung für die reziproken Wurzeln übergeht. In der Tat, setzt man $x = \frac{1}{\xi}$, so hat die Gleichung:

$$F(\xi) = \xi^4 f\left(\frac{1}{\xi}\right) = a_4 \xi^4 + a_3 \xi^3 + a_2 \xi^2 + a_1 \xi + a_0 = 0$$

die Wurzeln:

$$\xi_1 = \frac{1}{x_1}, \quad \xi_2 = \frac{1}{x_2}, \quad \xi_3, \xi_4 = \frac{\varrho \mp i\sigma}{\varrho^2 + \sigma^2}$$

und es wird:

$$(7) \quad \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) + \frac{2\varrho}{\varrho^2 + \sigma^2} = -\frac{a_3}{a_4},$$

welche Gleichung an Stelle der Gleichung

$$(x_1 + x_2) + 2\varrho = -\frac{a_1}{a_0}$$

tritt.

Natürlich könnte diese Gleichung auch in den anderen Fällen benutzt werden, oder wenigstens zur Aufstellung von Bedingungen führen, welche Folgerungen aus den übrigen sind und diese teilweise ersetzen können.

Sind endlich alle Wurzeln von $f(x) = 0$ komplex,

$$x_1, x_2 = \varrho_1 \pm i\sigma_1, \quad x_3, x_4 = \varrho_2 \pm i\sigma_2,$$

dann wird wieder:

$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_2 + x_3)(x_1 + x_4) = [(\varrho_1 + \varrho_2)^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2] \\ [(\varrho_1 + \varrho_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] = \kappa^2$$

reell und positiv und:

$$(8) \quad \Pi = 4 \kappa^2 : \varrho_1 \varrho_2.$$

Danach lassen sich die Vorzeichen der reellen Teile ϱ_1, ϱ_2 aus dem Vorzeichen von Π oder Δ sowie aus der Beziehung:

$$(9) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \varrho_1 + 2 \varrho_2$$

bestimmen.

Die Ergebnisse der eingehenden Diskussion fassen wir in drei Tabellen zusammen.

I. $a_0 > 0, D < 0$: zwei reelle und ein Paar komplexer Wurzeln.

Anzahl der reellen Wurzeln		Komplexe Wurzeln		Δ	Spezielle Bedingungen in den Koeffizienten
positive	negative	Reellteil positiv	Reellteil negativ		
0	2	0	1	> 0	$a_1 > 0, a_4 > 0 [a_3 > 0]$
2	0	1	0	> 0	$a_1 < 0, a_4 > 0 [a_3 < 0]$
{ 2 0	0	0	1	{ < 0	$a_4 > 0^1)$
	2	1	0		
1	1	0	1	> 0	$a_1 > 0, a_4 < 0$
				< 0	$a_4 < 0, a_3 < 0$
1	1	1	0	> 0	$a_1 < 0, a_4 < 0$
				< 0	$a_4 < 0, a_3 > 0$

Die wenigen eingeklammerten Bedingungen sind Folgen der übrigen.

IIa. $a_0 > 0, D > 0, D_1 > 0$ } zwei Paare komplexer Wurzeln.
 IIb. $a_0 > 0, D > 0, D_1 < 0, D_2 > 0$ }

Komplexe Wurzeln		Δ	Spezielle Bedingungen in den Koeffizienten
Reellteil pos.	Reellteil neg.		
1	1	< 0	keine
0	2	> 0	$a_1 > 0 [a_4 > 0, a_3 > 0]$
2	0	> 0	$a_1 < 0 [a_4 > 0, a_3 < 0]$

1) Die weitere Scheidung dieser Fälle, entweder an der speziellen Gleichung oder, etwas umständlicher, allgemein auf Grund des Sturm'schen Satzes, kann hier übergangen werden.

IIc. $a_0 > 0$, $D > 0$, $D_1 < 0$, $D_2 < 0$: alle Wurzeln reell.

Anzahl der Wurzeln		Spezielle Bedingungen in den Koeffizienten
positive	negative	
4	0	$a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0, a_4 > 0$ [$\Delta > 0$]
0	4	$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$ [$\Delta > 0$]
2	2	{entweder $a_1 a_3 < 0, a_2 > 0, a_4 > 0$ oder $a_2 < 0, a_4 > 0$
3	1	{entweder $a_1 < 0, a_3 a_4 < 0, a_2 < 0$ oder $a_1 a_2 < 0, a_3 > 0, a_4 < 0$
1	3	{entweder $a_1 > 0, a_3 a_4 > 0, a_2 < 0$ oder $a_1 a_2 > 0, a_3 < 0, a_4 < 0$

Natürlich ist es möglich, hieraus die Bedingungen auch nach anderen Gesichtspunkten geordnet zusammenzufassen. Frägt man z. B. nach den Bedingungen, unter welchen die Gleichung vierten Grades nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt, so erhält man als gemeinsamen Bestandteil der Fälle mit reellen und komplexen Wurzeln, in denen jene Forderung erfüllt ist, die Bedingungen:

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, \Delta > 0,$$

oder weil $\Delta = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4$ bei positivem a_3 und a_4 nur dann auch positiv ausfällt, wenn $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$, so erhält man die von Hrn. Hurwitz¹⁾ als notwendig und hinreichend aufgestellten Bedingungen:

$$a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, a_4 > 0.$$

Wie man sieht, gründet sich die Diskussion wesentlich auf die Werte der Größen D_1 , D_2 , D und Δ . Die Berechnung dieser Größen ist aber nicht mühsam und braucht nur so weit geführt zu werden, als die Ermittlung der Vorzeichen es erfordert.

Die Ausdehnung der elementaren Methoden auf Gleichungen höheren Grades und die Anwendung des Sturmschen Satzes nach unserer Fassung wäre dagegen mit großen praktischen Schwierigkeiten verknüpft, da die Rechnungen zu umfangreich werden.

1) A. Hurwitz, l. c. p. 275.

§ 8. Das Integral der Schwingungsgleichung.

Indem wir nun zu der geometrischen Darstellung des reellen allgemeinen Integrals der verkürzten linearen Differentialgleichung vierter Ordnung übergehen, wollen wir wie üblich

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{usw.}$$

setzen und die Differentialgleichung schreiben:

$$(1) \quad a_0 y'''' + a_1 y''' + a_2 y'' + a_3 y' + a_4 y = 0.$$

Macht man dann für das Integral den Ansatz $y = e^{rx}$, dann lautet die charakteristische Gleichung:

$$(2) \quad a_0 r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a_4 = 0,$$

mit den Wurzeln r_1, r_2, r_3, r_4 , so daß das allgemeine Integral jetzt die Form hat:

$$(3) \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + C_4 e^{r_4 x}.$$

Physikalisch sind die Fälle, ausgezeichnet, wo x, y gleichzeitig reelle stetige Veränderliche sind, in denen also die Gleichung (3) reelle ebene Kurven darstellt. Von der unendlichen Mannigfaltigkeit dieser Kurven kann man sich eine Vorstellung verschaffen, indem man zur Vereinfachung alle Typen zu einer Klasse vereinigt, welche durch Spiegelung an der x - oder y -Achse ineinander übergehen.

Die Gleichung (3) läßt sich auch für komplexe Wurzeln der charakteristischen Gleichung und passende Werte der Konstanten C in reeller Form darstellen, da man

$$e^{iz} = \cos x + i \sin x$$

setzen kann. Schreibt man die Wurzeln der Gleichung (2) r_1, r_2, r_3, r_4 , wenn alle vier reell sind, ferner

$$r_1, r_2, r_3 \mid r_4 = \kappa + i \lambda,$$

wenn zwei paarweise komplex sind, endlich $r_1, r_2 = \kappa' + i \lambda'$, $r_3, r_4 = \kappa'' + i \lambda''$, wenn alle Wurzeln komplex sind, so treten an die Stelle der alle Fälle umfassenden Gleichung (3) die folgenden Gleichungen in reeller Form:

$$(3') \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + C_4 e^{r_4 x},$$

$$(4) \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C e^{\kappa x} \sin(\lambda x + \varphi),$$

$$(5) \quad y = C_1 e^{\kappa' x} \sin(\lambda' x + \varphi') + C_2 e^{\kappa'' x} \sin(\lambda'' x + \varphi''),$$

worin $C_1, C_2, C_3, C_4, C, \varphi, \varphi', \varphi''$ reelle Integrationskonstante bedeuten.

Für die graphische Darstellung ist es praktisch, y als Summe von Aggregaten der Formen

$$(6) \quad y_1 = c' e^{r'x} + c'' e^{r''x}$$

oder

$$(7) \quad y_2 = c e^{\lambda x} \sin(\lambda x + \varphi)$$

aufzufassen, damit sich y als Summe von nur noch zwei Kurven mit den Gleichungen (6) bzw. (7) ergibt.

Es entspricht dies der Auffassung, daß y als Lösung einer Differentialgleichung für die *erzwungene* Schwingung

$$A_0 y'' + A_1 y' + A_2 y = F(x)$$

angesehen werden kann, worin $F(x)$ die spezielle Form besitzt: $c_1 e^{w_1 x} + c_2 e^{w_2 x}$, mit reellen oder komplexen Werten w_1, w_2 . Diese Auffassung hat auch einen naheliegenden physikalischen Sinn.

Die Gleichung $y_1 = c' e^{r'x} + c'' e^{r''x}$ liefert nur drei, wesentlich verschiedene, reelle Kurventypen. Entweder erinnert die

$$r' < 0 \quad r'' < 0 \quad c_1 > 0$$

Fig. 1.

$$r' > 0 \quad r'' < 0 \quad c_1 > 0 \quad c_2 > 0$$

Fig. 2.

durch diese Gleichung dargestellte Kurve an die einfache Exponentiallinie, eventuell mit einer in ihrem Zuge eingelegten einfachen Schwingung (vgl. Fig. 1), oder an die Kettenlinie (vgl. Fig. 2), oder endlich an die Tangenslinie (vgl. Fig. 3).

Die mit den Werten und Vorzeichen von c' und c'' veränderliche Orientierung und Lage dieser Kurven im Koordinatensystem kann für ihre Form außer acht gelassen werden.

Ferner liefert die zweite Gleichung $y_2 = c \cdot e^{rx} \sin(\lambda x + \varphi)$ als reelle Kurven: a) für $x = 0$ die Sinuslinie, b) für $x < 0$ das Bild der gedämpften Schwingung, wie es Fig. 4 zeigt, und c) für $x > 0$ eine Kurve, welche aus Fig. 4 durch eine Spiegelung an der y -Achse abgeleitet werden kann. Diese Figg. 1—4 stellen zugleich schematisch die reellen Lösungen der einfachen Schwingungsgleichung von der Form

$$A_0 y'' + A_1 y' + A_2 y = 0$$

dar. Aus ihnen setzen sich die reellen Lösungen der allgemeinen linearen Differentialgleichung (1) durch Summation zusammen.

$$\begin{aligned} r' &> 0 & r'' &< 0 \\ c_1 &> 0 & c_2 &< 0 \end{aligned}$$

Fig. 3.

$$x < 0 \quad \varphi = 0 \quad c > 0$$

Fig. 4.

Erfüllen die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung die Bedingungen I des vorhergehenden Paragraphen, so ist die Lösung der Gleichung (1) durch

$$(4) \quad y = C_1 e^{rx} + C_2 e^{rx} + C e^{rx} \sin(\lambda x + \varphi)$$

dargestellt, und es ist nun leicht, sich ein schematisches Bild von den reellen, durch die letzte Gleichung gelieferten Kurventypen zu verschaffen.

Man erhält diese Typen durch Addition der Kurve Fig. 4 und einer der Kurven Fig. 1—3 — bzw. dem Spiegelbilde derselben, sei es in Bezug auf die x -Achse oder auf die y -Achse —. Die Anschauung der hiernach möglichen Typen ist so einfach, daß eine Zeichnung überflüssig erscheint. Wenn $\kappa = 0$ ist, so erhält man eine, den einfachen Kurven Figg. 1—3 aufgesetzte gleichmäßig fortlaufende Schwingung. Wenn dagegen $\kappa \neq 0$ ist, so werden die aufgesetzten Schwingungen nach der einen Seite hin immer kleiner, und die resultierende Kurve schmiegt sich bei hinreichend großem, positivem oder negativem x für $\kappa < 0$ bzw. $\kappa > 0$ immer enger an jene einfachen Kurven der Figg. 1—3 an; während nach der entgegengesetzten Seite eine Schwingung mit unbegrenzt wachsender Amplitude der einfachen Kurve aufgesetzt ist.

Fig. 5.

Erfüllen nun zweitens die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung die Bedingungen IIa und IIb in § 2, so ist die allgemeine Lösung der Gleichung (1) von der Form

$$(5) \quad y = C_1 e^{\kappa' x} \sin(\lambda' x + \varphi') + C_2 e^{\kappa'' x} \sin(\lambda'' x + \varphi'')$$

und die reellen, in dieser Gleichung enthaltenen Kurven sind schematisch durch die Figg. 5 und 6 dargestellt.

Fig. 5 entspricht der speziellen Gleichung:

$$y = e^{-\frac{x}{3}} \sin \frac{5\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + e^{-\frac{x}{5}} \sin \frac{\pi}{2} x$$

und zeigt den Fall, in dem κ' und κ'' gleiches Vorzeichen besitzen, indem der Fall positiver κ aus der Zeichnung durch eine Spiegelung an der y -Achse hervorgeht. Man hat offenbar zwei sich aufeinander lagernde gedämpfte Schwingungen, so daß im ganzen der etwas verzerrte Verlauf einer gedämpften Schwingung mit ab- oder zunehmender Amplitude herauskommt, die aus einer kürzeren in eine längere Schwingungsperiode übergeht.

Die nächste Kurve, Fig. 6, stellt die Gleichung dar:

$$y = e^{-\frac{x}{3}} \sin \frac{5\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + e^{\frac{x}{5}} \sin \frac{\pi}{2} x$$

$$\begin{aligned} \kappa' < 0 \quad \kappa'' > 0 \quad \lambda' = \frac{5\pi}{2} \quad \lambda'' = \frac{\pi}{2} \\ C_1 > 0 \quad C_2 > 0 \quad \varphi' = -\frac{5\pi}{4} \quad \varphi'' = 0 \end{aligned}$$

Fig. 6.

und erläutert den Fall mit entgegengesetzten Vorzeichen der Dämpfungskonstanten κ' und κ'' . Die Kurve nähert sich mit wachsendem x immer mehr der Kurve

$$y = e^{\frac{x}{5}} \sin \frac{\pi}{2} x,$$

d. h. einer Sinuslinie mit ständig wachsender Amplitude und mit abnehmendem x der Kurve

$$y = e^{-\frac{x}{3}} \sin \frac{5\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right),$$

die ebenfalls eine Sinuslinie mit wachsender Amplitude ist. Man hat somit einen Übergang von einer abnehmenden Schwingung mit bestimmter Periode zu einer zunehmenden Schwingung mit anderer Periode.

Zwischen diesen beiden letzten Fällen liegt die Annahme $\kappa' = \kappa'' = 0$, die man sich als Übergang der Kurven in Figg. 5 und 6 leicht vorstellen kann. Es mag nur noch bemerkt werden, daß die Funktion $y = C_1 \sin(\lambda' x + \varphi') + C_2 \sin(\lambda'' x + \varphi'')$ im allgemeinen keine reelle Periode hat, nach der sie sich exakt wiederholt, sondern nur dann, wenn λ' und λ'' im Verhältnis zweier ganzer Zahlen zueinander stehen. Ist dann etwa $\lambda' : \lambda'' = g_1 : g_2$, oder $\lambda' = g_1 \lambda$ und $\lambda'' = g_2 \lambda$, so nimmt y wieder denselben Wert an, wenn x um $2\pi/\lambda$ oder ein beliebiges Vielfaches davon wächst. Bekanntlich kann man aber näherungsweise das Verhältnis zweier irrationaler Zahlen auf unendlich vielfache Weise durch das Verhältnis von zwei ganzen, immer größer werdenden Zahlen ersetzen; daher hat y praktisch, d. h. näherungsweise stets eine wohldefinierte kleinste Periode.

Erfüllen endlich die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung die Bedingungen IIc in § 2, so ist die Lösung der Gleichung (1) von der Form:

$$(3) \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + C_4 e^{r_4 x}.$$

Diese Form umfaßt reelle Kurventypen, welche durch die Figg. 1—3 wiederum und durch die Figg. 7—9 schematisch dargestellt sind, oder durch deren Spiegelbilder an der y -Achse bzw. x -Achse. Die Figg. 7—9 entsprechen speziell den Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= e^{-2x} + e^{-\frac{2}{5}x} - e^{-\frac{6}{5}x} - e^{-\frac{8}{5}x}, \\ 10y &= -3e^{-3x} + 23,22e^{-x} - 21,25e^{2x} + e^{5x}. \\ 10y &= e^{-3x} - 23,22e^{-x} - 10,62e^{2x} + \frac{1}{5}e^{5x}. \end{aligned}$$

Immer hat man es bei diesen Kurven mit einem aperiodischen Verlaufe zu tun, in den sich eine Schwingung einschieben kann. Indem man das Verhalten der Exponentialfunktion e^{rx} für unendliche x berücksichtigt, ist es sehr leicht, festzustellen, wie die Kurve ins Unendliche geht. Man schließt hiernach u. a.,

$$\begin{aligned} r_1 < 0 \quad r_2 < 0 \quad r_3 < 0 \quad r_4 < 0 \\ r_1 < r_4 < r_3 < r_2 \\ C_1 > 0 \quad C_2 > 0 \quad C_3 < 0 \quad C_4 < 0 \end{aligned}$$

Fig. 7.

$$\begin{aligned} r_1 < 0 \quad r_2 < 0 \quad r_3 > 0 \quad r_4 > 0 \\ C_1 < 0 \quad C_2 > 0 \quad C_3 < 0 \quad C_4 > 0 \\ r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \end{aligned}$$

Fig. 8.

daß die x -Achse Asymptote der Kurve sein kann für $x \rightarrow +\infty$, oder für $x \rightarrow -\infty$, aber nicht so, daß die Kurve in beiden Richtungen der Achse ins Unendliche geht. Besonders ist es aber für die Zeichnung der Kurve nützlich, zu wissen, wie viele und welche Extremwerte mit horizontaler Tangente die Kurve besitzt und wie oft sie die x -Achse schneidet. Dies verlangt immer die Bestimmung der endlichen reellen Wurzeln einer transzendenten Gleichung von der Gestalt:

$$\begin{aligned} F(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x} \\ + c_4 e^{r_4 x} = 0, \end{aligned}$$

mit reellen Koeffizienten c_i . Setzt man $u = e^x$, so ist u eine positive reelle Zahl und man hat also nur die von Null verschiedenen positiven reellen Wurzeln der Gleichung

$$\begin{aligned} r_1 < 0 \quad r_2 < 0 \quad r_3 > 0 \quad r_4 > 0 \\ C_1 < 0 \quad C_2 < 0 \quad C_3 < 0 \quad C_4 > 0 \\ r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \end{aligned}$$

Fig. 9.

$$f(u) = c_1 u^{r_1} + c_2 u^{r_2} + c_3 u^{r_3} + c_4 u^{r_4} = 0$$

zu bestimmen. Für eine schematische Zeichnung genügt es sogar, wenn man die *Anzahl* der reellen Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ bzw. der positiven Wurzeln der Gleichung $f(u) = 0$ kennt, und man kann jedenfalls leicht einsehen, daß die Zahl dieser Wurzeln keinesfalls größer sein kann als 3.

Um das zu beweisen, können wir zunächst voraussetzen, daß die Gleichung $f(u) = 0$ nur einfache Wurzeln besitzt, indem man dies allenfalls durch beliebige kleine Variationen der Koeffizienten c_i erreichen kann, ohne daß hierbei die Zahl der Wurzeln geändert würde. Sind nun weiter zuerst einmal r_i vier rationale Zahlen, so kann man in der Gleichung $f(u) = 0$ eine neue Veränderliche $w = u^e$ substituieren, daß man eine neue Gleichung

$$c' w^{e_1} + c'' w^{e_2} + c''' w^{e_3} + c'''' = 0$$

erhält, in der $e_1 > e_2 > e_3 > 0$ ganze rationale Exponenten sind. Diese Gleichung weist offenbar nie mehr als drei Zeichenwechsel auf und hat daher höchstens drei positive Wurzeln, woraus dasselbe für die Gleichung $f(u) = 0$ folgt. Danach hat auch die Gleichung $F(x) = 0$ höchstens drei reelle endliche Wurzeln.

Sind aber unter den Größen r_1, r_2, r_3, r_4 einige oder alle irrational, dann kann man jede derselben r_i in eine rationale Zahl r'_i und eine so kleine Zahl zerlegen, daß man $e^{r_i x} = e^{r'_i x} + \eta$ setzen kann, wo η so nahe an Null bleibt, als man will, und daß man in dem Ausdrucke $F(x) = \sum c_i e^{r_i x} + \varepsilon$ die Größe ε ebenfalls beliebig nahe an Null halten kann. Da nun $\sum c_i e^{r'_i x}$ in der Umgebung einer Nullstelle sowohl positive als negative Werte annimmt, deren absoluter Betrag größer als $|\varepsilon|$ gemacht werden kann, so hat $F(x) = 0$ so viele und höchstens so viele reelle Wurzeln als $\sum c_i e^{r'_i x} = 0$, nämlich drei.

Umgekehrt kann man für gegebene Werte r_i die Koeffizienten c_i stets so bestimmen, daß $F(x)$ für drei beliebig gewählte reelle Werte von x verschwindet.

Wie die Gestalt der Integrale der linearen Differentialgleichung sich ändert, wenn die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln aufweist, ist hinlänglich bekannt. Da auch die Gestalten der reellen Kurven für diesen Fall zwar Modifikationen der von uns beschriebenen Bilder verlangen, aber nichts wesentlich Neues bringen, so erübrigt sich eine besondere Besprechung dieser Ausnahmefälle.

(Eingegangen 24. Oktober 1918.)