Zur Theorie der linearen homogenen Differentialausdrücke.

Von

ALFRED LOEWY in Freiburg i./B.

In der Algebra gilt der Satz: Sind P und A teilerfremde ganze Funktionen und ist U eine derartige ganze Funktion, daß das Produkt UP durch A teilbar ist, so ist U durch A teilbar.

Das Analogon dieses Theorems in der Theorie der linearen homogenen Differentialausdrücke ist der

Satz I. Sind P und A teilerfremde lineare homogene Differentialausdrücke mit Koeffizienten aus dem der Betrachtung zugrundeliegenden Rationalitätsbereiche $\Sigma^*)$ und ist U ein derartiger linearer homogener Differentialausdruck mit Koeffizienten aus dem nämlichen Rationalitätsbereiche Σ , daß das symbolische Produkt UP durch A teilbar ist, so ist U durch A_1 teilbar; hierbei bedeutet A_1 einen linearen homogenen Differentialausdruck mit Koeffizienten aus Σ , der mit A von derselben Art ist. Anders und gleichzeitig präziser gefaßt: A_1 und A sind von derselben Ordnung und das symbolische Produkt $A_1 P$ ist durch A teilbar.

Satz I läßt sich erweitern zu

Satz II. P und A seien teilerfremde lineare homogene Differentialausdrücke mit Koeffizienten aus dem der Betrachtung zugrundeliegenden Rationalitätsbereich Σ , und der Differentialausdruck A lasse sich in das symbolische Produkt BC zerlegen, wobei B und C lineare homogene Differentialausdrücke mit Koeffizienten aus demselben Rationalitätsbereich Σ bedeuten. Ist U ein derartiger linearer homogener Differentialausdruck mit Koeffizienten aus demselben Rationalitätsbereich Σ , daß das symbolische Produkt UP durch $A = BC$ teilbar ist, so ist U durch ein symbolisches Produkt $A_1 = B_1 C_1$ teilbar; hierbei bedeuten B_1 und C_1 lineare homogene Differentialausdrücke

*) Der Rationalitätsbereich Σ soll ebenso wie in Math. Ann. 70, S. 550 definiert sein; alle im folgenden auftretenden Differentialausdrücke haben ausnahmslos Koeffizienten aus Σ .

mit Koeffizienten aus Σ , und es ist B_1 mit B , C_1 mit C , $B_1 C_1$ mit BC von derselben Art. Anders und gleichzeitig präziser: Es ist C_1 mit C , B_1 mit B gleicher Ordnung; ferner ist das Produkt $C_1 P$ durch C teilbar, d. h. es gibt einen linearen homogenen Differentialausdruck P_1 mit Koeffizienten aus Σ , sodaß $C_1 P = P_1 C$. Das Produkt $B_1 P_1$ ist durch B und das Produkt $B_1 C_1 P$ durch BC teilbar. Hierbei sind P und C , bez. P_1 und B , bez. P und BC teilerfremd.

§ 1 reproduziert einige bekannte Sätze, § 2 beweist die Sätze I und II. Im § 3 werden sie für die Zerlegung von linearen homogenen Differentialausdrücken in irreduzible Faktoren (Satz III) und in größte vollständig reduzible Faktoren (Satz IV) verwendet. Im § 4 wird der spezielle Fall behandelt, daß U und A die nämliche Ordnung besitzen; alsdann sind U und A Differentialausdrücke derselben Art, und man gewinnt die von mir in diesen Annalen 70, S. 550 gegebenen Sätze. Das dort auf S. 551 bewiesene Theorem I, der Spezialfall des obigen Satzes II, wird durch die vorliegende Note recht elementar bewiesen; hierdurch wird das frühere ziemlich komplizierte Beweisverfahren überflüssig gemacht.

§ 1.

Zwei lineare homogene Differentialausdrücke:

$$A \equiv a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x) y,$$

$$A_1 \equiv \bar{a}_0(x) \frac{d^n z}{dx^n} + \bar{a}_1(x) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + \bar{a}_n(x) z,$$

derselben Ordnung n mit Koeffizienten aus dem der Betrachtung zugrundeliegenden Rationalitätsbereich Σ heißen von derselben Art, wenn die Integrale der zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $A = 0$ und $A_1 = 0$ durch eine Beziehung:

$$(1) \quad z = p_0(x) y + p_1(x) \frac{dy}{dx} + \cdots + p_m(x) \frac{d^m y}{dx^m}$$

verknüpft sind, wobei $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$ Funktionen des Rationalitätsbereiches Σ bedeuten. Man kann in dem linearen homogenen Differentialausdruck

$$P \equiv p_0(x) y + p_1(x) \frac{dy}{dx} + \cdots + p_m(x) \frac{d^m y}{dx^m}$$

die Ordnung m , was keine Voraussetzung involviert, stets $\leq n - 1$ annehmen; denn sollte dies nicht von Anfang an der Fall sein, so bestimme man die zwei linearen homogenen Differentialausdrücke S und P' , sodaß $P = SA + P'$, wobei P' niedrigere Ordnung als A hat. Da A für die

Integrale von $A = 0$ verschwindet, so kann man die Funktion P durch P' ersetzen.

Sollen sich durch die Relation (1) alle Integrale von $A_1 = 0$ aus denjenigen von $A = 0$ ergeben, so dürfen, da $A = 0$ und $A_1 = 0$ die gleiche Ordnung haben, $P = 0$ und $A = 0$ keine Integrale gemeinsam haben, oder anders ausgedrückt: P und A müssen teilerfremd sein; denn anderenfalls würde man in $P(y_A)$, wenn y_A alle Integrale von $A = 0$ durchläuft, nicht genau n linear unabhängige Integrale von $A_1 = 0$ erhalten. Bildet man das symbolische Produkt $A_1 P$, so wird die homogene Differentialgleichung $A_1 P = 0$ wegen der Relation (1) durch alle Integrale von $A = 0$ befriedigt oder anders ausgedrückt: $A_1 P$ ist durch A teilbar.

Ist umgekehrt das Produkt $A_1 P$ durch A teilbar, so wird $A_1 = 0$ durch alle Funktionen $P(y_A)$ befriedigt, wenn y_A irgend ein Integral von $A = 0$ bedeutet. Werden ferner P und A als teilerfremd vorausgesetzt, d. h. haben $P = 0$ und $A = 0$ keine gemeinsamen Integrale, so enthält das Funktionensystem $P(y_A)$ genau ebensoviel linear unabhängige Integrale wie das Funktionensystem y_A . Wird schließlich noch angenommen, daß $A = 0$ und $A_1 = 0$ die nämliche Ordnung besitzen, so liefert das Funktionensystem $P(y_A)$ auch alle Integrale von $A_1 = 0$, wenn y_A alle Integrale von $A = 0$ durchläuft.

Hieraus ergibt sich das bereits von Herrn Heffter*) gefundene Resultat, das ich voraufgehend der leichteren Übersichtlichkeit wegen wiederholt habe:

Zwei lineare homogene Differentialausdrücke A und A_1 derselben Ordnung mit Koeffizienten aus dem der Betrachtung zugrundeliegenden Rationalitätsbereich Σ sind dann und nur dann von derselben Art, wenn ein linearer homogener Differentialausdruck P mit Koeffizienten aus Σ existiert, der zu A teilerfremd ist und für den das symbolische Produkt $A_1 P$ durch A teilbar ist.

Der Vollständigkeit wegen erwähnen wir noch, daß, wenn zwei lineare homogene Differentialausdrücke A und A_1 von derselben Art sind, dieses Verhältnis nach einem leicht herleitbaren, zuerst von L. Fuchs angegebenen Satz für A und A_1 symmetrisch ist. Mithin existiert auch ein zu P analoger linearer homogener Differentialausdruck Q mit Koeffizienten aus Σ , der zu A_1 teilerfremd ist und für den das symbolische Produkt $A Q$ durch A_1 teilbar ist.

*) Heffter, Über gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse, J. f. Math. 116, S. 163.

§ 2.

Der Beweis des Satzes I ergibt sich unmittelbar. Man bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache V der zwei nach Voraussetzung teilerfremden linearen homogenen Differentialausdrücke A und P . Da A und P teilerfremd sind, so ist die Ordnung von V gleich der Summe der Ordnungen von A und P .

Da V sowohl durch A als auch durch P teilbar ist, so existieren zwei lineare homogene Differentialausdrücke A_1 und P_1 mit Koeffizienten aus Σ , sodaß einerseits

$$V = A_1 P,$$

andererseits

$$V = P_1 A$$

wird.

Erstens ist $V = A_1 P$ durch A teilbar; denn V ist auch gleich $P_1 A$. Zweitens sind P und A teilerfremd. Drittens haben A_1 und A die gleiche Ordnung; denn die Ordnung von $V = A_1 P$ ist gleich der Summe der Ordnungen von A_1 und P und war, wie gezeigt, gleich der Summe der Ordnungen von A und P . Hieraus folgt nach dem Satz im § 1, daß A und A_1 von derselben Art sind.

Das Produkt UP ist durch P und nach Voraussetzung durch A teilbar; mithin ist UP auch durch das kleinste gemeinsame Vielfache V von A und P teilbar, d. h. es existiert ein linearer homogener Differentialausdruck U' mit Koeffizienten aus Σ , sodaß

$$UP = U' V$$

oder

$$UP = U' A_1 P.$$

Hieraus folgt, daß $U = U' A_1$, d. h. U ist durch A_1 teilbar.

Wir wenden uns nunmehr zum Beweise des Satzes II.

Das Produkt UP soll durch BC teilbar sein; mithin ist UP durch C teilbar. Nach Voraussetzung sind P und BC teilerfremd, folglich auch P und C ; denn hätten P und C einen gemeinsamen Teiler, so würden auch P und BC im Widerspruch mit der Voraussetzung einen solchen besitzen. Die linearen homogenen Differentialausdrücke UP und C erfüllen daher die Bedingungen des Satzes I. Mithin existiert ein linearer homogener Differentialausdruck C_1 mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereich Σ , der die gleiche Ordnung wie C hat, und für den $C_1 P$ durch C und U durch C_1 teilbar sind; C_1 und C sind von derselben Art. Es gibt also erstens einen linearen homogenen Differentialausdruck P_1 mit Koeffizienten aus Σ , sodaß

$$(1) \quad C_1 P = P_1 C,$$

und zweitens einen linearen homogenen Differentialausdruck U' mit Koeffizienten aus Σ , sodaß

$$(2) \quad U = U' C_1.$$

Aus (2) und (1) folgt $UP = U' C_1 P = U' P_1 C$. Nun ist $UP = U' P_1 C$ nach Voraussetzung durch BC , also $U' P_1$ durch B teilbar.

Wir zeigen noch, daß P_1 und B teilerfremd sind. Angenommen, es gäbe einen linearen homogenen Differentialausdruck $\bar{B}$ von erster oder höherer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ , sodaß

$$(3) \quad B = B' \bar{B}$$

und

$$(4) \quad P_1 = P_1' \bar{B}$$

wäre. Aus (1) und (4) würde $C_1 P = P_1' \bar{B} C$ folgen. P und $\bar{B} C$ sind teilerfremd; denn sonst hätten P und $BC = B' \bar{B} C$ im Widerspruch mit der Voraussetzung einen gemeinsamen Teiler. Mithin wäre, da $C_1 P$ durch $\bar{B} C$ teilbar ist, nach Satz I der Differentialausdruck C_1 durch einen Differentialausdruck teilbar, der mit $\bar{B} C$ von derselben Art ist; C_1 müßte also jedenfalls höherer Ordnung als C sein. Da C und C_1 aber als Differentialausdrücke derselben Art gleiche Ordnung besitzen, so ergibt sich aus diesem Widerspruch, daß unsere Annahme nicht zutrifft, also sind B und P_1 teilerfremd.

Da ferner $U' P_1$ durch B teilbar ist, läßt sich Satz I anwenden. Es gibt also einen Differentialausdruck B_1 mit Koeffizienten aus Σ von gleicher Ordnung wie B , der U' teilt, sodaß $B_1 P_1$ durch B teilbar ist und B und B_1 von derselben Art sind. Da U' durch B_1 teilbar ist, so gibt es einen linearen homogenen Differentialausdruck $\bar{U}$ mit Koeffizienten aus Σ , sodaß $U' = \bar{U} B_1$. Mithin wird nach (2) $U = \bar{U} B_1 C_1$, d. h. U ist durch $B_1 C_1$ teilbar. Da $B_1 P_1$ durch B teilbar ist, so ist $B_1 P_1 C = B_1 C_1 P$ durch BC teilbar; hieraus folgt, daß $B_1 C_1$ mit BC von derselben Art ist; denn $B_1 C_1$ und BC sind von gleicher Ordnung und P ist teilerfremd zu BC . Hiermit ist Satz II völlig bewiesen.

§ 3.

Der lineare homogene Differentialausdruck A sei in irreduzible Faktoren $A = Q_2 Q_{2-1} \cdots Q_1$ zerlegt. Sind P und A teilerfremd und ist UP durch A teilbar, so ergibt sich durch wiederholte Anwendung des Satzes II: Man kann einen linearen homogenen Differentialausdruck

$$A_1 = \bar{Q}_2 \bar{Q}_{2-1} \cdots \bar{Q}_1$$

herleiten, sodaß A_1 den linearen homogenen Differentialausdruck U teilt und stets zwei irreduzible lineare homogene Differentialausdrücke Q_i und

$\bar{Q}_i$ ($i=1, 2, \dots, \lambda$) mit gleichen Indices von derselben Art sind. Für $U = \bar{U} A_1$ sei $U = \bar{Q}_\tau \bar{Q}_{\tau-1} \dots \bar{Q}_{\lambda+1} \bar{Q}_\lambda \dots \bar{Q}_1$ eine Zerlegung in irreduzible Faktoren. U sei noch auf irgend eine Weise in irreduzible Faktoren zerlegt: $U = R_\tau R_{\tau-1} \dots R_1$. Nach einem früheren Satz von mir (Math. Ann. 56, S. 565 u. 62, S. 116) war dies nur derart möglich, daß sich die τ irreduziblen Differentialausdrücke $\bar{Q}_i$ ($i=1, 2, \dots, \tau$) und die τ irreduziblen Differentialausdrücke R_i ($i=1, 2, \dots, \tau$) einander in einer gewissen Reihenfolge eindeutig zuordnen lassen und zwei zugeordnete Differentialausdrücke immer von derselben Art sind. Da sich der gleiche Satz auch für die Zerlegung von A in irreduzible Faktoren anwenden läßt und zwei lineare homogene Differentialausdrücke, die mit einem dritten von derselben Art sind, es auch untereinander sind, so folgt

Satz III. *Es seien P und A zwei teilerfremde lineare homogene Differentialausdrücke; U sei irgend ein linearer homogener Differentialausdruck, sodaß das Produkt UP durch A teilbar ist. Zerlegt man A irgend wie in seine irreduziblen Faktoren $A = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \dots Q_1$ und U irgend wie in seine irreduziblen Faktoren $U = R_\tau R_{\tau-1} \dots R_1$, so lassen sich aus den $\tau \geq \lambda$ Differentialausdrücken $R_1, R_2, \dots, R_\tau$ stets λ auswählen und den Differentialausdrücken $Q_1, Q_2, \dots, Q_\lambda$ zuordnen, sodaß zwei zugeordnete Differentialausdrücke immer gegenseitig von derselben Art sind.*

Ein linearer homogener Differentialausdruck läßt sich auch in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegen (Math. Ann. 62, S. 112). $A = V_\varrho V_{\varrho-1} \dots V_1$ sei eine Zerlegung von A in größte vollständig reduzible Faktoren. Sind P und A teilerfremd, hingegen UP durch A teilbar, so gibt es, wie sich durch wiederholte Anwendung von Satz II ergibt, einen linearen homogenen Differentialausdruck A_1 , der U teilt und mit A von derselben Art ist; ferner läßt sich A_1 zerlegen in $A_1 = \bar{V}_\varrho \bar{V}_{\varrho-1} \dots \bar{V}_1$, wobei zwei lineare homogene Differentialausdrücke $\bar{V}_i$ und V_i mit gleichen Indices i ($i=1, 2, \dots, \varrho$) immer von derselben Art sind. Man überzeugt sich auch leicht, daß die Zerlegung von A_1 , nämlich $A_1 = \bar{V}_\varrho \bar{V}_{\varrho-1} \dots \bar{V}_1$, eine solche in größte vollständig reduzible Faktoren ist. Auch U sei in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt: $U = W_\tau W_{\tau-1} \dots W_1$. Da wir eine Zerlegung in größte vollständig reduzible Faktoren haben, ist W_1 der größte vollständig reduzible Differentialausdruck, der U teilt. U ist durch $A_1 = \bar{V}_\varrho \bar{V}_{\varrho-1} \dots \bar{V}_1$, also durch $\bar{V}_1$ teilbar. Weil A_1 in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt war, ist $\bar{V}_1$ ein vollständig reduzierbarer Differentialausdruck und muß daher als Teiler von U in dem größten vollständigen reduzierbaren Teiler von U , also in W_1 , aufgehen. Da W_1 durch $\bar{V}_1$ teilbar ist, ergibt sich eine Zerlegung $W_1 = L_1 \bar{V}_1$.

Nun teilt $A_1 = \bar{V}_\varrho \bar{V}_{\varrho-1} \dots \bar{V}_1$ den Differentialausdruck

$$U = W_\tau W_{\tau-1} \dots W_2 W_1 = W_\tau W_{\tau-1} \dots W_2 L_1 \bar{V}_1;$$

mithin teilt $\bar{V}_\varrho \bar{V}_{\varrho-1} \cdots \bar{V}_2$ den Differentialausdruck $W_\tau W_{\tau-1} \cdots W_2 L_1$. Die zwei Differentialausdrücke L_1 und $\bar{V}_\varrho \bar{V}_{\varrho-1} \cdots \bar{V}_2$ sind teilerfremd; denn hätten L_1 und $\bar{V}_\varrho \bar{V}_{\varrho-1} \cdots \bar{V}_2$ einen gemeinsamen Teiler T , so wäre, da W_1 vollständig reduzibel ist, nicht $\bar{V}_1$, sondern mindestens $T\bar{V}_1$ der größte vollständig reduzible Differentialausdruck, der A_1 teilt. Da $\bar{V}_\varrho \bar{V}_{\varrho-1} \cdots \bar{V}_2$ den Differentialausdruck $W_\tau W_{\tau-1} \cdots W_2 L_1$ teilt und mit L_1 teilerfremd ist, gibt es, wie durch wiederholte Anwendung von Satz II folgt, einen linearen homogenen Differentialausdruck $V'_\varrho V'_{\varrho-1} \cdots V'_2$, der $W_\tau W_{\tau-1} \cdots W_2$ teilt und mit $\bar{V}_\varrho \bar{V}_{\varrho-1} \cdots \bar{V}_2$ von derselben Art ist; dabei sind zwei lineare homogene Differentialausdrücke V'_i und $\bar{V}_i$ mit gleichen Indices $i (i=2, \dots, \varrho)$ immer von derselben Art. Da auch $\bar{V}_i$ und V_i ($i=1, 2, \dots, \varrho$) immer von derselben Art waren und zwei Differentialausdrücke, die mit einem dritten von derselben Art sind, es auch untereinander sind, so ist auch V_i stets mit V'_i ($i=2, 3, \dots, \varrho$) von derselben Art. $\bar{V}_\varrho \bar{V}_{\varrho-1} \cdots \bar{V}_2$ war eine Zerlegung in größte vollständig reduzible Faktoren; mithin trifft es auch für $V'_\varrho V'_{\varrho-1} \cdots V'_2$ zu. Nun ist $W_\varrho W_{\varrho-1} \cdots W_2$ durch $V'_\varrho V'_{\varrho-1} \cdots V'_2$, also durch V'_2 teilbar. W_2 ist der größte vollständig reduzible Differentialausdruck, der $W_\varrho W_{\varrho-1} \cdots W_2$ teilt; da aber V'_2 wegen der Zerlegung $V'_\varrho V'_{\varrho-1} \cdots V'_2$ in größte vollständig reduzible Faktoren vollständig reduzibel ist, so muß W_2 durch V'_2 teilbar sein. Es ergibt sich also eine Zerlegung $W_2 = L_2 V'_2$, wobei V'_2 mit V_2 von derselben Art ist. Bezeichnen wir der Symmetrie wegen $\bar{V}_1$ mit T_1 , V'_2 mit T_2 und setzen das obige Verfahren fort, so finden wir ϱ Differentialausdrücke $T_1, T_2, \dots, T_\varrho$, für die sich Zerlegungen $W_i = L_i T_i$ ($i=1, 2, \dots, \varrho$) ergeben, wobei T_i stets von derselben Art wie V_i ist. Wir erhalten daher den

Satz IV. *Es seien P und A zwei teilerfremde lineare homogene Differentialausdrücke; U sei irgend ein linearer homogener Differentialausdruck, sodaß das Produkt UP durch A teilbar ist. A sei irgendwie in seine größten vollständig reduziblen Faktoren zerlegt, $A = V_\varrho V_{\varrho-1} \cdots V_1$; ebenso sei U irgendwie in seine größten vollständig reduziblen Faktoren zerlegt, $U = W_\tau W_{\tau-1} \cdots W_1$. Alsdann kann man stets ϱ lineare homogene Differentialausdrücke $T_1, T_2, \dots, T_\varrho$ finden, sodaß zwei Differentialausdrücke T_i und V_i ($i=1, 2, \dots, \varrho$) mit gleichen Indices stets von derselben Art sind und W_i ($i=1, 2, \dots, \varrho$) immer durch den Differentialausdruck T_i mit demselben Index i teilbar ist. Es ist $\tau \geq \varrho$.*

§ 4.

Wir nehmen an, daß zu den bisherigen Bedingungen, nämlich UP ist durch A teilbar, P und A sind teilerfremd, noch die Voraussetzung hinzukomme, daß U und A die gleiche Ordnung besitzen. Wird wie im obigen Satz II vorausgesetzt, daß $A = BC$ ist, so hat $B_1 C_1$, das mit A dieselbe

Ordnung hat, auch gleiche Ordnung mit U . Da U durch $B_1 C_1$ teilbar ist, so können sich U und $B_1 C_1$ höchstens um einen Faktor unterscheiden, der eine bloße Funktion von x ist. Man kann daher B_1 so wählen, daß $U = B_1 C_1$ wird. Hierdurch erhält man aus II den früher von mir bewiesenen Satz, der für die Zerlegung von Differentialausdrücken derselben Art grundlegend ist und auf den am Schluß der Einleitung hingewiesen wurde.

Sind A und A_1 zwei lineare homogene Differentialausdrücke derselben Art und ist $A = BC$, so läßt sich auch A_1 als Produkt $A_1 = B_1 C_1$ schreiben, wobei C_1 mit C und B_1 mit B von derselben Art sind.

Entweder aus den Sätzen III und IV durch die Spezialisierung, daß U und A dieselbe Ordnung haben sollen, oder direkt, wie in meinem früheren Aufsatz aus dem zuletzt angegebenen Satz, folgen die Sätze über die Zerlegbarkeit zweier linearer homogener Differentialausdrücke derselben Art in irreduzible und größte vollständig reduzible Faktoren, wie man sie in dem früheren Aufsatz findet.