Ueber den Rauminhalt.

Von

M. DEHN in Karlsruhe.

Inhalt.

Einleitung.

Allgemeines über den Inhaltsbegriff und Ziel der vorliegenden Arbeit.

Bei der Betrachtung des Inhaltes geometrischer Gebilde sind im Allgemeinen weder vom praktischen noch rein mathematischen Standpunkte Begriffe infinitesimaler Natur auszuschliessen. Um so bemerkenswerther ist die bekannte Thatsache, dass man den Inhalt ebener gradliniger Figuren ohne irgend eine Stetigkeitsbetrachtung befriedigend behandeln kann*). Hierbei wird folgende Definition zu Grunde gelegt:

Zwei Polygone P' und P'' sind inhaltsgleich, wenn aus ihnen durch geeignetes Hinzufügen respectiv congruenter Polygone zwei Polygone $\bar{P}'$ und $\bar{P}''$ entstehen, die in resp. congruente Polygone zerlegt werden können.

Die mittels dieser Definition begründete Lehre vom Inhalte ist aber befriedigend zu nennen, weil es (übrigens ohne Benutzung der Stetigkeitsaxiome) nachzuweisen gelingt:

*) Siehe vor Allem, D. Hilbert, Grundlagen d. Geom. 1899.

Die Polygone P' und P'' sind stets dann und nur dann nach der obigen Definition inhaltsgleich, wenn das Inhaltsmass von P' gleich dem Inhaltsmasse von P'' ist, wobei das Inhaltsmass eines Polygones im wesentlichen folgende Eigenschaften hat: a) Das Inhaltsmass ist für jedes Polygon vollkommen bestimmt und hat die Eigenschaften einer messenden Grösse. b) Das Inhaltsmass des Complexes P zweier Polygone P' und P'' ist gleich der Summe der Inhaltsmasse von P' und P''. (Das Inhaltsmass von P entspricht dem, was man gewöhnlich Inhalt von P nennt.)

Die analoge Definition für Polyeder heisst:

Zwei Polyeder Π' und Π'' sind inhaltsgleich, wenn aus ihnen durch geeignetes Hinzufügen resp. congruenter Polyeder zwei Polyeder $\overline{\overline{\Pi}}'$ und $\overline{\overline{\Pi}}''$ hervorgehen, die ihrerseits in resp. congruente Polyeder zerlegbar sind. — Das so definirte „inhaltsgleich" charakterisiren wir durch die Bezeichnung: „Endlichgleich"*).

Man kann dann nachweisen: Zwei Polyeder sind *nur* dann inhaltsgleich, wenn sie gleiches Inhaltsmass haben (dabei entspricht das Inhaltsmass von Π dem was man gewöhnlich kurz Inhalt von Π nennt). Aber es ist bisher noch nicht gelungen, zu zeigen, dass die Gleichheit des Inhaltsmasses auch eine *hinreichende* Bedingung für die Endlichgleichheit zweier Polyeder ist, wie es doch in der Ebene der Fall ist. *Vielmehr soll in der vorliegenden Arbeit bewiesen werden***): Die Gleichheit des Inhaltsmasses genügt nicht, damit zwei Polyeder endlichgleich sind. Man kann noch andere nothwendige Bedingungen aufstellen, welche einen von der ersteren Bedingung wesentlich verschiedenen Charakter besitzen und es können z. Bsp. eine Pyramide und ein Prisma mit derselben Grundfläche und ein Drittel der Höhe durchaus nicht immer in congruente Polyeder zerlegt oder durch Hinzufügen congruenter Polyeder zu solchen Polyedern ergänzt werden, für die ihrerseits eine Zerlegung in congruente Polyeder möglich ist.

Wegen dieses Resultates ist die Definition von „inhaltsgleich" durch „endlichgleich" zu verwerfen und es erscheint eine befriedigende Grundlegung der Lehre vom Polyederinhalte bei Vermeidung unendlicher Processe als ausgeschlossen, was bei der anscheinend elementaren Natur dieses Begriffes ziemlich überraschend ist.

---

*) Diese Bezeichnung verdanke ich einer mündlichen Mittheilung des Herrn Liebmann.

**) Das Problem, das durch die vorliegende Arbeit erledigt wird, gehört zu den 23 Problemen, die von D. Hilbert in seinem Pariser Vortrag (Gött. Nachr. 1900, Heft 8) aufgestellt sind.

Ganz ähnliche, charakteristische Unterschiede zwischen ebener und räumlicher Geometrie bestehen auch in den Nicht-Euklidischen Geometrien, wie in einem weiteren Artikel gezeigt werden soll.

§ 1.

Zerlegungsgleiche und ergänzungsgleiche Polyeder. — Die analogen Verhältnisse in der Ebene liefern uns den Ausgangspunkt für den Beweis.

Ein specieller Fall davon, dass die Polyeder Π' und Π'' endlichgleich sind, ist der, dass sie selbst in resp. congruente Polyeder zerlegt werden können; in diesem Falle nennen wir Π' und Π'' *zerlegungsgleich**) andernfalls aber *ergänzungsgleich**). Wir wollen zunächst nur die Zerlegungsgleichheit untersuchen.

Um die Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit zu finden, betrachten wir die analogen Verhältnisse in der Ebene. Ein Polygon P sei in beliebiger Weise in Polygone zerlegt. Die Winkel der Theilpolygone ergänzen sich nun, wie man sofort sieht, zu $4R$, $2R$ oder zu einem Winkel des Polygons P selbst. Bezeichnen wir also mit W die Summe der Winkel der Theilpolygone, mit S die Summe der Winkel von P, so ist:

$$S + 2nR = W.$$

Haben wir nun zwei Polygone P' und P'', die in resp. congruente Polygone zerlegt werden können (also zerlegungsgleich sind), so muss in entsprechender Bezeichnungsweise:

$$S' + 2n'R = W' \qquad W'' = S'' + 2n''R$$

$$W' \text{ identisch mit } W''$$

oder:

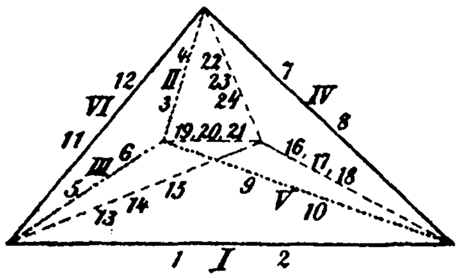
$$S' \equiv S'' \pmod{2R}$$

sein. Es ist bemerkenswerth, dass wir diese Beziehung allein mit Hülfe der Axiome der „Analysis situs“ abgeleitet haben. Die Formel ist offenbar trivial für den Fall der gewöhnlichen Geometrie, liefert aber z. B. eine bekannte Bedingung für die Inhaltsgleichheit sphärischer Polygone.

Können wir eine ähnliche Betrachtung im Raume machen? Ein Polyeder Π sei in beliebiger Weise in Polyeder zerlegt. Die Flächenwinkel der Theilpolyeder ergänzen sich offenbar wieder zu $4R$, $2R$, oder zu einem Flächenwinkel von Π selbst. Aber dazu müssen wir sowohl die

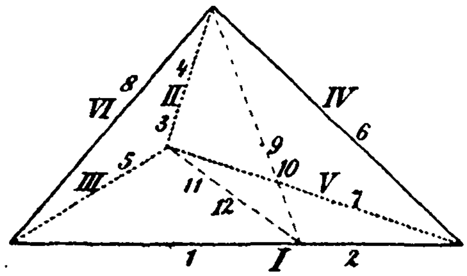
*) Auch diese Ausdrücke verdanke ich Herrn Liebmann. Statt „zerlegungsgleich“ ist in meiner Note in den Göttinger Nachrichten 1900 die Bezeichnung „raumgleich“ gewählt, die der in der Ebene üblichen Bezeichnung „flächengleich“ für zerlegungsgleiche Polygone entspricht. In dieser Note ist bereits der Fall der Zerlegungsgleichheit, in etwas anderer Weise wie in der vorliegenden Arbeit, erledigt.

Flächenwinkel der Theilpolyeder als auch von Π mehrfach zählen, wie durch die Figuren (1, 2, 3) erläutert wird. Bezeichnen wir also die Flächenwinkel von Π mit $\pi_1, \pi_2, \cdots$ die Flächenwinkel der Theilpolyeder



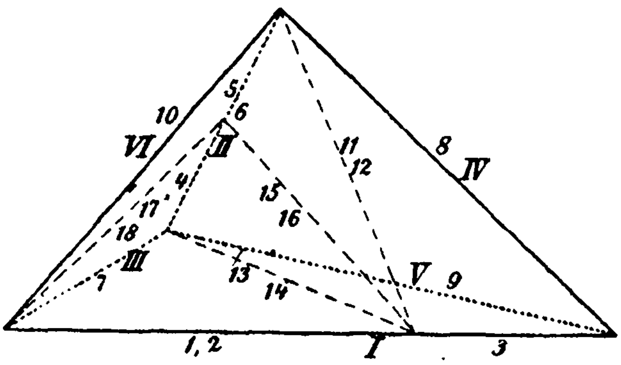
$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{24}=\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_6+4\cdot 4R$

Fig. 1.



$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{12}=2\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_6+2\cdot 2\cdot R$

Fig. 2.



$\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5+2\tau_6+\tau_7+\tau_8+\cdots+\tau_{18}=2\pi_1+2\pi_2+\pi_3+\cdots+\pi_6+4\cdot 2R.$

Fig. 3.

mit τ_1, τ_2 und mit $L(x_1, x_2, \cdots)$, $\Lambda(x_1, x_2, \cdots)$ lineare, homogene, ganzzahlige Functionen der Argumente, so haben wir:

$$L(\pi_1, \pi_2, \cdots 2R) = \Lambda(\tau_1, \tau_2, \cdots).$$

Sind nun Π' und Π'' zerlegungsgleich, so haben wir in entsprechender Bezeichnungsweise:

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots 2R) = \Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots),$$
$$L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots 2R) = \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots).$$

Aus diesen Gleichungen kann man direct die Winkel τ nicht eliminiren und eine Beziehung zwischen den Winkeln π aufstellen. Aber wir werden zeigen, dass man Λ' und Λ'' auf mannigfache Weise variiren und im speciellen so finden kann, dass

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots 2R) = \Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots), \quad \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots) = L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots 2R),$$
$$\Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots) \text{ identisch mit } \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots)$$

ist, woraus

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots) \equiv L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots) \pmod{2R}$$

folgt, welches eine erste Form der gesuchten Bedingung (s. S. 474) für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder ist.

§ 2.

Abbildung der Zerlegung eines Polyeders auf die „Theilungsfläche“.

Zum Beweise ist es vor Allem nöthig, eine klare Anschauung von der Zerlegung eines Polyeders zu gewinnen: Sei das Polyeder Π in beliebiger Weise in Polyeder zerlegt. Wir bezeichnen die Flächenwinkel von Π mit $\pi_1, \pi_2, \cdots$, die entsprechenden Kanten mit $p_1, p_2, \cdots$, die Flächenwinkel der Theilpolyeder mit $\tau_1, \tau_2, \cdots$, die zugehörigen Kanten mit $t_1, t_2, \cdots$. Wir betrachten eine beliebige Kante t_i und wollen sie nach beiden Richtungen, solange die beiden Verlängerungen von Kanten $t_k, t_l, \cdots$ *lückenlos* bedeckt werden, etwa bis zu den Punkten A und B verlängern (s. Fig. 4). Dann giebt es der Definition gemäss keine Kante t_m,

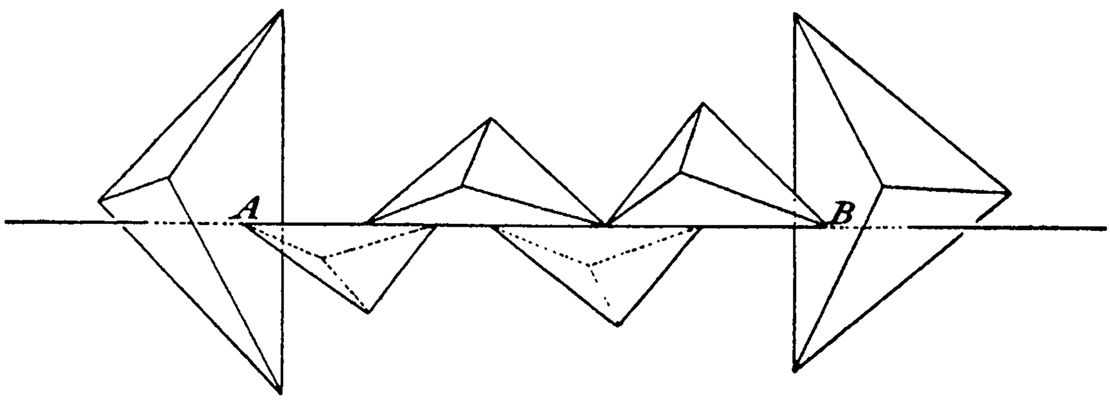


Fig. 4.

die mit AB mehr als einen Punkt gemeinsam hat und doch nicht ganz innerhalb AB liegt. Denn sonst könnte ich t_i noch über A oder B hinaus verlängern, so dass die Verlängerung lückenlos von Kanten

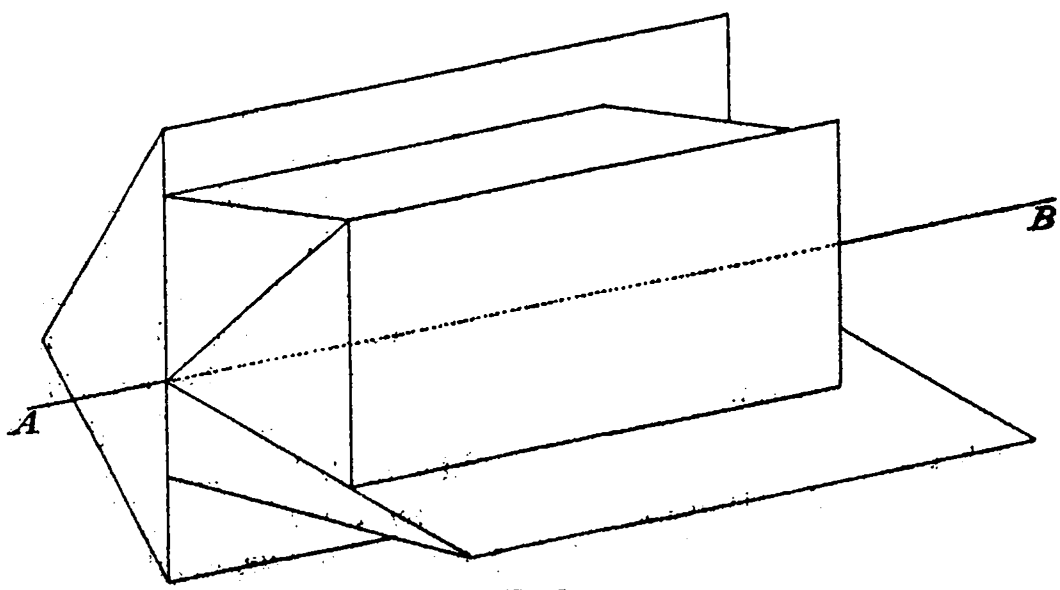


Fig. 5.

$t_2 . t_3, \cdots t_m$ überdeckt würde. *Die Gesammtheit aller Kanten t_1, t_2, t_3, die auf der Strecke AB liegen, bezeichnen wir kurz als den „Kantenzug AB“.*

Die Strecke AB wird in ihrem Verlaufe bald in Flächen von Theilpolyedern (Fig. 5) oder von Π selbst verlaufen, bald mit Kanten von Π zusammenfallen (ohne dass AB selbst Kante von Π ist, kann das natürlich nur vorkommen, wenn Π nicht überall convex ist), oder auch streckenweise nur mit Kanten von Theilpolyedern zusammenfallen (Fig. 6); berück-

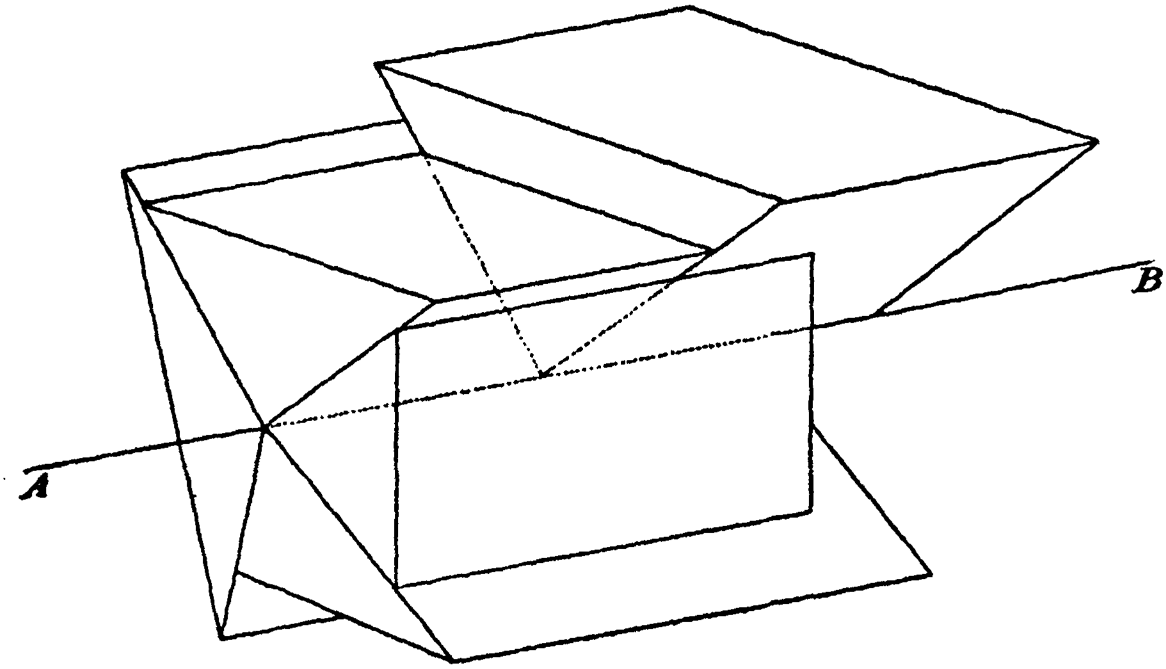


Fig. 6.

sichtigen wir dann, dass das Innere von Π definitionsgemäss lückenlos von Theilpolyedern erfüllt ist, so ist ersichtlich, dass die Flächenwinkel, die zu den Kanten des Kantenzuges AB gehören, sich an jeder Stelle von AB zu $2R$, π_i oder $4R$ ergänzen, je nachdem einer der oben aufgezählten Fälle vorliegt.

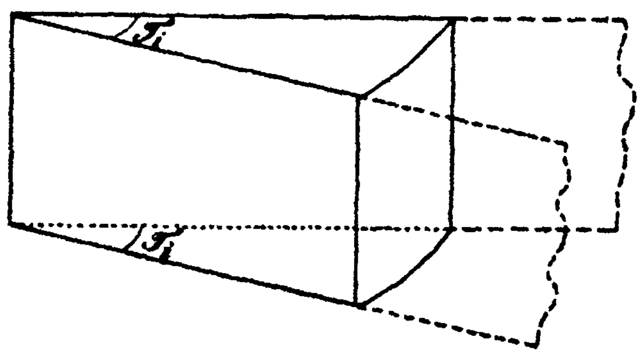


Fig. 7.

Diese Verhältnisse wollen wir uns folgendermassen veranschaulichen: Wir bezeichnen ein Stück der Ebene, das durch eine Strecke PQ und zwei (Halb)Strahlen der Ebene, die in P und Q auf PQ senkrecht und nach derselben Seite von PQ gerichtet sind, begrenzt wird, als einen von PQ ausgehenden Halbstreifen. Jeden zu einer Kante t_i des Kantenzuges AB gehörigen Flächenwinkel τ_i begrenzen wir durch zwei von t_i ausgehende Halbstreifen (Fig. 7). Sodann beschreiben wir um AB als

Axe einen geraden Kreiscylinder mit dem Radius 1. Infolge des Schnittes der Halbstreifen mit dieser Cylinderfläche wird eine Kante und der zugehörige Flächenwinkel stets repräsentirt durch ein Stück der Cylinderfläche, das wir eine rechtwinklige *Cylinderplatte* nennen wollen. Ein solches Flächenstück wird begrenzt durch zwei Erzeugende und zwei Breitenkreise des Cylinders, seine Höhe ist gleich der Länge der Kante, seine Breite gleich dem Flächenwinkel, welche die Platte gleichzeitig repräsentirt. Alle diese „Platten" setzen einfach und lückenlos einen Theil der Cylinderfläche zusammen, der die Cylinderfläche vollständig überdeckt, solange auf AB nur Kanten von Theilpolyedern liegen (Fig. 6), der aber rechtwinklige Ausschnitte von der Breite $2R$ resp. $4R - \pi_i$ besitzt, jenachdem AB in Flächen von Theilpolyedern (Fig. 5) und von Π selbst fällt oder Kanten von Π in sich aufnimmt. Die Höhe des Ausschnittes von der Breite $4R - \pi_i$ ist offenbar gleich der zu π_i gehörigen Kante p_i von Π.

Aehnliche Flächen gewinnen wir, indem wir andere, nicht zum Kantenzuge AB gehörige Kanten herausgreifen, die respectiven Kantenzüge bilden und dieselben auf Einheitscylinder abbilden. Alle diese Flächen wollen wir irgendwie der Länge nach auf einander setzen und so zu einer Fläche T vereinigen, die uns ein einfaches, unseren Anforderungen vollkommen genügendes Bild der Theilung von Π liefert. Und um noch einmal zu recapituliren:

Repräsentiren wir jedes zusammengehörige Paar Kante t_i und Flächenwinkel τ_i durch eine rechtwinklige Cylinderplatte, die zu einem Cylinder mit dem Radius 1 gehört, deren Höhe gleich der Kante t_i, deren Breite gleich dem Winkel τ_i ist, so können wir aus der Gesammtheit dieser Platten einfach und lückenlos eine Fläche T aufbauen. Diese Fläche T ist ein Stück der Oberfläche des Einheitscylinders, das rechtwinklige Ausschnitte von der Breite $2R$ und $4R - \pi_i$ besitzt. Die Höhe des Ausschnittes von der Breite $4R - \pi_i$ ist gleich p_i.

§ 3.

Zurückführung des Problems auf ein zweidimensionales.

Angenommen nun, wir hätten zwei zerlegungsgleiche Polyeder Π' und Π'', es gäbe also eine Zerlegung von Π' und Π'' in resp. congruente Polyeder. Wir führen diese Zerlegung bei Π' und Π'' aus und operiren mit jedem der beiden Polyeder, wie oben mit dem Polyeder Π.

Aus den Cylinderplatten als Repräsentanten der Paare von Kante und Flächenwinkel entstehen zwei Flächen T' und T''. Aber nach Voraussetzung sind die T' und T'' zusammensetzenden Platten paarweise congruent, da die Theilpolyeder paarweise congruent sind. Und so haben wir unser dreidimensionales Problem auf das zweidimensionale zurückgeführt:

Zwei Einheitscylinderflächen T' und T'', mit rechtwinkligen Ausschnitten, sind aus rechtwinkligen Cylinderplatten aufgebaut. Welche Bedingung besteht für die Breiten der Ausschnitte, damit die beiden Flächen T' und T'' aus demselben Material von Platten aufgebaut werden können.

§ 4.

Flächeninhalt der Theilungsfläche.

Wir betrachten die Theilungsfläche T eines beliebig getheilten Polyeders Π. Bezeichnen wir die Höhe der Ausschnitte von der Breite $2R$ mit $h_1, h_2, \cdots$, die Höhe des Cylinders selbst, dessen Theil T ist, mit h, so ist offenbar die Summe der Oberflächeninhalte der Platten und Ausschnitte gleich dem Oberflächeninhalt des Cylinders. Also:

$$(1) \qquad \tau_1 t_1 + \tau_2 t_2 + \cdots + (4R - \pi_1) p_1 + (4R - \pi_2) p_2 + \cdots$$
$$\cdots + (h_1 + h_2 + \cdots) 2R = 4R \cdot h.$$

Wir denken uns nun unter Festhaltung der Breite der Platten und Ausschnitte, die Höhe derselben, sowie die Höhe des Cylinders ein wenig geändert. Es ist klar, dass wir diese Aenderung so zweckmässig einrichten können, dass auch die variirten Platten und Ausschnitte den variirten Cylinder einfach und lückenlos überdecken und also auch für die abgeänderten Höhen die obige Gleichung (1) gilt. Welche Bedingungen haben wir zu erfüllen, damit die Aenderung diese Eigenschaft hat?

Sei

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} l_1(t_1, t_2 \cdots p_1, p_2 \cdots h_1, h_2 \cdots h) = 0, \\ l_2(t_1, t_2 \cdots p_1, p_2 \cdots h_1, h_2 \cdots h) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

das System der von einander unabhängigen, linearen und homogenen Gleichungen mit rationalen Coefficienten zwischen den Grössen

$$t_1, t_2 \cdots p_1, p_2 \cdots h_1, h_2 \cdots h.$$

Wir behaupten: Aendert man diese Grössen so ab, dass sie nicht aufhören positiv zu bleiben und den Gleichungen (A) Genüge zu leisten, so bedecken die abgeänderten Platten und Ausschnitte einfach und lückenlos den abgeänderten Cylinder.

Zunächst leuchtet die Existenz eines solchen Grössensystems ein. Denn man kann die Gleichungen (A) durch Grössen

$$\bar{t}_1, \bar{t}_2 \cdots \bar{p}_1, \bar{p}_2 \cdots \bar{h}_1, \bar{h}_2 \cdots \bar{h}$$

befriedigen, die beliebig wenig von den Grössen $t_1, t_2 \cdots$ abweichen und also wie diese positiv sind. Die beabsichtigte Veränderung des Plattengefüges stellt man sich nun in folgender Weise anschaulich vor: Der senkrechte Abstand eines Punktes P auf einer Querkante einer Platte von dem oberen Rande des Cylinders möge vor der Aenderung gleich $t_i + t_k + \cdots$ sein d. i. gleich der Summe der Höhen derjenigen Platten und Ausschnitte, die die Cylindererzeugende durch P zwischen P und dem oberen Cylinderrande durchschneidet. Wir bestimmen jetzt, dass P nach der Aenderung den Abstand $\bar{t}_i + \bar{t}_h + \cdots$ vom oberen Cylinderrande haben soll. Durch diese Bestimmung wird erreicht, dass Punkte, die vorher auf ein und demselben Breitenkreis gelegen haben, auch nachher auf demselben Breitenkreis liegen. Denn war vorher:

$$t_i + t_h + \cdots = t_r + t_s + \cdots,$$

so wird, wegen Erfüllung des Gleichungssystems (A) nach der Aenderung

$$\bar{t}_i + \bar{t}_h + \cdots = \bar{t}_r + \bar{t}_s + \cdots$$

sein, was bedeutet, dass die entsprechenden Punkte denselben Abstand vom oberen Cylinderrande haben. Es entsteht also wieder ein Plattengefüge mit Ausschnitten wie vorher. Die einzelnen Platten aber haben ersichtlich, wie verlangt, statt der Höhen $t_1, t_2 \cdots$ die Höhen $\bar{t}_1, \bar{t}_2 \cdots$ erhalten, die Ausschnitte die Höhen $\bar{h}_1, \bar{h}_2 \cdots$ und der Cylinder die Höhe $\bar{h}$. Also erfüllen auch die Grössen $\bar{t}_1 \cdots \bar{p}_1 \cdots \bar{h}_1 \cdots \bar{h}$ die Gleichung (1). Wegen des geometrischen Nachweises mussten wir die Grössen $\bar{t}_1$ etc. positiv wählen. Analytisch folgt aber dann, weil die Gleichungen (A) und (1) linear sind, sofort der Satz:

Alle Systeme von Grössen (einerlei ob diese alle positiv sind oder nicht) *die das System von* (A) *befriedigen, erfüllen auch* (1). (*Die Gleichung* (1) *folgt aus dem System* (A)).

Nun ist aber evident, dass irgend ein System von linearen homogenen Gleichungen mit ganzen Coefficienten, wenn überhaupt, sich jedenfalls auch durch ein System von rationalen Zahlen erfüllen lässt. Wir können also die Gleichungen des Systems (A) befriedigen, indem wir statt $t_1, t_2, \cdots p_1, p_2, \cdots h_1, h_2, \cdots h$ rationale Zahlen etwa

$$r_{t_1}, r_{t_2}, \cdots r_{p_1}, r_{p_2}, \cdots r_{h_1}, r_{h_2}, \cdots r_h$$

setzen.

Mittels unseres eben bewiesenen Satzes folgt dann aus Gleichung (1)

$$r_{t_1}\tau_1 + r_{t_2}\tau_2 + \cdots + r_{p_1}(4R - \pi_1) + r_{p_2}(4R - \pi_2) + \cdots$$
$$\cdots + (r_{h_1} + r_{h_2} + \cdots)\,2R = r_h 4R$$

oder

(I) $$r_{t_1}\tau_1 + r_{t_2}\tau_2 + \cdots = r_{p_1}\pi_1 + r_{p_2}\pi_2 + \cdots + rR;$$

aus dieser Gleichung erhalten wir durch Multiplication beider Seiten mit einer passenden ganzen Zahl eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, deren Existenz wir schon auf Seite 468 behauptet haben.

§ 5.

Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder. — Beispiel: Es ist nicht möglich durch Zerschneiden und Zusammensetzen ein reguläres Tetraeder in zwei reguläre Tetraeder zu verwandeln.

Jetzt betrachten wir wieder zwei zerlegungsgleiche Polyeder Π' und Π'' und die Theilungsflächen T' und T'', die aus resp. gleichen Platten (Kanten t_i und Flächenwinkel τ_i) aufgebaut sind. Wir haben entsprechend dem System (A) die beiden Systeme:

$$(\mathrm{A}')\qquad \begin{cases} l_1'(t_1, t_2 \cdots p_1', p_2' \cdots h_1', h_2' \cdots h') = 0, \\ l_2'(t_1, t_2 \cdots p_1', p_2' \cdots h_1', h_2' \cdots h') = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

$$(\mathrm{A}'')\qquad \begin{cases} l_1''(t_1, t_2 \cdots p_1'', p_2'' \cdots h_1'', h_2'' \cdots h'') = 0, \\ l_2''(t_1, t_2 \cdots p_1'', p_2'' \cdots h_1'', h_2'' \cdots h'') = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ . \end{cases}$$

Erfüllen wir beide Systeme gleichzeitig durch ein System von rationalen Zahlen:

$$r_{t_1}, r_{t_2} \cdots \begin{cases} r_{p_1'}, r_{p_2'}, \cdots r_{h_1'}, r_{h_2'}, \cdots r_{h'} \\ r_{p_1''}, r_{p_2''}, \cdots r_{h_1''}, r_{h_2''}, \cdots r_{h''} \end{cases},$$

so erhalten wir entsprechend der Gleichung (I) zwei Gleichungen

$$(\mathrm{I}')\qquad r_{t_1}\tau_1 + r_{t_2}\tau_2 + \cdots = r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots + r' \cdot R,$$

$$(\mathrm{I}'')\qquad r_{t_1}\tau_1 + r_{t_2}\tau_2 + \cdots = r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots + r'' \cdot R.$$

Hieraus ergiebt sich sofort:

$$r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots - (r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots) = r \cdot R.$$

Multipliciren wir beide Seiten dieser Gleichung mit einer geeigneten ganzen Zahl, so erhalten wir die Congruenz, die wir auf Seite 468 als aufzufindende bezeichnet haben. Ihre Wichtigkeit besteht darin, dass sie eine nothwendige Relation zwischen den Flächenwinkeln zweier zerlegungsgleicher Polyeder darstellt.

Wir wollen nun noch die rationalen Coefficienten der obenstehenden Gleichung bestimmen. Sei:

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} L_1(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots) = 0, \\ L_2(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

das System der von einander unabhängigen in $p_1' \cdots p_1'' \cdots$ linearen und homogenen Gleichungen mit rationalen Coefficienten. Jedes rationale Lösungssystem der Gleichungen (B) wird Theil eines rationalen Lösungssystems von (A′, A″), und umgekehrt wird jedes rationale Lösungssystem von (A′, A″) die Gleichungen (B) befriedigen. Zur Bestimmung der Grössen $r_{p_1'} \cdots r_{p_1''} \cdots$ genügt also das Gleichungssystem (B), in dem nur die als gegeben anzusehenden Längen der Kanten der beiden Polyeder Π' und Π'' vorkommen. Die vorhin gewonnene Bedingung können wir demgemäss so präcisiren:

Sind zwei Polyeder Π' *und* Π'' *zerlegungsgleich* (*d. i. in resp. gleiche Polyeder zerlegbar*), *so erfüllt jedes System von rationalen Zahlen* $r_{p_1'} \cdots r_{p_1''} \cdots$, *das die Gleichungen* (B) *befriedigt, auch die Gleichung:*

$$(\mathrm{II})\qquad r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots - (r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots) = rR.$$

Dass diese Bedingung für zwei zerlegungsgleiche Polyeder nicht aus der Gleichheit ihres Inhaltsmasses folgt, habe ich schon früher*) gezeigt. Z. B. wurde nachgewiesen, dass ein reguläres Tetraeder und ein Prisma die obige Bedingung nicht erfüllen, die in diesem speciellen Falle fordert, dass der Flächenwinkel des regulären Tetraeders in rationalem Verhätniss zum Vollwinkel steht. Dies ist, wie an dem angeführten Orte gezeigt ist, nicht der Fall. Dies Ergebniss wollen wir in folgendem einfachen Beispiele verwerthen:

Wir behaupten: *Es ist nicht möglich durch Zerschneiden und Zusammensetzen ein reguläres Tetraeder in zwei reguläre Tetraeder zu verwandeln.*

Beweis: Wir nehmen an, wir hätten ein reguläres Tetraeder mit der Kante a, das wir in zwei reguläre Tetraeder mit den Kanten b resp. c überführen könnten. Wir haben dann drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das System (B) der linearen rationalen Beziehungen zwischen a, b und c aus zwei Gleichungen oder einer Gleichung besteht oder endlich überhaupt keine lineare rationale Beziehung zwischen a, b und c existirt.

1. Fall. Das Inhaltsmass eines Tetraeders mit der Kante p ist gleich $\frac{p^3}{12}\sqrt{2}$. Da nun das Inhaltsmass zerlegungsgleicher Polyeder gleich ist, so muss

$$a^3 = b^3 + c^3$$

sein. Aus dem bekannten Satze aus der Zahlentheorie folgt sofort, dass

*) Göttinger Nachrichten 1900.

der erste Fall, bei dem nach Voraussetzung a, b und c in rationalem Verhältnisse stehen, unmöglich ist. Aber auch ohne Zuhülfenahme dieses Satzes gelingt es einen Widerspruch zu construiren. Sei nämlich

$$b = r_1 a, \quad c = r_2 a,$$

wo r_1 und r_2 rationale Zahlen sind, so werden diese Gleichungen erfüllt, wenn wir a gleich 1, b gleich r_1, c gleich r_2 setzen. Die Gleichung (II) lautet dann, wenn der Flächenwinkel des regulären Tetraeders τ ist:

$$\tau - (r_1\tau + r_2\tau) = rR$$

oder

$$\tau(1 - r_1 - r_2) = rR;$$

da aber τ nach dem oben angeführten Ergebniss zum Vollwinkel in keinem rationalen Verhältniss steht, so folgt aus dieser Gleichung:

$$1 = r_1 + r_2.$$

Es ist aber

$$b + c = (r_1 + r_2)a,$$

also müsste

$$a = b + c$$

sein, eine Gleichung, die mit der Gleichung

$$a^3 = b^3 + c^3$$

in Widerspruch steht.

2ter Fall: Sei

$$r_1 a = r_2 b + r_3 c,$$

eine lineare rationale Beziehung, zwischen den drei Kanten, in der auch eine der Grössen r_1, r_2, r_3 gleich Null sein kann. Seien a) r_1, r_2 und r_3 von Null verschieden, dann kann ich die Gleichung befriedigen, indem ich a gleich r_2, b gleich r_1 und c gleich Null setze. Dann heisst die Gleichung (II):

$$r_2\tau - r_1\tau = rR,$$

daraus folgt wiederum wie vorher r_2 gleich r_1. Setzen wir ferner b gleich Null, a gleich r_3, c gleich r_1, so folgt ebenso r_3 gleich r_1. Folglich bestände die Beziehung

$$a = b + c,$$

die unmöglich ist.

Sei b) eine der drei Grössen r_1, r_2, r_3 gleich Null oder, um gleich den dritten Fall zu erledigen, seien alle drei Grössen gleich Null. Sei etwa r_1 gleich Null, so kann ich das Gleichungssystem (B) befriedigen, wenn ich für b und c Null, für a 1 setze. Dann lautet die Gleichung (II):

$$\tau = rR,$$

was nicht richtig ist. Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

§ 6.

Die Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit gelten auch für den allgemeinen Fall der Endlichgleichheit von Polyedern. — Gleichheit des Inhaltsmasses nicht ausreichend für die Endlichgleichheit.

Zwei Polyeder Π' und Π'' seien gegeben. Fügen wir die beiden zerlegungsgleichen Polyeder Σ' und Σ'' zu Π' resp. Π'' hinzu, so mögen zwei zerlegungsgleiche Polyeder $\overline{\Pi}'$ und $\overline{\Pi}''$ entstehen. In diesem Falle bezeichnen wir, wie schon oben bemerkt, Π' und Π'' als ergänzungsgleich. Welche Bedingungen sind zu erfüllen? Seien

$$(B_\Sigma)\qquad \begin{cases} l_1(s_1', s_2' \cdots s_1'', s_2'' \cdots) = 0, \\ l_2(s_1', s_2' \cdots s_1'', s_2'' \cdots) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

und

$$(B_{\overline{\Pi}})\qquad \begin{cases} \overline{l}_1(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots s_1', s_2' \cdots s_1'', s_2'' \cdots) = 0, \\ \overline{l}_2(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots s_1', s_2' \cdots s_1'', s_2'' \cdots) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

die dem Gleichungssystem (B) entsprechenden Systeme. Dann muss jedes rationale Lösungssystem $r_{s_1'}, r_{s_2'} \cdots r_{s_1''}, r_{s_2''} \cdots$ von (B_Σ) die Gleichung:

$$(\mathrm{II}_\Sigma)\qquad r_{s_1'}\sigma_1' + r_{s_2'}\sigma_2' + \cdots - (r_{s_1''}\sigma_1'' + r_{s_2''}\sigma_2'' + \cdots) = r_s R$$

befriedigen, wo r_s eine je nach dem Lösungssystem verschiedene rationale Zahl ist. Ebenso befriedigt jedes rationale Lösungssystem von $(B_{\overline{\Pi}})$ die Gleichung:

$$(\mathrm{II}_{\overline{\Pi}})\qquad r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots + r_{s_1'}\sigma_1' + r_{s_2'}\sigma_2' + \cdots$$
$$\cdots - (r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots + r_{s_1''}\sigma_1'' + r_{s_2''}\sigma_2'' \cdots) = r_{\overline{s}} R.$$

Sei nun ferner

$$(B_\Pi)\qquad \begin{cases} L_1(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots) = 0, \\ L_2(p_1', p_2' \cdots p_1'', p_2'' \cdots) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

das dem System (B) entsprechende System für Π' und Π''. Für jedes rationale Lösungssystem von (B_Π) können wir ein rationales Lösungssystem von (B_Σ) und also auch von (II_Σ) finden, so dass die beiden Systeme zusammen das System $(B_{\overline{\Pi}})$ und also auch die Gleichung $(\mathrm{II}_{\overline{\Pi}})$ befriedigen.

Ziehen wir aber die Gleichung (II_Σ) von der Gleichung ($\mathrm{II}_{\overline{\Pi}}$) ab, so ergiebt sich die Gleichung

$$(\mathrm{II}_\Pi) \qquad r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots - (r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots) = rR.$$

Für jedes rationale System also, das (B_Π) befriedigt, ist auch (II_Π) erfüllt, so dass wir für ergänzungsleiche Polyeder dieselbe Bedingung erhalten haben wie für zerlegungsgleiche. Nun sind aber zwei endlichgleiche Polyeder entweder zerlegungsgleich oder ergänzungsgleich, so dass wir den Satz gewonnen haben:

Sind zwei Polyeder Π' *und* Π'' *endlichgleich, so erfüllt jedes rationale Zahlensystem:* $r_{p_1'} \cdots r_{p_1''} \cdots$, *das die Gleichungen* (B) *befriedigt, auch die Gleichung:*

$$(\mathrm{II}) \qquad r_{p_1'}\pi_1' + r_{p_2'}\pi_2' + \cdots - (r_{p_1''}\pi_1'' + r_{p_2''}\pi_2'' + \cdots) = rR.$$

Die angeführten Beispiele für Polyeder mit dem gleichen Inhaltsmasse, die doch nicht zerlegungsgleich sind, sind also auch gleichzeitig Beispiele für Polyeder mit demselben Inhaltsmasse, die nicht endlichgleich sind. Wir haben also die im Eingange aufgestellte Behauptung erwiesen: *Die Gleichung des Inhaltsmasses ist nicht hinreichend für die Endlichgleichheit zweier Polyeder.*

Zu den vorstehenden Auseinandersetzungen möchte ich noch einige Bemerkungen machen:

Sachlich: Die für die Endlichgleichheit zweier Polyeder aufgestellte Bedingung gilt in dem ganzen Machtbereiche der Axiome der Analysis situs, also z. Bsp. auch in der Nichteuklidischen Geometrie; es lassen sich auch für diese Beispiele von inhaltsgleichen, aber nicht endlichgleichen Polyedern angeben.

Litterarisch: Die Existenz einer linearen, ganzzahligen Beziehung zwischen dem Vollwinkel und den Flächenwinkeln zweier zerlegungsgleicher Polyeder (die ich in den Gött. Nachr. 1900 nachgewiesen habe) ist von Bricard (Nouv. Ann. 1896) behauptet und von Sforza (Per. di Mat. 1897) für einen sehr einfachen Fall bewiesen worden. Bricard und Sforza führen auch Beispiele von inhaltgleichen Polyedern an, bei denen diese Relation nicht erfüllt ist.