**ALCUNE RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE DELLE RELAZIONI
FRA IL PERIODO DI UNA SCARICA OSCILLANTE E L'INDUTTANZA, LA CAPACITÀ,
LA RESISTENZA DEL CIRCUITO DI SCARICA.**

Nota del Dott. MICHELE LA ROSA.

Le relazioni analitiche fra il periodo d'oscillazione T della scarica, e l'autoinduzione L , la capacità C , la resistenza R del circuito elettrico, nel quale la scarica ha luogo, non si prestano per un esame intuitivo del modo di variare di T , quando muta una delle tre grandezze L , C , R , mentre si lasciano costanti le altre due. Meglio, a questo scopo, si prestano delle rappresentazioni grafiche; ed è appunto di talune di esse, che vogliamo occuparci nella nota presente.

La relazione

$$(1) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{4L^2C}{4L - R^2C}}$$

mantenendo costanti R e C , e ponendo $L = x$ e $T^2/4\pi^2 = y$, si trasforma nell'equazione:

$$(1') \quad 4Cx^2 - 4xy + R^2Cy = 0$$

che rappresenta un'iperbole, di cui il centro ha le coordinate:

$$(2) \quad x_0 = \frac{R^2C}{4} \quad y_0 = \frac{R^2C^2}{2};$$

e gli assi hanno le equazioni:

$$(3) \quad \begin{cases} y - \frac{R^2C^2}{2} = \left(C + \sqrt{1 + 2C \cos \omega + C^2} \right) \left(x - \frac{R^2C}{4} \right) \\ y - \frac{R^2C^2}{2} = \left(C - \sqrt{1 + 2C \cos \omega + C^2} \right) \left(x - \frac{R^2C}{4} \right) \end{cases}$$

dove ω è l'angolo degli assi coordinati.

Se, per semplicità, poniamo :

$$(4) \quad \cos \omega = -\frac{1}{2C}, \quad ^1)$$

queste equazioni si riducono alla forma :

$$(3') \quad \begin{cases} 2Cx - y = 0 \\ y - \frac{R^2 C^2}{2} = 0 \end{cases}$$

e l'equazione dell'iperbole, riferita a questi assi, diventa :

$$-\frac{X^2}{\frac{R^2 C^2}{16}} + \frac{Y^2}{\frac{R^2 C^2}{4} \left(1 - \frac{1}{4C^2}\right)} = 1.$$

Per costruire la curva, fissate nel piano due rette Ox, Oy che facciano fra loro l'angolo ω definito dalla (4), e segnato il centro O , di cui conosciamo le coordinate (2), possiamo tracciare i due assi di simmetria (fig. 1).

1) Questa ipotesi richiede che sia $C > \frac{1}{2}$; e noi possiamo ritenere che tale condizione sia sempre soddisfatta, essendo in nostro arbitrio la scelta delle unità di misura (vedi fine) così di C , come delle altre grandezze. Però è bene osservare, che qualunque sia ω (e perciò indipendentemente da qualunque ipotesi su C), noi, con lo stesso procedimento, otterremo sempre una rappresentazione (forse meno semplice) in tutto conforme alla nostra.

Congiungendo O con O_1 , si ottiene il primo (perchè la prima delle equazioni (3') è priva del termine noto); esso è normale ad Ox , perchè per ogni suo punto abbiamo:

$$(3'') \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{2C} = -\cos \omega,$$

ossia la x di un punto qualunque, è la proiezione normale della corrispondente y .

Il secondo asse sarà evidentemente, la parallela ad Ox , condotta per O_1 .

Le lunghezze dei semiassi dell'iperbole, essendo rispettivamente:

$$\frac{R^2 C}{4}, \text{ e } \frac{1}{2} R^2 C^2 \sqrt{1 - \frac{1}{4C^2}} = \frac{1}{2} R^2 C^2 \sin \omega$$

vengono nella figura rappresentate dai segmenti OA , OO_1 ; e gli assintoti dalle rette A_1B ed AB_1 (l'ultima delle quali è parallela ad Oy). La curva può allora venire facilmente tracciata.

Siccome nei casi fisici, la x può avere solamente valori positivi, la rappresentazione cercata risulta dal ramo dell'iperbole compreso nell'angolo BO_1B_1 , e dall'arco dell'altro ramo compreso dentro l'angolo OO_1A , riferiti ai due assi Ox , Oy .

La figura mostra che, finchè x (cioè L) varia da zero ad $R^2 C/4$ (punto A), y varia da zero a $-\infty$, e quindi T è immaginario; cioè la scarica nel sistema elettrico considerato è aperiodica. Quando x cresce, a partire dal valore $R^2 C/4$, la y è sempre positiva; essa, dapprima infinita, decresce fino ad un minimo (punto O_2 della curva), e poi torna a crescere, tendendo nuovamente all'infinito.

Il valore del minimo è, come si rileva subito dalla stessa figura, $y = R^2 C^2$ e corrisponde al valore $x = \frac{1}{2} R^2 C$. Cioè, quando l'induttanza si fa crescere a partire dal valore limite $R^2 C/4$, il periodo d'oscillazione è sempre reale; esso dapprima

decrebbe da infinito al valore minimo $2\pi RC$ (per $L = \frac{1}{2}R^2C$).

e poscia torna a crescere tendendo all'infinito; per conseguenza, un valore qualunque del periodo può ottenersi con due differenti valori di L , fra i quali passa una relazione molto semplice, che può ottenersi nel modo seguente:

Scelta una corda MN , parallela all'asse x , conducendo, per gli estremi di essa e per il punto P , le parallele ad Oy , si ottengono i punti M_1, P_1, N_1 che verificano la relazione:

$$OP_1 = \frac{OM_1 + ON_1}{2};$$

cioè, l'ascissa x_p del punto P , è uguale alla semisomma delle ascisse x_m, x_n di M e di N . Se dividiamo la precedente uguaglianza per l'ordinata comune y_p , avremo per la (3):

$$\frac{x_p}{y_p} = \frac{x_m + x_n}{2y_p} = \frac{1}{2C}$$

ossia:

$$y_p = C(x_m + x_n).$$

Questa relazione permette di calcolare il periodo d oscillazione, quando si conosce la coppia dei valori di L , per i quali quel periodo può aversi.

Se si potesse, perciò, con un mezzo opportuno, giudicare soltanto dell'uguaglianza di due periodi, con semplici misure di capacità ed induttanza, si otterrebbe il valore del periodo, indipendentemente dalla resistenza del circuito elettrico.

La conoscenza di una coppia di valori di L , come quella che abbiamo considerata, permetterebbe, inoltre, di determinare la resistenza sconosciuta del sistema. Detti L_1 ed L_2 questi valori si avrebbe

$$\frac{4L_1^2C}{4L_1 - R^2C} = \frac{4L_2^2C}{4L_2 - R^2C}$$

dalla quale si trae:

$$R = 2\sqrt{\frac{L_1 L_2}{C(L_1 + L_2)}}$$

Per tale determinazione si potrebbero scegliere due valori di L , abbastanza prossimi a quello corrispondente al minimo di T , e quindi poco differenti fra loro, per potere ritenere che, data la costanza del periodo, le condizioni della scarica, nei due casi, non siano notevolmente differenti.

Per la coppia particolare $L_1 = L_2$, corrispondente al minimo di T avremmo:

$$R = \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

Tali determinazioni, specialmente vantaggiose nel caso dei sistemi elettrici ¹⁾ comprendenti scintille, sarebbero importanti a causa delle difficoltà che s'incontrano, nella misura della resistenza di un circuito, per le correnti rapidamente oscillanti.

Se invece scegliamo per la nostra rappresentazione assi ortogonali, l'equazione dell'iperbole, riferita ai suoi assi di simmetria, diventa:

$$-\frac{X^2}{R^2 C^2} + \frac{Y^2}{R^2 C^2} = 1.$$

$$\frac{X^2}{8(C + \sqrt{1 + C^2})} + \frac{Y^2}{8(\sqrt{1 + C^2} - C)} = 1.$$

Dalle equazioni (3) degli assi, semplificate per la condizione $\omega = 90^\circ$ dalla (1') e dalla equazione precedente si deduce che, il primo asse di simmetria dovrà passare per il punto B (vedi fig. 2^a), in cui l'asse Oy viene tagliato dalla circonferenza, che ha il centro nel punto M di coordinate $(0, y_0/2)$, e per raggio MO_1 , che uno degli assintoti è la retta O_1A parallela ad Oy ; e che la distanza focale (data dalla radice dell'espressione:

$$\frac{1}{4} R^2 C \sqrt{1 + C^2} \cdot R^2 C^2 = \frac{1}{4} R^2 C \sec \theta \cdot R^2 C^2, \quad 2)$$

1) S'intende che a questi sistemi debba essere applicabile la formola (1). Le belle esperienze dei proff. A. Battelli e L. Magri (Mem. Reale Acc. delle Scienze di Torino, ser. 2, t. 51, 1902) mostrano che essa è generalmente applicabile.

2) Con θ abbiamo denotato l'angolo OAM.

cioè, data dal lato del quadrato equivalente al rettangolo $\overline{MO_1} \cdot 2 \overline{AO_1}$) è in figura rappresentata dal segmento compreso

tra O_1 ed il punto di intersezione della circonferenza costruita su M_1P come diametro con l'asse O_1Y giacchè si è preso $O_1M_1 = O_1M$ ed $\overline{O_1P} = 2\overline{O_1A}$.

Si può, con ciò, costruire facilmente la curva e ritrovare nella nuova figura le proprietà precedentemente esposte.

Con un procedimento analogo, possiamo ottenere la rappresentazione grafica della relazione fra il periodo e la capacità. In questo caso ponendo $C = x$ e $\frac{T^2}{4\pi^2} = y$, avremo dalla (1) :

$$R^2 xy + 4L^2 x - 4Ly = 0$$

la quale rappresenta un'iperbole, di cui le coordinate del centro sono:

$$(5) \quad x_0 = \frac{4L}{R^2} \quad - \quad y_0 = -\frac{4L^2}{R^2}$$

e le equazioni degli assi

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x - y - \frac{4L}{R^2}(L+1) = 0 \\ x + y + \frac{4L}{R^2}(L-1) = 0 \end{array} \right.$$

L'equazione dell'iperbole, riferita a questi assi, diventa :

$$-\frac{X^2}{64 \frac{L^3}{R^2} \cos^2 \frac{\omega}{2}} + \frac{Y^2}{64 \frac{L^3}{R^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}} = 1$$

dalla quale si deduce, che il quadrato della distanza focale è (tenuto conto delle (5)):

$$(7) \quad 64 \frac{L^3}{R^2} = 4 x_0 y_0 .$$

In particolare, se scegliamo gli assi Ox , Oy ortogonali, l'iperbole risulta equilatera.

Dalle formole (6) si vede, che il primo asse di simmetria dovrà tagliare i due assi coordinati ortogonali in due punti A e B (fig. 3^a) per i quali, indipendentemente dal segno, si ha :

$$OA = OB = x_0 + y_0$$

Fig. 3.

e l'altro asse dovrà tagliare gli assi coordinati nei punti C e D, per i quali si ha :

$$OC = OD = y_0 - x_0.$$

Nella figura, segnate due rette Ox, Oy ortogonali, ed il punto O_1 , che ha le coordinate date dalle (5), si potranno facilmente costruire i due assi di simmetria O_1X, O_1Y ; essi risulteranno evidentemente paralleli alle bisettrici della coppia Ox, Oy ; gli assintoti dell'iperbole O_1P, O_1M_1 saranno perciò, rispettivamente paralleli agli assi coordinati originari.

Per potere completare la rappresentazione, basterà determinare in figura, la distanza focale.

In virtù della (7), il suo quadrato è uguale a $4x_0y_0$, e siccome possiamo scrivere :

$$4x_0y_0 = (y_0 + x_0)^2 - (y_0 - x_0)^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2$$

concludiamo, che la distanza focale è il terzo lato, di un triangolo rettangolo, che ha l'ipotenusa uguale ad OB , ed un cateto uguale ad OC .

In figura, se il punto M ha per ascissa y_0 , O, M_1 sarà uguale ad OC , e basterà descrivere con centro in M_1 e raggio uguale ad OB , una circonferenza per ottenere sulla retta OP , i due punti P, P_1 estremi della diagonale del quadrato costruito sugli assi della curva. Il segmento O_1P sarà la distanza focale cercata. L'iperbole è con ciò determinata, essa dovrà evidentemente passare per O .

Siccome nel caso fisico la x è sempre positiva la rappresentazione cercata risulta dal ramo dell'iperbole compreso nell'angolo P_1O, M_1 , e dall'arco infinito dell'altro ramo, compreso nell'angolo AOy e contato a partire da O .

Si vede dalla figura che per x (cioè C) crescente a partire da zero, la y è positiva e rapidamente crescente; per $x = x_0$, la y diventa infinita, e negativa per tutti i valori successivi di x . In altri termini la nostra rappresentazione grafica mostra che se la capacità C di un circuito elettrico, con resistenza ed induttanza costanti, si fa variare da zero ad infinito, il circuito possiede periodo proprio d'oscillazione fino a

che è $C < \frac{4L}{R^2}$; questo periodo cresce sempre da zero ad infinito, quando C passa da zero al valore limite $\frac{4L}{R^2}$.

Volendo, infine, ottenere una rappresentazione analoga nel caso che si consideri variabile la sola R , conviene porre nella (1)

$$x = R \text{ e } y = \frac{2\pi}{T}.$$

Allora si ottiene subito l'equazione:

$$(8) \quad \frac{x^2}{\frac{4L}{C}} + \frac{y^2}{\frac{1}{LC}} = 1.$$

Scegliendo gli assi di riferimento ortogonali, questi saranno gli assi di simmetria dell'ellisse rappresentata dalla (8), e le lunghezze dei semiassi saranno:

$$a = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad b = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

La rappresentazione cercata risulta soltanto dall'arco ACB (fig. 4*) dell'ellisse, riferita ai suoi assi. Si rileva dalla figura,

che quando la resistenza varia da zero fino al valore $2\sqrt{\frac{L}{C}}$, il periodo è sempre reale e cresce dal valore $2\pi\sqrt{LC}$ fino ad

infinito; per resistenze superiori a $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ non si ha più periodo reale.

Volendo applicare le costruzioni precedenti, ai casi che più frequentemente nella pratica si possono presentare, s'incontra un inconveniente.

Scegliendo come unità di misura le elettromagnetiche assolute, risultano in generale troppo grandi i numeri che esprimono le L e le R , e troppo piccoli quelli che esprimono le C . Nè si prestano meglio le unità pratiche, nelle quali le L e le C vengono espresse da numeri troppo piccoli. Non è perciò praticamente possibile, costruire graficamente le diverse grandezze, che corrispondono a questi numeri.

È necessario, perciò, adottare, a seconda dei casi dei multipli o dei sottomultipli convenienti delle diverse unità. Così, quando si hanno delle oscillazioni lente, analoghe a quelle che si producono con l'arco cantante, converrà scegliere, p. es., come unità di misure, per le induttanze il microhenry, per le resistenze l'ohm, e per le capacità il microfarad.

Così facendo, nell'espressione

$$y = \frac{4 L^2 C}{4 L - R^2 C}$$

calcolata in unità pratiche, i numeri che esprimono L e C vengono moltiplicati per 10^6 . Essa perciò diventa:

$$\frac{4 L^2 C}{4 L - R^2 C} \cdot 10^{12}$$

cioè risulta misurata dal numero di prima moltiplicato per 10^{12} . Quindi se noi ci costruiamo il diagramma dell'espressione precedente, in funzione di L o di C , quando misuriamo le diverse grandezze con le unità precedentemente convenute, i valori di y , forniti dalla rappresentazione, sono tutti moltiplicati per 10^{12} , mentre quelli di L o di C sono moltiplicati per 10^6 . In altri termini la figura ottenuta è stirata nel senso dell'asse Oy nel rapporto di 10^6 a 1.

Quando si tratti di sistemi oscillanti con periodi più piccoli (del genere di quelli adoperati nella telegrafia senza fili) con-

verrà scegliere p. es. come unità di misure per le induttanze il centimetro, per le resistenze l'ohm, e per le capacità l'unità pratica moltiplicata per 10^{-9} . In tal caso avremo una figura stirata nel senso dell'asse Oy nel rapporto di 10^9 a 1.

Analogamente si potrà procedere, quando si considera come variabile la R .

In questo caso abbiamo posto:

$$y^2 = \frac{4L - R^2 C}{4L^2 C} \quad 1).$$

Se si sceglie, o il primo gruppo di unità precedentemente adottato, ovvero il secondo, questa relazione risulta moltiplicata, o per il fattore numerico 10^{-12} , ovvero per 10^{-18} ; mentre la R rimane sempre espressa dallo stesso numero.

Quindi la rappresentazione grafica che si ottiene, prendendo le unità dette, risulta impiccolita nel senso dell'asse y , o nel rapporto 10^6 a 1, ovvero nel rapporto 10^9 a 1.

Istituto Fisico della R. Università
Palermo 20 marzo 1907.

1) Per piccoli valori di R , si suole praticamente assumere y uguale a b . Volendo ritenere $y = b$ finchè è $y \geq \frac{n-1}{n} b$ (per n dato) si vede, che il limite superiore dei valori di R , che non influiscono su y , è sempre una determinata frazione di a (indipendente dallo schiacciamento dell'ellisse). Infatti per $y = \frac{n-1}{n} b$, abbiamo $x = \frac{a}{n} \sqrt{2n-1}$. Così p. es. se poniamo $n = 100$, si ha $x = 0,141 a$; ossia la resistenza massima trascurabile, per la nostra approssimazione, è $0,28 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$.