Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. I.

Von

J. HORN in Freiburg i. Br.

Die Theorie der regulären Lösungen der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen

$$\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_{\beta} F_{\alpha\beta}(x) \cdot y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m)$$

ist von den Herren Sauvage*) und Grünfeld**), sowie von Herrn Koenigsberger in seinem Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen***) behandelt worden. Insofern sich diese Arbeiten direct an die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen anschliessen, lassen sie die allgemeineren Verhältnisse, welche ein solches System von Differentialgleichungen gegenüber einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung darbietet, nicht genügend hervortreten. Durch die Beschäftigung mit Systemen linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen†), wobei sich die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen nicht direct verwerthen lässt, wurde ich auf die Betrachtung der oben bezeichneten Systeme hingewiesen. Ich theile hier zunächst über die Form der regulären Lösungen eines Differentialgleichungensystems von der Gestalt

$$x \frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_{\beta} (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}x + \dots) y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m)$$

*) Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles (Ann. de l'Ec. norm. 1886, 1888, 1889).

**) Ueber die Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen (Denkschriften der Wiener Academie, math.-naturw. Cl., Bd. 54, 1888).

***) Seite 441—469.

†) Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen (Act. math. Bd. 12). — Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie u. s. w. (Act. math. Bd. 14). — Ueber Systeme linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen; Freiburger Habilitationsschrift 1890 (Berlin, Mayer u. Müller).

eine Untersuchung mit, welche für eine demnächstige Veröffentlichung über Systeme totaler linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen als Grundlage dienen soll. Ausserdem mag die gegenwärtige Arbeit als Ergänzung zu den Nummern 5, 6, 7 von Capitel 6, II. des Koenigsberger'schen Lehrbuchs gelten, in welchem das Princip, die Differentialgleichungen höherer Ordnung durch Differentialgleichungssysteme mit mehreren abhängigen Veränderlichen zu ersetzen, vollständig durchgeführt ist. Ausser Koenigsberger, Capitel 6, I. wird nichts aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen vorausgesetzt, wohl aber die Weierstrass'sche Theorie der bilinearen Formen*), auf welche sich das Folgende stützt.

§ 1.

Normalform des Differentialgleichungensystems für die Umgebung eines singulären Punktes.

Um die Lösungen des Differentialgleichungensystems

$$(1) \quad x \frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m),$$

$$A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}x + a''_{\alpha\beta}x^2 + \dots$$

in der Umgebung der singulären Stelle $x = 0$ zu untersuchen, führen wir dasselbe unter Anwendung der Theorie der Transformation einer bilinearen Formenschaar in eine gewisse Normalform über. Mit Hilfe der Unbestimmten $u_1, \dots, u_m$ fassen wir die m Gleichungen (1) zusammen in

$$x \frac{d \sum_{\alpha} u_{\alpha} y_{\alpha}}{dx} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} u_{\alpha} y_{\beta}.$$

Durch die lineare Substitution

$$u_{\alpha} = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} v_{\beta}, \quad y_{\alpha} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} z_{\beta},$$

$$v_{\beta} = \sum_{\alpha} h_{\alpha\beta} u_{\alpha}, \quad z_{\beta} = \sum_{\alpha} g_{\alpha\beta} y_{\alpha}$$

möge das bilineare Formenpaar

$$\sum_{\alpha} u_{\alpha}^2 y_{\alpha}, \quad \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} u_{\alpha} y_{\beta}$$

in die Weierstrass'sche Normalform

*) Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. (Berliner Monatsberichte 1868).

$$\sum_{\alpha} v_{\alpha} z_{\alpha}, \quad \sum_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} v_{\alpha} z_{\beta}$$

übergehen. Ist

$$\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} u_{\alpha} y_{\beta} = \sum_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} v_{\alpha} z_{\beta},$$

so wird die obige zusammenfassende Gleichung

$$x \frac{d \sum_{\alpha} v_{\alpha} z_{\alpha}}{dx} = \sum_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} v_{\alpha} z_{\beta},$$

und hieraus gehen, da $v_1, \dots, v_m$ Unbestimmte sind, die m Gleichungen

$$(2) \quad x \frac{dz_{\alpha}}{dx} = \sum_{\beta} P_{\alpha\beta} z_{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m),$$

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} g_{\lambda\alpha} h_{\mu\beta} \quad (\lambda, \mu = 1, \dots, m)$$

$$= p_{\alpha\beta} + p'_{\alpha\beta} x + p''_{\alpha\beta} x^2 + \dots$$

hervor. Das Differentialgleichungssystem (2) benutzen wir als *Normalform* des Differentialgleichungssystems (1) für die Umgebung des singulären Punktes $x = 0$. Die Determinante

$$(3) \quad P(p) = |a_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta}|^*$$

nennen wir die zur singulären Stelle $x = 0$ gehörige *charakteristische Determinante* und die Gleichung

$$P(p) = |a_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta}| = (p_1 - p) \cdots (p_m - p) = 0$$

mit den Wurzeln $p_1, \dots, p_m$ (welche der determinirenden Fundamentalgleichung einer Fuchs'schen Differentialgleichung entspricht) die *charakteristische Gleichung* des Differentialgleichungssystems (1) oder (2).

Ist $p - p_{\alpha}$ ein einfacher Elementartheiler der charakteristischen Determinante, so ist

$$p_{\alpha\alpha} = p_{\alpha}, \quad p_{\alpha\beta} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, m),$$

und die α^{te} Gleichung (2) besitzt die Gestalt

$$(2a) \quad x \frac{dz_{\alpha}}{dx} = p_{\alpha} z_{\alpha} + x \sum_{\beta} p'_{\alpha\beta} z_{\beta} + \dots$$

Ist $p_{\alpha'} = p_{\alpha''} = \dots = p_{\alpha^{(e)}} = p^0$ und ist $(p - p^0)^e$ ein e -facher Elementartheiler der Determinante (3), so wird

$$p_{\alpha'\alpha'} = p^0, \quad p_{\alpha''\alpha''} = p^0, \quad \dots, \quad p_{\alpha^{(e)}\alpha^{(e)}} = p^0,$$

$$p_{\alpha''\alpha'} = 1, \quad p_{\alpha'''\alpha''} = 1, \quad \dots, \quad p_{\alpha^{(e)}\alpha^{(e-1)}} = 1,$$

*) $\delta_{\alpha\beta} = 1$ für $\alpha = \beta$, $= 0$ für $\alpha \neq \beta$.

Wenn das Differentialgleichungssystem (2) eine Lösung

$$(4) \quad z_\alpha = x^p \xi_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

besitzt, in welcher die ξ_α Potenzreihen von x sind,

$$\xi_\alpha(x) = (\xi_\alpha)_0 + (\xi_\alpha)_1 x + (\xi_\alpha)_2 x^2 + \dots,$$

so bestehen die Recursionsformeln

$$(5a) \quad \sum_{\beta} (p_{\alpha\beta} - p \delta_{\alpha\beta}) (\xi_\beta)_0 = 0,$$

$$(5b) \quad \sum_{\beta} (p_{\alpha\beta} - (p+1) \delta_{\alpha\beta}) (\xi_\beta)_1 + \sum_{\beta} p'_{\alpha\beta} (\xi_\beta)_0 = 0,$$

$$(5c) \quad \sum_{\beta} (p_{\alpha\beta} - (p+2) \delta_{\alpha\beta}) (\xi_\beta)_2 + \sum_{\beta} p'_{\alpha\beta} (\xi_\beta)_1 + \sum_{\beta} p''_{\alpha\beta} (\xi_\beta)_0 = 0,$$

.....

$$(5n) \quad \sum_{\beta} (p_{\alpha\beta} - (p+\nu) \delta_{\alpha\beta}) (\xi_\beta)_\nu + \sum_{\beta} p'_{\alpha\beta} (\xi_\beta)_{\nu-1} + \dots \\ + \sum_{\beta} p^{(\nu-1)}_{\alpha\beta} (\xi_\beta)_1 + \sum_{\beta} p^{(\nu)}_{\alpha\beta} (\xi_\beta)_0 = 0,$$

.....

Sollen die Anfangswerthe $(\xi_\alpha)_0$ der Potenzreihen ξ_α nicht sämmtlich verschwinden, so muss nach (5a) p eine der Wurzeln $p_1, \dots, p_m$ der charakteristischen Gleichung $|p_{\alpha\beta} - p \delta_{\alpha\beta}| = 0$ sein. Lassen wir aber *zunächst* die Gleichungen (5a) ausser Betracht und sehen wir p als unbestimmte Grösse an, so lassen sich vermittlest der Formeln (5b), (5c), ..., (5n), ... die Grössen $(\xi_\alpha)_1, (\xi_\alpha)_2, \dots, (\xi_\alpha)_\nu, \dots, (\alpha = 1, \dots, m)$ durch $(\xi_\alpha)_0$ ($\alpha = 1, \dots, m$) ausdrücken:

$$(\xi_\alpha)_\nu = \sum_{\beta} \frac{\mathfrak{P}_{\alpha\beta}^{(\nu)}(p)}{P(p+1) \dots P(p+\nu)} (\xi_\beta)_0,$$

wo $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}^{(\nu)}(p)$ eine ganze Function der Grössen $p, p_{\alpha\beta}, p'_{\alpha\beta}, \dots, p^{(\nu)}_{\alpha\beta}$ bedeutet. Ein verschwindender Nenner tritt nur dann auf, wenn p einen der Werthe $p = p_\alpha - \nu$ ($\alpha = 1, \dots, m; \nu = 1, 2, \dots, \infty$) erhält. Die zunächst unbestimmt gelassenen Grössen $p, (\xi_1)_0, \dots, (\xi_m)_0$ müssen *nachträglich* so gewählt werden, dass die unter alleiniger Benutzung der Recursionsformeln (5b), ... berechneten Ausdrücke (4) auch wirklich dem Differentialgleichungssystem genügen. Ist $p = p^{(i)}$ eine Wurzel der charakteristischen Gleichung und sind ausserdem noch Wurzeln $p^0, p', \dots, p^{(i-1)}$ in der Weise vorhanden, dass $p^{(i-1)} - p^{(i)} = d^{(i)}, \dots, p^0 - p' = d'$ ganze positive Zahlen sind, so verschwinden für $p = p^{(i)}$ die Ausdrücke $P(p+d^{(i)}), P(p+d^{(i)}+d^{(i-1)}), \dots, P(p+d^{(i)}+\dots+d')$ in irgend einer Ordnung; wir setzen daher voraus, dass die Anfangs-

werthe $(\xi_\alpha)_0$ desjenigen Potenzreihensystems ξ_α , in welchem nachher $p = p^{(i)}$ gesetzt werden soll, eine solche Potenz von $p - p^{(i)}$ als Factor enthalten, dass keiner der aus obiger Formel berechneten Ausdrücke $(\xi_\alpha)_\nu$ für $p = p^{(i)}$ unendlich gross wird.

Wenn die Grössen $(\xi_\alpha)_0$ in der angegebenen Weise gewählt sind, so sind die noch von p abhängigen Potenzreihen

$$\xi_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (\xi_\alpha)_\nu x^\nu$$

für hinreichend kleine Werthe von x convergent und zwar gleichmässig für alle Werthe von p , welche einer hinreichend kleinen Umgebung von $p = p^{(i)}$ angehören*). Die Formeln (5n) lassen sich unter Anwendung der Bezeichnung

$$-L_\alpha^{(\nu)}(x) = \sum_\beta p'_{\alpha\beta} x \cdot (\xi_\beta)_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \sum_\beta p_{\alpha\beta}^{(\nu)} x^\nu \cdot (\xi_\beta)_0$$

schreiben:

$$\sum_\beta (p_{\alpha\beta} - (p + \nu) \delta_{\alpha\beta}) (\xi_\beta)_\nu x^\nu = L_\alpha^{(\nu)}(x).$$

Bezeichnet man die Determinante $|p_{\alpha\beta} - (p + \nu) \delta_{\alpha\beta}|$ mit $P(p + \nu)$ und die durch $P(p + \nu)$ dividirte Adjuncte von $p_{\alpha\beta} - (p + \nu) \delta_{\alpha\beta}$ mit $R_{\lambda\alpha}(p + \nu)$, so ergibt sich:

$$(\xi_\alpha)_\nu x^\nu = \sum_\lambda R_{\lambda\alpha}(p + \nu) \cdot L_\lambda^{(\nu)}(x).$$

Wenn die Reihen $\sum_\nu p_{\alpha\beta}^{(\nu)} x^\nu$ für $|x| = r$ convergiren, so giebt

es eine Zahl σ der Art, dass für $\nu = 1, 2 \dots$ und für $|x| \leq r$ $|p_{\alpha\beta}^{(\nu)} x^\nu| < \sigma$ ist. Denkt man sich für $|x| \leq r$ und für diejenigen Werthe von p , welche einer gewissen Umgebung $\mathfrak{R}$ von $p^{(i)}$ angehören, die Maxima der Grössen $|(\xi_\beta)_0|, \dots, |(\xi_\beta)_{\nu-1} x^{\nu-1}|$ bestimmt und bezeichnet man das grösste dieser Maxima mit $Z^{(\nu)}$, so ist für den betrachteten Bereich von p

$$|L_\lambda^{(\nu)}(x)| < m \nu \sigma Z^{(\nu)}.$$

Da $\lim_{q \rightarrow \infty} q R_{\lambda\alpha}(q)$ endlich ist, so kann man einen Werth n so bestimmen, dass für $\nu \geq n$ und für alle Werthe von p im Bereich $\mathfrak{R}$ $|\nu R_{\lambda\alpha}(p + \nu)|$ kleiner als eine angebbare Zahl k ist. Dann ist aber

$$|(\xi_\alpha)_\nu x^\nu| < m^2 k \sigma Z^{(\nu)},$$

*) Das Folgende ist nur eine Reproduction des von Herrn Sauvage (Ann. de l'Éc. norm. 1886, S. 394—397) gegebenen Convergencebeweises mit den durch die bei uns vorliegenden Verhältnisse bedingten Modificationen.

und wenn man r so klein nimmt, dass $\sigma < \frac{1}{m^2 k}$ ist, so hat man für $\nu \geq n$, für $|x| \leq r$ und für das Gebiet $\Re$ von p

$$|(\xi_\alpha)_\nu x^\nu| < Z^{(\nu)} = Z^{(n)}.$$

Für $|x| < r$ hat man also, wenn $n' \geq n$ ist,

$$\left| \sum_{\nu=n'}^{\nu=\infty} (\xi_\alpha)_\nu x^\nu \right| < Z^{(n)} \left(\frac{|x|}{r} \right)^{n'} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{r}};$$

nimmt man n' hinreichend gross, so wird die rechte Seite und folglich auch die linke für alle p des angenommenen Bereiches kleiner als eine beliebig kleine Zahl. Mithin ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (\xi_\alpha)_\nu x^\nu$, wenn $|x| < r$ ist, für alle Werthe von p in der Umgebung von $p^{(i)}$ gleichmässig convergent.

Setzt man

$$(6) \quad P_\alpha(z_1, \dots, z_m) = -x \frac{dz_\alpha}{dx} + \sum_{\beta} P_{\alpha\beta} z_\beta \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

so wird, wenn man unter ξ_α die auf die angegebene Weise berechnete Potenzreihe mit den unbestimmten Grössen $p, (\xi_1)_0, \dots, (\xi_m)_0$ versteht,

$$(7) \quad P_\alpha(x^p \xi_1, \dots, x^p \xi_m) = x^p \cdot \sum_{\beta} (p_{\alpha\beta} - p \delta_{\alpha\beta}) (\xi_\beta)_0.$$

Wenn man die Grössen $(\xi_1)_0, \dots, (\xi_m)_0$ so wählen kann, dass keine der Grössen $(\xi_\alpha)_\nu$ für $p = p^{(i)}$ unendlich gross wird und dass $P_\alpha(x^p \xi_1, \dots, x^p \xi_m)$ für $p = p^{(i)}$ von der Ordnung h verschwindet, dass also

$$\left(\frac{d^\lambda P_\alpha(x^p \xi_1, \dots, x^p \xi_m)}{dp^\lambda} \right)_{p^{(i)}} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, \dots, h-1)$$

ist, so sind wegen

$$\frac{d^\lambda P_\alpha(z_1, \dots, z_m)}{dp^\lambda} = P_\alpha \left(\frac{d^\lambda z_1}{dp^\lambda}, \dots, \frac{d^\lambda z_m}{dp^\lambda} \right)$$

die h Ausdrücke

$$(8) \quad z_\alpha = \left(\frac{d^\lambda (x^p \xi_\alpha)}{dp^\lambda} \right)_{p^{(i)}} = x^{p^{(i)}} \left\{ \left(\frac{d^\lambda \xi_\alpha}{dp^\lambda} \right)_{p^{(i)}} + \binom{\lambda}{1} \left(\frac{d^{\lambda-1} \xi_\alpha}{dp^{\lambda-1}} \right)_{p^{(i)}} \log x \right. \\ \left. + \dots + \binom{\lambda}{\lambda-1} \left(\frac{d \xi_\alpha}{dp} \right)_{p^{(i)}} (\log x)^{\lambda-1} + (\xi_\alpha)_{p^{(i)}} (\log x)^\lambda \right\} \\ (\lambda = 0, 1, \dots, h-1)$$

Lösungen unseres Differentialgleichungensystems. Da die Potenzreihen $\xi_\alpha(x)$ in der Umgebung von $p = p^{(i)}$ gleichmässig convergiren, so sind

$$(\xi_\alpha(x))_{p^{(i)}}, \quad \left(\frac{d\xi_\alpha(x)}{dp}\right)_{p^{(i)}} \cdots \left(\frac{d^{h-1}\xi_\alpha(x)}{dp^{h-1}}\right)_{p^{(i)}}$$

sämmtlich Potenzreihen von x , die durch gliedweise Differentiation von $\xi_\alpha(x)$ berechnet werden.

Diejenigen der angeschriebenen Lösungen, welche nicht wirklich zum Exponenten $p^{(i)}$ gehören, werden wir ausschliessen, und es wird sich im Folgenden zeigen, dass zu einer μ -fachen Wurzel der charakteristischen Gleichung stets μ Lösungen des Differentialgleichungensystems gehören und dass man auf diesem Wege ein Fundamentalsystem von m Lösungen erhält.

§ 3.

Form der Lösungen für einfache Elementartheiler der charakteristischen Determinante.

I. Zunächst sei $p_\lambda = p^0$ für $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_r$; $p - p^0$ möge r -mal als einfacher Elementartheiler der charakteristischen Determinante auftreten und die Wurzel p^0 mit keiner anderen Wurzel der charakteristischen Gleichung eine ganzzahlige Differenz bilden. Um eine zum Exponenten p^0 gehörige Lösung zu erhalten, welche einem bestimmten der r Elementartheiler $p - p_\lambda$ entspricht, setzen wir*)

$$(9) \quad (\xi_\lambda)_0 = \varepsilon_\lambda, \quad (\xi_\alpha)_0 = 0 \quad \text{für } \alpha \geq \lambda,$$

wo ε eine Constante, etwa 1, oder eine für $p = p^0$ nicht verschwindende ganze Function von p bedeutet. Versteht man unter ξ_α die unter Zugrundlegung dieser Anfangswerthe berechnete Potenzreihe, die wir, wo es nöthig ist, mit $\xi_\alpha(x)_\lambda$ bezeichnen, so ist nach (7)

$$\begin{aligned} P_\lambda(x^p \xi_1, \dots, x^p \xi_m) &= -\varepsilon_\lambda(p - p^0) \cdot x^p, \\ P_\alpha(x^p \xi_1, \dots, x^p \xi_m) &= 0, \quad (\alpha \geq \lambda). \end{aligned}$$

Hiernach ist, wenn man den Werth der Potenzreihe $\xi_\alpha(x)_\lambda$ für $p = p^0$ mit $\xi_\alpha^0(x)_\lambda$ bezeichnet,

$$(10) \quad z_\alpha^{(\lambda)} = x^{p^0} \xi_\alpha^0(x)_\lambda$$

eine Lösung unseres Differentialgleichungensystems, welche thatsächlich zum Exponenten p^0 gehört, da der Anfangswerth von $\xi_\lambda^0(x)_\lambda$ gleich ε_λ von Null verschieden ist.

Jedem einfachen Elementartheiler $p - p^0$ der charakteristischen Determinante entspricht eine Lösung des Differentialgleichungensystems von der Form (10), vorausgesetzt dass die Wurzel p^0 sich von keiner

*) Unter λ ist hier eine bestimmte der Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ zu verstehen.

anderen Wurzel der charakteristischen Gleichung um eine ganze Zahl unterscheidet.

Die den r einfachen Elementartheilern entsprechenden Lösungen $z_\alpha^{(\lambda_1)}, \dots, z_\alpha^{(\lambda_r)}$ sind linear unabhängig, denn aus den Relationen

$$\sum_{\lambda} C_{\lambda} z_\alpha^{(\lambda)} = 0 \quad (\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

würden die Gleichungen

$$\sum_{\lambda} C_{\lambda} \xi_\alpha^0(x)_\lambda = 0$$

und, wenn man $x = 0$ setzt, die Gleichungen

$$C_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} = 0 \quad (\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

hervorgehen.

II. Weiter sei $p_{\lambda} = p^0$ für $\lambda^0 = \lambda_1^0, \dots, \lambda_r^0$, $p_{\lambda} = p'$ für $\lambda' = \lambda_1', \dots, \lambda_{r'}'$ u. s. w., $p_{\lambda^{(n)}} = p^{(n)}$ für $\lambda^{(n)} = \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_{r^{(n)}}^{(n)}$; die Differenzen $p^0 - p' = d', \dots, p^{(n-1)} - p^{(n)} = d^{(n)}$ seien ganze positive Zahlen, während keine andere Wurzel der charakteristischen Gleichung mit den angegebenen ganzzahlige Differenzen bildet; die charakteristische Determinante besitze r^0 einfache Elementartheiler $p - p^0$, r' einfache Elementartheiler $p - p'$ u. s. w., $r^{(n)}$ einfache Elementartheiler $p - p^{(n)}$.

Um die Lösung zu finden, welche einem bestimmten der Elementartheiler $p - p_{\lambda^{(i)}}$ entspricht, setzen wir*)

$$(11) \quad (\xi_{\lambda^{(i)}})_0 = \varepsilon_{\lambda^{(i)}}(p - p^{(i)})^i, \quad (\xi_\alpha)_0 = 0 \quad \text{für } \alpha \geq \lambda^{(i)}.$$

Das unter Zugrundlegung dieser Anfangswerthe bestimmte System von Potenzreihen $\xi_\alpha(x)_{\lambda^{(i)}}$ erfüllt die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_{\lambda^{(i)}}(x^p \xi_1, \dots, x^p \xi_m) &= -\varepsilon_{\lambda^{(i)}}(p - p^{(i)})^{i+1} \cdot x^p, \\ P_\alpha(x^p \xi_1, \dots, x^p \xi_m) &= 0, \quad (\alpha \geq \lambda^{(i)}). \end{aligned}$$

Folglich genügen die $i + 1$ Ausdrücke

$$z_\alpha^{(\lambda^{(i)}, h)} = \left(\frac{d^h (x^p \xi_\alpha)}{d p^h} \right)_{p^{(i)}} \quad (h = 0, 1, \dots, i)$$

unserem Differentialgleichungssystem. In unserem Falle liefern die Formeln (5b), ..., (5n), ... für $(\xi_\alpha)_v$ einen Ausdruck von der Gestalt

$$(\xi_\alpha)_v = \frac{\Omega_{\alpha \lambda^{(i)}}^{(v)}(p)}{Q(p+1) \dots Q(p+v)} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(i)}}(p - p^{(i)})^i,$$

wo

$$Q(p) = (p - p^0)(p - p') \dots (p - p^{(n)})$$

*) Unter $\lambda^{(i)}$ wird eine bestimmte der Zahlen $\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{r^{(i)}}^{(i)}$ verstanden,

$$(17) \quad \begin{aligned} (\xi_\alpha(x)_\lambda)_{p^0} &= \xi_\alpha^0(x)_\lambda, \\ \left(\frac{d\xi_\alpha(x)_\lambda}{dp} \right)_{p^0} &= \zeta'_\alpha(x)_\lambda, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \left(\frac{d^{e_\lambda-1}\xi_\alpha(x)_\lambda}{dp^{e_\lambda-1}} \right)_{p^0} &= \zeta_\alpha^{(e_\lambda-1)}(x)_\lambda, \end{aligned}$$

$$P_{\alpha_1}(x^p \xi_1, \dots, x^p \xi_m) = - \varepsilon_{\lambda(i)}(p - p^{(i)})^{e^0 + \dots + e^{(i-1)} + e_{\lambda(i)}} x^p$$

$$P_{\alpha}(x^p \xi_1, \dots, x^p \xi_m) = 0 \quad (\alpha \geq \alpha_1).$$

Wenn man $e^0 = l^0$, $e^0 + e' = l'$, $\dots$, $e^0 + \dots + e^{(i-1)} = l^{(i-1)}$, $e^0 + \dots + e^{(i-1)} + e_{\lambda(i)} = l_{\lambda(i)}$ setzt, so hat man die Lösungen

$$z_{\alpha} = \left(\frac{d^{\mu^0}(x^p \xi_{\alpha})}{d p^{\mu^0}} \right)_{p^{(i)}} \quad (\mu^0 = 0, \dots, l^0 - 1),$$

$$z_{\alpha} = \left(\frac{d^{\mu'}(x^p \xi_{\alpha})}{d p^{\mu'}} \right)_{p^{(i)}} \quad (\mu' = l^0, \dots, l' - 1),$$

$$\dots$$

$$z_{\alpha} = \left(\frac{d^{\mu^{(i-1)}}(x^p \xi_{\alpha})}{d p^{\mu^{(i-1)}}} \right)_{p^{(i)}} \quad (\mu^{(i-1)} = l^{(i-2)}, \dots, l^{(i-1)} + 1),$$

$$z_{\alpha} = \left(\frac{d^{\mu_{\lambda(i)}}(x^p \xi_{\alpha})}{d p^{\mu_{\lambda(i)}}} \right)_{p^{(i)}} \quad (\mu_{\lambda(i)} = l^{(i-1)}, \dots, l_{\lambda(i)} - 1).$$

Aus den Recursionsformeln (5b), ..., (5n), ... ergibt sich in unserem Falle

$$(\xi_{\alpha})_v = \sum_{h=1}^{h=e_{\lambda(i)}} \frac{\varOmega_{\alpha \alpha_h}^{(v)}(p) \cdot (p - p^{(i)})^{h-1}}{Q(p+1) \dots Q(p+v)} \cdot \varepsilon_{\lambda(i)}(p - p^{(i)})^{l^{(i-1)}},$$

wobei

$$Q(p) = (p - p^0)^{e^0} (p - p')^{e'} \dots (p - p^{(n)})^{e^{(n)}}$$

und $\varOmega_{\alpha \alpha_h}^{(v)}(p)$ eine rationale Function von p ist, welche für $p = p^0, p', \dots, p^{(n)}$ nicht unendlich wird. Für $p = p^{(i)}$ verschwinden hiernach

$$(\xi_{\alpha})_0, \dots, (\xi_{\alpha})_{d^{(i)}-1} \quad \text{von der Ordnung } l^{(i-1)},$$

$$(\xi_{\alpha})_{d^{(i)}}, \dots, (\xi_{\alpha})_{d^{(i)} + d^{(i-1)} - 1} \quad \text{,, ,, ,, } l^{(i-2)},$$

$$\dots$$

$$(\xi_{\alpha})_{d^{(i)} + \dots + d''}, \dots, (\xi_{\alpha})_{d^{(i)} + \dots + d' - 1} \quad \text{,, ,, ,, } l',$$

$$(\xi_{\alpha})_{d^{(i)} + \dots + d'}, \dots, (\xi_{\alpha})_{d^{(i)} + \dots + d - 1} \quad \text{,, ,, ,, } l^0;$$

man kann daher schreiben:

$$(21) \quad \left(\frac{d^{\mu^0} \xi_{\alpha}(x)_{\lambda(i)}}{d p^{\mu^0}} \right)_{p^{(i)}} = x^{d^{(i)} + \dots + d'} \xi_{\alpha}^{(0, e^0)}(x)_{\lambda(i)},$$

$$\left(\frac{d^{\mu'} \xi_{\alpha}(x)_{\lambda(i)}}{d p^{\mu'}} \right)_{p^{(i)}} = x^{d^{(i)} + \dots + d''} \xi_{\alpha}^{(1, e')}(x)_{\lambda(i)},$$

$$\dots$$

$$\begin{aligned}
 (25) \quad z_{\alpha}^{(\lambda^{(n)})} &= x^{p^{(n)}} Z_{\alpha}(x)_{\lambda^{(n)}} + x^{p^{(n-1)}} Z_{\alpha}^{(n-1)}(x)_{\lambda^{(n)}} (\log x)^{e_{\lambda^{(n)}}} \\
 &+ x^{p^{(n-2)}} Z_{\alpha}^{(n-2)}(x)_{\lambda^{(n)}} (\log x)^{e^{(n-1)} + e_{\lambda^{(n)}}} \\
 &+ \dots + x^{p^0} Z_{\alpha}^0(x)_{\lambda^{(n)}} (\log x)^{e' + \dots + e_{\lambda^{(n)}}} \\
 &\left(\lambda^0 = \lambda_1^0, \dots, \lambda_{r^0}^0; \dots; \lambda^{(n)} = \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_{r^{(n)}}^{(n)} \right),
 \end{aligned}$$

wo $Z_{\alpha}(x)_{\lambda^{(i)}}$, $Z_{\alpha}^{(i-1)}(x)_{\lambda^{(i)}}$, $\dots$, $Z_{\alpha}^0(x)_{\lambda^{(i)}}$ die durch (24) definirten ganzen Functionen von $\log x$ von den Graden $e_{\lambda^{(i)}} - 1$, $e^{(i-1)} - 1$, $\dots$, $e^0 - 1$ sind.

Eine lineare Abhängigkeit kann weder zwischen den Lösungen einer Gruppe noch zwischen den Lösungen verschiedener Gruppen stattfinden, so dass sich auf diesem Wege ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems ergibt.

Da zwischen einer Lösung $z_1, \dots, z_m$ des normalen Systems (2) und der entsprechenden Lösung $y_1, \dots, y_m$ des Systems (1) die Beziehung

$$y_{\alpha} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} z_{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m)$$

stattfindet, so bleiben die für das System (2) abgeleiteten Sätze über die Form der Lösungen für das System (1) bestehen.

Freiburg i. B., 29. Juni 1891.