Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

VON ALFRED PRINGSHEIM in Berlin.

Die Theorie der Transformation zweiten Grades für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung ist von meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Königsberger im 67^{ten} Bande des Crelle'schen Journals für Mathematik in ihren Grundzügen entwickelt worden. Ich fasse im Folgenden wesentlich diejenige Classe von Transformationsgleichungen in's Auge, welche die transformirte Thetafunction als Summe von vier mit Constanten multiplicirten Thetaquadraten des ursprünglichen Systems darstellen, werde aus dieser besonderen Form der Transformationsgleichungen einen Beweis eines für alle Transformationen paaren Grades gültigen Fundamentalsatzes, sowie die Entwicklung der zwischen gewissen Combinationen von vier Thetaquadraten stattfindenden homogenen Linear-Relationen herleiten, und werde schliesslich den speciellen Fall der Transformation zweiten Grades eingehender betrachten, für welchen die transformirten hyperelliptischen Thetafunctionen in Producte von je zwei elliptischen Theta's zerfallen, und welcher demnach die von Jacobi (in Crelle's Journal, Bd. 8.) auf rein algebraischem Wege hergestellte Reduction gewisser hyperelliptischer Integrale auf elliptische liefert. Zum besseren Verständnisse des Folgenden fasse ich zunächst die von Herrn Königsberger a. a. O. gegebenen Bezeichnungen und Hauptresultate nochmals kurz zusammen.

Es seien die beiden hyperelliptischen Systeme vorgelegt

$$(1) \quad \begin{cases} \int_1^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u_1 = 2K_{11}v_1 + 2K_{12}v_2, \\ \int_1^{x_1} \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} = u_2 = 2K_{21}v_1 + 2K_{22}v_2, \text{ wo:} \end{cases}$$

$$R(x) = x(1-x)(1-x^2)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$$

und

$$(2) \quad \begin{cases} \int_1^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{R'(y)}} + \int_1^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{R'(y)}} = u_1' = 2C_{11}v_1' + 2C_{12}v_2', \\ \int_1^{y_1} \frac{y dy}{\sqrt{R'(y)}} + \int_1^{y_2} \frac{y dy}{\sqrt{R'(y)}} = u_2' = 2C_{21}v_1' + 2C_{22}v_2', \text{ wo:} \\ R'(y) = y(1-y)(1-k^2y)(1-l^2y)(1-m^2y), \end{cases}$$

so sagt man: das System (1) werde durch eine rationale Transformation zweiten Grades in das System (2) transformirt, wenn sich in der Gleichung

$$(3) \quad \begin{cases} u_1 = \alpha u_1' + \beta u_2' \\ u_2 = \gamma u_1' + \delta u_2' \end{cases}$$

die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sowie die Moduln k, l, m dergestalt durch κ, λ, μ bestimmen lassen, dass sich die Abel'schen Functionen des transformirten Systems, also des Systems (2), als rationale Functionen zweiten Grades durch die Abel'schen Functionen des Systems (1) darstellen, dass also Relationen von der folgenden Form stattfinden:

$$\varphi'_\alpha(y_1, y_2) = \frac{\sum A_{\kappa\lambda} \varphi_\kappa(x_1 x_2) \varphi_\lambda(x_1 x_2)}{\sum B_{\mu\nu} \varphi_\mu(x_1 x_2) \varphi_\nu(x_1 x_2)} \quad \begin{array}{l} \text{(wenn wir mit } \varphi_\kappa(x_1 x_2), \varphi'_\alpha(y_1, y_2) \\ \text{etc. die bekannten symmetrischen} \\ \text{Functionen der oberen Grenzen} \\ \text{bezeichnen),} \end{array}$$

oder

$$al_\alpha(u_1', u_2') = \frac{\sum C_{\kappa\lambda} al_\mu(u_1 u_2) al_\lambda(u_1 u_2)}{\sum D_{\mu\nu} al_\mu(u_1 u_2) al_\nu(u_1 u_2)}.$$

oder endlich:

$$\vartheta_\alpha(v_1', v_2') = \frac{\sum E_{\kappa\lambda} \vartheta_\kappa(v_1 v_2) \vartheta_\lambda(v_1 v_2)}{\sum F_{\mu\nu} \vartheta_\mu(v_1 v_2) \vartheta_\nu(v_1 v_2)}.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Transformation zweiten Grades ist nun die, dass die Argumente und Moduln der transformirten Thetafunctionen sich in folgender Form durch die Argumente und Moduln der ursprünglichen darstellen lassen:

$$(4) \quad \begin{cases} v_1' = \frac{2(\omega_{22}v_1 - \omega_{12}v_2)}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, & v_2' = \frac{2(\omega_{11}v_2 - \omega_{21}v_1)}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \\ \tau_{11}' = \frac{\omega_{11}'\omega_{22} - \omega_{21}'\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12}}, & \tau_{21}' = \frac{\omega_{12}'\omega_{22} - \omega_{22}'\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \\ \tau_{12}' = \frac{\omega_{21}'\omega_{11} - \omega_{11}'\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, & \tau_{22}' = \frac{\omega_{22}'\omega_{11} - \omega_{12}'\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \end{cases}$$

wo die Grössen ω, ω' durch folgende Gleichungen definirt sind:

$$(5) \quad \begin{cases} \omega_{11} = \varrho_{11} + \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{21}\tau_{12}, & \omega_{21} = \varrho_{21} + \sigma_{11}\tau_{21} + \sigma_{21}\tau_{22}, \\ \omega_{12} = \varrho_{12} + \sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{12}, & \omega_{22} = \varrho_{22} + \sigma_{12}\tau_{21} + \sigma_{22}\tau_{22}, \\ \omega_{11}' = \varrho_{11}' + \sigma_{11}'\tau_{11} + \sigma_{21}'\tau_{12}, & \omega_{21}' = \varrho_{21}' + \sigma_{11}'\tau_{21} + \sigma_{21}'\tau_{22}, \\ \omega_{12}' = \varrho_{12}' + \sigma_{12}'\tau_{11} + \sigma_{22}'\tau_{12}, & \omega_{22}' = \varrho_{22}' + \sigma_{12}'\tau_{21} + \sigma_{22}'\tau_{22}, \end{cases}$$

während die ϱ , σ , ϱ' , σ' ganze Zahlen bedeuten, welche lediglich den folgenden sechs Gleichungen:

$$(6) \begin{cases} \sum_{1,2} \alpha (\varrho_{1\alpha} \varrho'_{2\alpha} - \varrho_{2\alpha} \varrho'_{1\alpha}) = 0, & \sum_{1,2} \alpha (\varrho_{2\alpha} \sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha} \varrho'_{2\alpha}) = 0, \\ \sum_{1,2} \alpha (\sigma_{1\alpha} \sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha} \sigma'_{1\alpha}) = 0, & \sum_{1,2} \alpha (\varrho_{1\alpha} \sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha} \varrho'_{1\alpha}) = 2, \\ \sum_{1,2} \alpha (\varrho_{1\alpha} \sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha} \varrho'_{1\alpha}) = 0, & \sum_{1,2} \alpha (\varrho_{2\alpha} \sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha} \varrho'_{2\alpha}) = 2, \end{cases}$$

oder auch den diesen letzteren äquivalenten:

$$(7) \begin{cases} \sum_{1,2} \alpha (\varrho_{\alpha 1} \sigma_{\alpha 2} - \varrho_{\alpha 2} \sigma_{\alpha 1}) = 0, & \sum_{1,2} \alpha (\varrho_{\alpha 2} \sigma'_{\alpha 1} - \sigma_{\alpha 2} \varrho'_{\alpha 1}) = 0, \\ \sum_{1,2} \alpha (\varrho'_{\alpha 1} \sigma'_{\alpha 2} - \varrho'_{\alpha 2} \sigma'_{\alpha 1}) = 0, & \sum_{1,2} \alpha (\varrho_{\alpha 1} \sigma'_{\alpha 1} - \sigma_{\alpha 1} \varrho'_{\alpha 1}) = 2, \\ \sum_{1,2} \alpha (\varrho_{\alpha 1} \sigma'_{\alpha 2} - \sigma_{\alpha 1} \varrho'_{\alpha 2}) = 0, & \sum_{1,2} \alpha (\varrho_{\alpha 2} \sigma'_{\alpha 2} - \sigma_{\alpha 2} \varrho'_{\alpha 2}) = 2 \end{cases}$$

zu genügen haben, im Uebrigen aber beliebig sind.

Setzt man dann nach Hermite

$$(8) \quad \mathcal{C}(v_1, v_2) \cdot \pi^i \cdot \partial_\lambda (v_1', v_2' \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \Pi_\lambda (v_1, v_2),$$

wo $f(v_1, v_2)$ — was zu beachten ist — eine *homogene* und vom Index λ *unabhängige* ganze Function von v_1, v_2 ist, nämlich:

$$(9) \quad f(v_1, v_2) = -(\sigma_{11}' v_1 + \sigma_{21}' v_2) (\sigma_{11} v_1 + \sigma_{21} v_2) \\ - (\sigma_{12}' v_1 + \sigma_{22}' v_2) (\sigma_{12} v_1 + \sigma_{22} v_2) + \tau_{11}' (\sigma_{11} v_1 + \sigma_{21} v_2)^2 \\ + 2 \tau_{12}' (\sigma_{11} v_1 + \sigma_{21} v_2) (\sigma_{12} v_1 + \sigma_{22} v_2) + \tau_{22}' (\sigma_{12} v_1 + \sigma_{22} v_2)^2,$$

so genügt die so definirte Π -Function den folgenden vier charakteristischen Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{cases} \Pi(v_1 + 1, v_2)_\lambda = (-1)^m \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1, v_2 + 1)_\lambda = (-1)^n \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1 + \tau_{12}, v_2 + \tau_{22})_\lambda = (-1)^p \Pi(v_1, v_2)_\lambda \cdot e^{-2\pi i (2v_2 + \tau_{22})}, \\ \Pi(v_1 + \tau_{11}, v_2 + \tau_{21})_\lambda = (-1)^q \Pi(v_1, v_2)_\lambda \cdot e^{-2\pi i (2v_1 + \tau_{11})}, \end{cases}$$

wenn m, n, p, q , folgendermassen zusammengesetzte ganze Zahlen bedeuten:

$$(11) \quad \begin{cases} m = n_1^2 \sigma_{11}' + n_2^2 \sigma_{12}' - m_2^2 \sigma_{12} - m_1^2 \sigma_{11} - \sigma_{11} \sigma_{11}' - \sigma_{12} \sigma_{12}', \\ n = n_1^2 \sigma_{21}' + n_2^2 \sigma_{22}' - m_2^2 \sigma_{22} - m_1^2 \sigma_{21} - \sigma_{21} \sigma_{21}' - \sigma_{22} \sigma_{22}', \\ p = -n_1^2 \varrho_{21}' - n_2^2 \varrho_{22}' + m_2^2 \varrho_{22} + m_1^2 \varrho_{21} - \varrho_{21} \varrho_{21}' - \varrho_{22} \varrho_{22}', \\ q = -n_1^2 \varrho_{11}' - n_2^2 \varrho_{12}' + m_2^2 \varrho_{12} + m_1^2 \varrho_{11} - \varrho_{11} \varrho_{11}' - \varrho_{12} \varrho_{12}', \end{cases}$$

worin wiederum $m_\lambda^2, n_\lambda^2, n_\lambda^2$ die den Index λ bestimmenden Parameter, 0 oder ± 1 , bezeichnen.

Wird hierauf die Π -Function, welche den Charakter einer ganzen Function hat, als eine Fourier'sche Reihe von folgender Form dargestellt:

$$(12) \Pi_1(v_1 v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{r_1, r_2} e^{\pi i \left\{ (2v_1 + m)v_1 + (2v_2 + n)v_2 \right\} + \frac{\pi i}{8} \left\{ 2v_1 + m)^2 \tau_{11} + 2(2v_1 + m)(2v_2 + n)\tau_{12} + (2v_2 + n)^2 \tau_{22} \right\}},$$

so reduciren sich vermöge der Bedingungsgleichungen (10) die verschiedenen Coefficienten $A_{\mu\nu}$ auf vier, wenn m, n, p, q *sämmtlich* gerade, auf *zwei*, wenn eine oder mehrere dieser Zahlen ungerade, während sich die mit diesen Coefficienten multiplicirten unendlichen Reihen durch die Bemerkung ergeben, dass

im ersten Falle das Quadrat einer ϑ -Function
im zweiten Falle das Product zweier ϑ -Functionen } mit den Argumenten v_1, v_2 und den Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$
den Bedingungsgleichungen (10) Genüge leisten.

Man erhält demnach die Function $\Pi_1(v_1 v_2)$ d. h. die transformirte Thetafunction $\vartheta_1(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$ als ein Aggregat von vier ϑ -Quadraten, wenn

$$m \equiv n \equiv p \equiv q \equiv 0 \pmod{2};$$

hingegen als ein Aggregat von zwei ϑ -Producten, wenn wenigstens eine der Grössen m, n, p, q ungerade ist.

Schliesslich bestimmen sich die Coefficienten in den Gleichungen:

$$(13) \quad \Pi_1(v_1 v_2) = (\alpha) \vartheta_{\alpha}^2(v_1 v_2) + (\beta) \vartheta_{\beta}^2(v_1 v_2) + (\gamma) \vartheta_{\gamma}^2(v_1 v_2) + (\delta) \vartheta_{\delta}^2(v_1 v_2),$$

$$(14) \quad \Pi_1(v_1 v_2) = (1) \vartheta_{\alpha}(v_1 v_2) \vartheta_{\beta}(v_1 v_2) + (2) \vartheta_{\alpha\gamma}(v_1 v_2) \vartheta_{\beta\gamma}(v_1 v_2),$$

indem man von den Substitutionen

$$\frac{1}{2} \omega_{11}, \frac{1}{2} \omega_{21}; \quad \frac{1}{2} \omega_{12}, \frac{1}{2} \omega_{22}; \quad \frac{1}{2} \omega_{11}', \frac{1}{2} \omega_{12}'; \quad \frac{1}{2} \omega_{21}', \frac{1}{2} \omega_{22}';$$

resp. deren Summen oder Differenzen — welche sämmtlich den Index der linken Seite nicht ändern, solche auswählt, welche die Indices der rechten Seite ändern und alsdann durch Nullsetzen der Argumente die nothwendige Anzahl von Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten herstellt. —

Ich will nun untersuchen, ob überhaupt resp. wie viel transformirte ϑ -Functionen sich für eine ganz beliebige Transformation zweiten Grades in der Form von vier ϑ -Quadraten darstellen, d. h. ich will finden, für wie viele Combinationen der Grössen $m_1^2, m_2^2, n_1^2, n_2^2$ die Zahlen m, n, p, q sämmtlich gerade sind.

Hierzu fasse ich zunächst die 15 Hermite'schen Repräsentanten der nicht äquivalenten Classen in's Auge. Ordnet man die Transformationszahlen nach dem Schema:

$$(15) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' - \sigma_{12} - \sigma_{11} \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' - \sigma_{22} - \sigma_{21} \\ -\varrho_{21}' - \varrho_{22}' & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho_{11}' - \varrho_{12}' & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{pmatrix}$$

so lassen sich jene in folgende vier Hauptformen zusammenfassen

$$(16) \quad \begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & i & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & i & i'' \\ 0 & 2 & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

wo i, i', i'' alle Combinationen von 0 und 1 bedeuten — und es nehmen hierfür die Zahlen m, n, p, q die folgenden Werthe an:

$$(16^a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline m = n_1^2, & m = n_1^2 & m = 2n_1^2 + in_2^2 + i'm_1^2 - 2i', \\ n = n_2^2, & n = n_2^2 + im_2^2 + 2i, & n = n_2^2, \\ p = 2m_2^2, & p = m_2^2, & p = 2m_2^2 - im_1^2, \\ q = 2m_1^2, & q = 2m_1^2, & q = m_1^2, \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} D \\ \hline m = 2n_1^2 + im_2^2 + i'm_1^2 + 2i' \\ n = 2n_2^2 + i''m_2^2 + im_1^2 + 2i'' \\ p = m_2^2, \\ q = m_1^2. \end{array} \end{array} \right.$$

Sollen nun für A) m, n, p, q sämmtlich gerade sein, so muss zunächst jedenfalls

$$n_1^2 = 0, \quad n_2^2 = 0$$

sein; dagegen sind m_1^2 und m_2^2 beliebig und man erhält daher folgende Combinationen:

$$\begin{array}{llll} m_1^2 = 0, & m_2^2 = 0, & n_1^2 = 0, & n_2^2 = 0, \text{ — also Index } \lambda = 5, \\ m_1^2 = -1, & m_2^2 = 0, & n_1^2 = 0, & n_2^2 = 0, \text{ — „ „ } \lambda = 12, \\ m_1^2 = 0, & m_2^2 = -1, & n_1^2 = 0, & n_2^2 = 0, \text{ — „ „ } \lambda = 34, \\ m_1^2 = -1, & m_2^2 = -1, & n_1^2 = 0, & n_2^2 = 0, \text{ — „ „ } \lambda = 0. \end{array}$$

Sollen ferner für B) m, n, p, q sämmtlich gerade sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass

$$m_2^2 = 0, \quad n_1^2 = 0.$$

Verbinden wir diese Werthe wieder mit allen möglichen Combinationen $(0, 0), (-1, 0), (0, 1), (-1, 1)$ für die Grössen m_1^2, n_2^2 , so erhalten wir die vier Indices:

5, 12, 4, 03.

Für C) ergeben sich durch die Zusammenstellung von:

$$m_1^2 = 0, \quad n_2^2 = 0$$

mit allen möglichen Werthepaaren von m_2^2, n_1^2 die Indices:

5, 34, 01, 2

und endlich für D) durch die Verbindung von:

$$m_1^2 = 0, \quad m_2^2 = 0$$

mit allen möglichen Combinationen von n_1^2, n_2^2 die Indices:

5, 01, 4, 23,

d. h.: Es giebt für jede der vier Repräsentantenformen vier und *nur* vier transformirte ϑ -Functionen, nämlich:

$$(17) \begin{cases} \text{für } (A): & \Pi_5(v_1, v_2), \quad \Pi_0(v_1, v_2), \quad \Pi_{12}(v_1, v_2), \quad \Pi_{34}(v_1, v_2), \\ \text{für } (B): & \Pi_5(v_1, v_2), \quad \Pi_4(v_1, v_2), \quad \Pi_{03}(v_1, v_2), \quad \Pi_{12}(v_1, v_2), \\ \text{für } (C): & \Pi_5(v_1, v_2), \quad \Pi_2(v_1, v_2), \quad \Pi_{01}(v_1, v_2), \quad \Pi_{34}(v_1, v_2), \\ \text{für } (D): & \Pi_5(v_1, v_2), \quad \Pi_4(v_1, v_2), \quad \Pi_{01}(v_1, v_2), \quad \Pi_{23}(v_1, v_2), \end{cases}$$

(worunter also jedesmal die ϑ -Function ohne Parameter, $\vartheta_5(v_1', v_2')$ —), welche sich in der Form von vier ϑ -Quadraten des ursprünglichen Systems darstellen.

Nun lässt sich eine jede beliebige Transformation zweiten Grades zusammensetzen aus einer der 15 Repräsentanten-Transformationen und einer Lineartransformation. Da aber bei der letzteren das transformirte Theta gleich ist irgend einer der ursprünglichen ϑ -Functionen — nur multiplicirt mit einer Constanten und einem Exponential-Factor — so folgt unmittelbar, dass auch für eine ganz beliebige Transformation zweiten Grades vier und *nur* vier transformirte ϑ -Functionen existiren müssen, welche gleich sind einem Aggregate von vier primären ϑ -Quadraten.

Sei jetzt $\vartheta_2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$ eine transformirte ϑ -Function, welche sich für irgend eine beliebige Transformation zweiten Grades in der Form von vier ϑ -Quadraten ergibt, also

$$(18) \quad e^{f(v_1, v_2)} \vartheta_2(v_1', v_2') = \Pi_2(v_1, v_2) = (\alpha) \vartheta_{\alpha}^2(v_1, v_2) + (\beta) \vartheta_{\beta}^2(v_1, v_2) \\ + (\gamma) \vartheta_{\gamma}^2(v_1, v_2) + (\delta) \vartheta_{\delta}^2(v_1, v_2),$$

so lassen sich, weil vermöge der Gleichungen

$$(19) \quad \begin{cases} v_1' = \sigma_{11}' v_1 + \sigma_{21}' v_2 - \tau_{11}' (\sigma_{11} v_1 + \sigma_{21} v_2) - \tau_{12}' (\sigma_{12} v_1 + \sigma_{22} v_2), \\ v_2' = \sigma_{12}' v_1 + \sigma_{22}' v_2 - \tau_{21}' (\sigma_{11} v_1 + \sigma_{21} v_2) - \tau_{22}' (\sigma_{12} v_1 + \sigma_{22} v_2), \end{cases}$$

(welche aus den in (4) gegebenen Ausdrücken hervorgehen, wenn

man die Grössen $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ der rechten Seite durch $\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'$ ausdrückt) jede Vermehrung der Argumente v_1, v_2 um halbe Perioden nur eine Vermehrung der Argumente v_1', v_2' um halbe oder ganze Perioden zur Folge hat, durch Substitutionen von der Form

$$(20) \quad v_1 + \frac{m_1}{2} + \frac{n_1}{2} \tau_{11} + \frac{n_2}{2} \tau_{12}, \quad v_2 + \frac{m_2}{2} + \frac{n_1}{2} \tau_{21} + \frac{n_2}{2} \tau_{22},$$

$$(m_1, m_2, n_1, n_2 = 0 \text{ od. } \pm 1)$$

aus $\vartheta_1(v_1', v_2')$ noch weitere transformirte ϑ -Functionen mit anderen Indices ableiten. Da es aber nach dem Obigen überhaupt nur vier transformirte ϑ -Functionen giebt, welche als Summe von vier ϑ -Quadraten darstellbar sind, so folgt, dass alle möglichen für v_1, v_2 gemachten Substitutionen von der Form (20) auf den Index λ nur drei Veränderungen hervorbringen können, mithin für die Argumente v_1', v_2' nur noch drei von einander und von den ursprünglichen Werthen um halbe Perioden verschiedene Ausdrücke liefern können. Da diese letztere Eigenschaft aber offenbar unabhängig vom Index λ ist und lediglich auf der Beziehung der Argumente v_1', v_2' zu v_1, v_2 beruht, so muss sie für jedes beliebige transformirte Theta gelten, also auch für diejenigen transformirten ϑ -Functionen, welche sich in der Form von zwei ϑ -Producten darstellen lassen.

Andererseits lässt sich auch zeigen, dass die Substitutionen (20) *nicht weniger* als drei Veränderungen auf den Index λ hervorbringen können. Angenommen sie brächten nur zwei hervor, so würden sich aus dem transformirten $\vartheta_5(v_1', v_2')$ durch Anwendung der betreffenden Substitutionen zwei weitere transformirte Functionen $\vartheta_\mu(v_1', v_2')$ und $\vartheta_\nu(v_1', v_2')$ herleiten lassen. Dann giebt aber die Addition dieser beiden Substitutionen offenbar eine dritte Function $\vartheta_{\mu\nu}(v_1', v_2')$, und zwar kann nicht etwa $\mu\nu = 5$ sein, da ja μ und ν verschieden sein sollten.

Brächten ferner die fünfzehn möglichen Substitutionen (20) auf den Index λ nur *eine* Veränderung hervor, so müssten offenbar mindestens *acht* solcher Substitutionen den Index λ in sich selbst oder in einen und denselben anderen Index überführen. Unter acht Substitutionen müssen sich aber immer *vier* unabhängige befinden — d. h. solche, welche sich nicht durch Addition aus einander zusammensetzen lassen — da man aus *drei* unabhängigen Substitutionen

$$\alpha, \beta, \gamma^*)$$

im Ganzen nur sieben Substitutionen bilden kann, nämlich ausser jenen selbst noch:

*) Ich bezeichne durch α diejenige Substitution, welche $\vartheta_5(v_1, v_2)$ in $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ überführt, also die Substitution:

$$v_1 + \frac{1}{2} m_1^\alpha + \frac{1}{2} n_1^\alpha \tau_{11} + \frac{1}{2} n_2^\alpha \tau_{12}, \quad v_2 + \frac{1}{2} m_2^\alpha + \frac{1}{2} n_2^\alpha \tau_{21} + \frac{1}{2} n_2^\alpha \tau_{22}.$$

$$\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma.$$

Aus vier unabhängigen Substitutionen kann man jedoch die sämtlichen fünfzehn verschiedenen Substitutionen durch Combination zu je 1, 2, 3, 4 erhalten, es folgt somit, dass in diesem Falle alle fünfzehn Substitutionen den Index λ in sich selbst oder in einen einzigen Index μ überführen würden. Da es aber unter diesen Substitutionen sicherlich solche giebt, welche den Index λ unverändert lassen (worauf ja lediglich die Coefficientenbestimmung bei der Transformation zweiten Grades beruht), so müssten alle fünfzehn den Index λ in sich selbst überführen, d. h. v_1', v_2' , nur um ganze Perioden verändern. Betrachtet man nun die einfachsten jener Substitutionen:

$$(21^a) \quad \begin{cases} v_1 - \frac{1}{2}, & v_1, & v_1 + \frac{1}{2}\tau_{11}, & v_1 + \frac{1}{2}\tau_{12}, \\ v_2, & v_2 - \frac{1}{2}, & v_2 + \frac{1}{2}\tau_{21}, & v_2 + \frac{1}{2}\tau_{22}, \end{cases}$$

welchen vermöge der Gleichungen (19) die folgenden Werthe der Argumente v_1', v_2' , entsprechen:

$$(21^b) \quad \begin{cases} v_1' - \frac{1}{2}\sigma_{11}' + \frac{1}{2}\sigma_{11}\tau_{11}' + \frac{1}{2}\sigma_{12}\tau_{12}', \\ v_1' - \frac{1}{2}\sigma_{21}' + \frac{1}{2}\sigma_{21}\tau_{11}' + \frac{1}{2}\sigma_{22}\tau_{12}', \\ v_1' - \frac{1}{2}\varrho_{11}' + \frac{1}{2}\varrho_{11}\tau_{11}' + \frac{1}{2}\varrho_{12}\tau_{12}', \\ v_1' - \frac{1}{2}\varrho_{21}' + \frac{1}{2}\varrho_{21}\tau_{11}' + \frac{1}{2}\varrho_{22}\tau_{12}', \\ v_2' - \frac{1}{2}\sigma_{12}' + \frac{1}{2}\sigma_{11}\tau_{21}' + \frac{1}{2}\sigma_{12}\tau_{22}', \\ v_2' - \frac{1}{2}\sigma_{22}' + \frac{1}{2}\sigma_{21}\tau_{21}' + \frac{1}{2}\sigma_{22}\tau_{22}', \\ v_2' - \frac{1}{2}\varrho_{12}' + \frac{1}{2}\varrho_{11}\tau_{21}' + \frac{1}{2}\varrho_{12}\tau_{22}', \\ v_2' - \frac{1}{2}\varrho_{22}' + \frac{1}{2}\varrho_{21}\tau_{21}' + \frac{1}{2}\varrho_{22}\tau_{22}', \end{cases}$$

so ist klar, dass die Incremente von v_1', v_2' nur dann sämtlich ganze Perioden sein könnten, wenn die Transformationszahlen $\varrho, \sigma, \varrho', \sigma'$ durchgängig gerade Zahlen wären. Dies ist aber unmöglich, da die linke Seite der Bedingungsgleichung

$$\sum_{\lambda, \alpha} (\varrho_{1\alpha}\sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 2$$

nicht durch 4 theilbar sein kann. Es führt somit auch die Annahme, dass die Substitutionen (20) nur eine oder gar keine Veränderung auf den Index λ der transformirten ϑ -Function hervorbringen könnten, auf einen Widerspruch.

Daraus ergibt sich aber der Satz:

Bei jeder Transformation zweiten Grades für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung lassen sich aus dem Ausdrucke für eine transformirte ϑ -Function drei und immer nur drei weitere transformirte ϑ -Functionen durch Substitution von halben Perioden ableiten.

Erwägt man noch, dass sich eine Transformation von beliebigem

paaren Grade $2n$ zusammensetzen lässt aus einer Transformation n^{ten} und einer zweiten Grades, so folgt die Giltigkeit dieses Satzes auch für jeden beliebigen geradzahligem Transformationsgrad in der beschränkteren Form, dass *höchstens drei* Veränderungen des transformirten $\vartheta_1(v_1', v_2')$ durch Substitutionen von halben Perioden möglich sind, während andererseits hier auch noch der Fall eintreten kann, dass alle möglichen Substitutionen (20) *gar keine* Veränderung des Index λ hervorbringen — insofern für einen Transformationsgrad von der Form $4m$ die Möglichkeit, dass *sämmtliche* Transformationszahlen $\equiv 0 \pmod{2}$ seien, durch die Bedingungsgleichung

$$\sum_{1,2} \alpha (\varrho_{1\alpha} \sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha} \varrho'_{1\alpha}) = 4m$$

nicht ausgeschlossen ist. Da man indessen solche Transformationen, bei denen *sämmtliche* Transformationszahlen einen gemeinsamen Theiler (hier 2) haben, bei der Betrachtung des allgemeinen rationalen Transformationsproblems von vornherein auszuschliessen pflegt — sie führen nämlich auf Transformationen niederer Grade in Verbindung mit sogenannten Multiplicationen der hyperelliptischen Functionen — so können wir unter dieser Voraussetzung den obigen Satz auch für Transformationen von beliebigem paaren Grade ohne Weiteres als gültig betrachten.

Sei λ der Index einer transformirten ϑ -Function, welche sich für irgend eine Transformation zweiten Grades als Summe von 4 ϑ -Quadraten darstellen lässt, also:

$\Pi_\lambda(v_1, v_2) = (\alpha) \vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta) \vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma) \vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta) \vartheta_\delta^2(v_1, v_2)$, dann ist die Wahl der vier Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durchaus unabhängig von λ und nur durch die einzige Bedingung beschränkt, dass zwischen den vier gewählten ϑ -Quadraten keine lineare Relation bestehe. Ist diese Bedingung erfüllt, so ergeben sich die Coefficienten $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$ durch geeignete Substitutionen in halben Perioden als endliche bestimmte Constanten. Man kann hieraus umgekehrt schliessen, dass, wenn $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$ sich nicht in dieser Weise bestimmen lassen und ausserdem $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ von einander unabhängig sind, zwischen $\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2), \vartheta_\beta^2(v_1, v_2), \vartheta_\gamma^2(v_1, v_2), \vartheta_\delta^2(v_1, v_2)$ eine lineare Relation bestehen muss. Dieser Fall tritt aber ein, sobald man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Indices ungerader ϑ -Functionen wählt — woraus folgt, dass zwischen je viieren der sechs ϑ -Quadrate mit den Indices:

$$1, 3, 13, 02, 04, 24$$

eine lineare Relation stattfindet. Solche Relationen gäbe es im Ganzen 15, da sich jene 6 Grössen fünfzehnmal zu je 4 combiniren lassen. Von diesen 15 möglichen Relationen braucht man indess nur

6 zu betrachten, da alle übrigen sich durch Elimination aus je zweien von diesen 6*) ergeben müssen, wobei es am bequemsten sein wird 6 solche Relationen zu wählen, bei welchen die Indices cyclisch vorrücken, sodass also jede Relation von der nächstfolgenden sich nur in einem einzigen Index unterscheidet. Denkt man sich nun auf diese 6 Relationen die 15 möglichen Substitutionen in halben Perioden angewendet — wobei die Indices nach dem folgenden Schema variiren:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad 3, \quad 13, \quad 02, \quad 04, \quad 24, \\ 01, \quad 03, \quad 24, \quad 2, \quad 4, \quad 13, \\ 5, \quad 13, \quad 3, \quad 34, \quad 23, \quad 03, \\ 12, \quad 23, \quad 04, \quad 0, \quad 13, \quad 4, \\ 13, \quad 5, \quad 1, \quad 14, \quad 12, \quad 01, \\ 14, \quad 34, \quad 02, \quad 13, \quad 0, \quad 2, \\ 0, \quad 24, \quad 03, \quad 12, \quad 14, \quad 3, \\ 34, \quad 14, \quad 4, \quad 5, \quad 24, \quad 04, \\ 24, \quad 0, \quad 01, \quad 23, \quad 34, \quad 1, \\ 23, \quad 12, \quad 2, \quad 24, \quad 5, \quad 02, \\ 2, \quad 04, \quad 23, \quad 02, \quad 3, \quad 14, \\ 3, \quad 1, \quad 5, \quad 4, \quad 2, \quad 0, \\ 4, \quad 02, \quad 34, \quad 3, \quad 01, \quad 12, \\ 04, \quad 2, \quad 12, \quad 03, \quad 1, \quad 34, \\ 03, \quad 01, \quad 0, \quad 04, \quad 02, \quad 5, \\ 02, \quad 4, \quad 14, \quad 1, \quad 03, \quad 23, \end{array} \right.$$

so erhält man — mit Einschluss der ersten 6 — im Ganzen 96 solcher Relationen. Beachtet man hierbei den Umstand, dass jede Horizontalreihe des Schemas (22) mit der ersten oder mit einer beliebigen anderen immer nur 2 Elemente gemein hat, so folgt, dass die Relationen, welche aus zwei verschiedenen Horizontalreihen hervorgehen, sich um mindestens 2 Indices von einander unterscheiden müssen. Da andererseits die 6 Relationen, deren Indices aus einer und derselben Horizontalreihe hervorgehen, wegen der Wahl der primären Relationen sich nur in je einem Index von einander unterscheiden, so ergibt sich, dass die sämtlichen 96 Relationen von einander verschieden sein müssen, und dass man auch nicht irgend eine von ihnen durch Elimination aus zweien der übrigen herstellen kann. Nun giebt es aber nach Rosenhain (cf. Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, etc. par M. George Rosenhain, page 425) im Ganzen 96 solcher linearer Beziehungen zwischen je vier $\mathfrak{S}$ -Quadraten. Wir können somit schliessen, dass die auf dem soeben angegebenen Wege resultirenden 96 Relationen mit dem Rosenhain'schen identisch oder ihnen äquivalent sind.

*) von denen auch nur 3 wirklich unabhängig sind.

$$(23) \quad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2)_4 = (\mu)\vartheta_\mu^2(v_1, v_2) + (1)\vartheta_1^2(v_1, v_2) + (3)\vartheta_3^2(v_1, v_2) \\ \qquad\qquad\qquad + (13)\vartheta_{13}^2(v_1, v_2), \\ \Pi(v_1, v_2)_2 = (\mu)\vartheta_\mu^2(v_1, v_2) + (3')\vartheta_{3'}^2(v_1, v_2) + (13')\vartheta_{13'}^2(v_1, v_2) \\ \qquad\qquad\qquad + (02)\vartheta_{02}^2(v_1, v_2) \end{cases}$$

Bestimmt man alsdann die Coefficienten (μ) , (1) , (3) etc., so zeigt sich, dass derjenige von $\vartheta_{\mu}^2(v_1 v_2)$ in allen Gleichungen derselbe, nämlich $= \frac{\Pi_2(0, 0)}{\vartheta_{\mu}^2(0, 0)}$ ist, während alle übrigen Coefficienten rationale

Es ist indessen bequemer die Methode der Coefficientenbestimmung, welche man zur Berechnung der Ausdrücke (23) anwenden würde, ganz unmittelbar zur Entwicklung der gesuchten Relationen zu benutzen, insofern man alsdann in der Wahl der anzuwendenden Substitutionen völlig unbeschränkt ist und demgemäss stets solche Substitutionen anwenden kann, welche eine möglichst einfache Coefficientenbestimmung ergeben. Nachdem nämlich überhaupt erst festgestellt ist, dass zwischen vier Quadraten ungerader ϑ -Functionen eine lineare Relation bestehen muss, so kann man offenbar ohne Weiteres setzen:

oder:

$$(24) \quad A \, \vartheta_{\alpha}^2(v_1, v_2) + B \, \vartheta_{\beta}^2(v_1, v_2) + C \, \vartheta_{\gamma}^2(v_1, v_2) = \vartheta_{\delta}^2(v_1, v_2),$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Indices ungerader ϑ -Functionen bezeichnen).

Beachtet man nun, dass zwei ϑ -Functionen

$$\vartheta_{\mu}(v_1, v_2), \quad \vartheta_{\nu}(v_1, v_2)$$

durch eine Substitution, deren Index aus μ und ν zusammengesetzt ist, übergehen in

$$C_1 \cdot \vartheta_{\nu}(v_1, v_2), \quad C_2 \cdot \vartheta_{\mu}(v_1, v_2),$$

so ergibt sich, dass durch Anwendung der drei Substitutionen $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, auf Gleichung (24) jede der resultirenden Gleichungen immer wieder zwei ungerade ϑ -Functionen enthalten muss, so dass man für $v_1 = v_2 = 0$ die folgenden einfachen Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten erhält:

$$C \vartheta_{\alpha\beta\gamma}^2 = \varepsilon \cdot \vartheta_{\alpha\beta\delta}^2, \quad \text{also:} \quad C = \varepsilon \cdot \frac{\vartheta_{\alpha\beta\delta}^2}{\vartheta_{\alpha\beta\gamma}^2},$$

$$B \vartheta_{\alpha\beta\gamma}^2 = \varepsilon' \cdot \vartheta_{\alpha\gamma\delta}^2, \quad ,, \quad B = \varepsilon' \cdot \frac{\vartheta_{\alpha\gamma\delta}^2}{\vartheta_{\alpha\beta\gamma}^2},$$

$$A \vartheta_{\alpha\beta\gamma}^2 = \varepsilon'' \cdot \vartheta_{\beta\gamma\delta}^2, \quad ,, \quad A = \varepsilon'' \cdot \frac{\vartheta_{\beta\gamma\delta}^2}{\vartheta_{\alpha\beta\gamma}^2},$$

(wenn ε , ε' , ε'' den Factor ± 1 bezeichnen), und die gesuchte Relation somit folgendermassen lautet:

$$(25) \varepsilon' \vartheta_{\beta\gamma\delta}^2 \vartheta_{\alpha}^2(v_1, v_2) + \varepsilon' \vartheta_{\alpha\gamma\delta}^2 \vartheta_{\beta}^2(v_1, v_2) + \varepsilon \vartheta_{\alpha\beta\delta}^2 \vartheta_{\gamma}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{\alpha\beta\gamma}^2 \vartheta_{\delta}^2(v_1, v_2) = 0.$$

Wir ordnen nun die 6 Indices der ungeraden ϑ -Functionen folgendermassen zu vieren:

$$\begin{array}{cccc} 1, & 3, & 13, & 04, \\ 3, & 13, & 04, & 02, \\ 13, & 04, & 02, & 24, \\ 04, & 02, & 24, & 1, \\ 02, & 24, & 1, & 3, \\ 24, & 1, & 3, & 13, \end{array}$$

(Diese Anordnung wurde gewählt der späteren Vergleichung halber mit den Rosenhain'schen Relationen.)

so bestimmen sich nach der soeben entwickelten Methode die Coefficienten mit Hülfe der Substitutionen:

$$\begin{array}{ccc} 13, & 3, & 1, \\ 1, & 2, & 12, \\ 2, & 4, & 24, \\ 24, & 02, & 04, \\ 04, & 34, & 03, \\ 03, & 01, & 3 \end{array}$$

in folgender Weise:

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_{23}^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) + \vartheta_{12}^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2) - \vartheta_2^2 \vartheta_{13}^2(v_1, v_2) \\ \quad - \vartheta_5^2 \vartheta_{04}^2(v_1, v_2) = 0, \\ \vartheta_0^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_{23}^2 \vartheta_{02}^2(v_1, v_2) \\ \quad - \vartheta_{34}^2 \vartheta_{04}^2(v_1, v_2) = 0, \\ \vartheta_5^2 \vartheta_{13}^2(v_1, v_2) + \vartheta_2^2 \vartheta_{04}^2(v_1, v_2) - \vartheta_4^2 \vartheta_{02}^2(v_1, v_2) \\ \quad - \vartheta_0^2 \vartheta_{24}^2(v_1, v_2) = 0, \\ \vartheta_{23}^2 \vartheta_{04}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^2 \vartheta_{02}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{03}^2 \vartheta_{24}^2(v_1, v_2) \\ \quad - \vartheta_5^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) = 0, \\ \vartheta_0^2 \vartheta_{02}^2(v_1, v_2) - \vartheta_4^2 \vartheta_{24}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{12}^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) \\ \quad + \vartheta_{23}^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2) = 0, \\ \vartheta_5^2 \vartheta_{24}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{03}^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2) \\ \quad - \vartheta_0^2 \vartheta_{13}^2(v_1, v_2) = 0. \end{array} \right.$$

Von den 90 weiteren Relationen, welche sich aus den oben gefundenen durch die 15 Substitutionen in halben Perioden herleiten lassen, will ich nur diejenigen mittheilen, welche die sechs ϑ -Functionen mit den einfachen Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5 enthalten und somit aus den obigen durch die Substitutionen (13) hervorgehen. Sie lauten:

$$(26^a) \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_{23}^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2) - \vartheta_{12}^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) + \vartheta_2^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) \\ \quad - \vartheta_5^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) = 0, \\ \vartheta_0^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_{23}^2 \vartheta_4^2(v_1, v_2) \\ \quad + \vartheta_{34}^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) = 0, \\ \vartheta_5^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) - \vartheta_2^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) - \vartheta_4^2 \vartheta_4^2(v_1, v_2) \\ \quad - \vartheta_0^2 \vartheta_0^2(v_1, v_2) = 0, \\ \vartheta_{23}^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^2 \vartheta_4^2(v_1, v_2) + \vartheta_{03}^2 \vartheta_0^2(v_1, v_2) \\ \quad + \vartheta_5^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2) = 0, \\ \vartheta_0^2 \vartheta_4^2(v_1, v_2) - \vartheta_4^2 \vartheta_0^2(v_1, v_2) + \vartheta_{12}^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2) \\ \quad - \vartheta_{23}^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) = 0, \\ \vartheta_5^2 \vartheta_0^2(v_1, v_2) - \vartheta_{03}^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) \\ \quad - \vartheta_0^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) = 0, \end{array} \right.$$

Um diese letzteren Relationen mit den entsprechenden Gleichungen Rosenhain's vergleichen zu können, müssen wir erst die Beziehung zwischen den Rosenhain'schen φ -Functionen und den von uns gebrauchten Königsberger'schen ϑ -Functionen angeben. Ich gehe auf diesen Punkt hier etwas ausführlicher ein, weil ich hierüber in verschiedenen Arbeiten von einander abweichende und theilweise unrichtige oder ungenaue Angaben gefunden habe. So scheint mir z. B. die Behauptung des Herrn Ernst Kossak in seiner Abhand-

lung über das Additionstheorem der hyperelliptischen Functionen, dass den Rosenhain'schen Indices

33, 10, 20, 31, 32, 00, 23, 13, 02, 01, 30, 21, 22, 11, 12, 03,

der Reihe nach die folgenden Königsberger'schen entsprechen:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 01, 02, 03, 04, 12, 13, 14, 23, 24, 34,
hinsichtlich aller der von mir unterstrichenen Indices nicht richtig zu sein.

Rosenhain definirt die vier elliptischen ϑ -Functionen durch die folgenden Gleichungen:

$$\Theta_0(v, q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nv},$$

$$\Theta_1(v, q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)v},$$

$$\Theta_2(v, q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)v},$$

$$\Theta_3(v, q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2nv},$$

(S. Mémoire S. 368. Wir haben zur Unterscheidung von unsern ϑ -Functionen zur Bezeichnung der Rosenhain'schen grosse Θ gewählt, sodass also darunter nicht etwa die von Rosenhain in anderer Bedeutung gebrauchten grossen Θ zu verstehen sind, sondern die a. a. O. mit ϑ bezeichneten.)

während nach der von uns gebrauchten Definition:

$$\vartheta_0(u, \tau) = \vartheta_3(u - \frac{1}{2}, \tau) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} (-1)^v e^{v^2 \pi i} e^{2v u \pi i},$$

$$\vartheta_1(u, \tau) = e^{\frac{\pi i}{2} (2u - 1 + \frac{1}{2} \tau)} \vartheta_3(u - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau, \tau) = -i \sum_{v=-\infty}^{+\infty} (-1)^v e^{\frac{(2v+1)^2}{4} \pi i} e^{(2v+1) u \pi i},$$

$$\vartheta_2(u, \tau) = e^{\frac{\pi i}{2} (2u + \frac{1}{2} \tau)} \vartheta_3(u + \frac{1}{2} \tau, \tau) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(2v+1)^2}{4} \pi i} e^{(2v+1) u \pi i},$$

$$\vartheta_3(u, \tau) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} e^{v^2 \pi i} e^{2v u \pi i}.$$

*) „Das Additionstheorem der ultraelliptischen Functionen erster Ordnung von Ernst Kossak“ (Berlin, 1871 Nicolai'sche Verlagsbuchhandlung.) — S. S. 12. —

Hieraus folgt, dass, wenn gesetzt wird

$$u\pi i = v, \quad e^{\pi i \tau} = q - \text{also } u = \frac{v}{\pi i}, \quad \tau = \frac{\lg q}{\pi i},$$

die Beziehung stattfindet

$$(27) \quad \Theta_r(v, q) = \varepsilon \cdot \vartheta_r(u, \tau),$$

wo $\varepsilon = +1$ für $r = 0, 2, 3$ und $\varepsilon = +i$ für $r = 1$.

Rosenhain definiert nun ferner seine hyperelliptischen ϑ -Functionen folgendermassen:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta_{3,r}(v, w, p, q, A) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p^{m^2} e^{2m\tau} \Theta_r(w + 2mA, q), \quad (\text{S. Mémoires S. 409.}) \\ \vartheta_{0,r}(v, w, p, q, A) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m p^{m^2} e^{2m\tau} \Theta_r(w + 2mA, q), \\ \vartheta_{2,r}(v, w, p, q, A) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{(2m+1)\tau} \Theta_r(v + \overline{2m+1}A, q), \\ \vartheta_{1,r}(v, w, p, q, A) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m p^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{(2m+1)\tau} \Theta_r(v + \overline{2m+1}A, q). \end{aligned} \right.$$

Hingegen sind die von uns gebrauchten ϑ -Functionen allgemein definiert durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} \vartheta_{\lambda}(v_1, v_2) &= \vartheta(v_1 + \tfrac{1}{2}m_1^2, v_2 + \tfrac{1}{2}m_2^2; \tfrac{1}{2}n_1^2, \tfrac{1}{2}n_2^2) \\ &= e^{\frac{\pi i}{2}n_1^2(2v_1+m_1^2+\tfrac{1}{2}n_1^2\tau_{11}+\tfrac{1}{2}n_2^2\tau_{12})+\frac{\pi i}{2}n_2^2(2v_2+m_2^2+\tfrac{1}{2}n_1^2\tau_{21}+\tfrac{1}{2}n_2^2\tau_{22})} \\ &\quad \vartheta(v_1 + \tfrac{1}{2}m_1^2 + \tfrac{1}{2}n_1^2\tau_{11} + \tfrac{1}{2}n_2^2\tau_{12}, v_2 + \tfrac{1}{2}m_2^2 + \tfrac{1}{2}n_1^2\tau_{21} + \tfrac{1}{2}n_2^2\tau_{22}) \\ &= i^{m_1^2n_1^2+m_2^2n_2^2} \sum_{r_1, r_2=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m_1^2r_1+n_2^2r_2} \\ &\quad e^{\pi i \{ (2v_1+n_1^2)v_1+(2v_2+n_2^2)v_2 \} + \frac{\pi i}{4} \{ (2v_1+n_1^2)^2\tau_{11}+2(2v_1+n_1^2)(2v_2+n_2^2)\tau_{12}+(2v_2+n_2^2)^2\tau_{22} \}}, \end{aligned}$$

und da sich hieraus unsere elliptische ϑ -Function allgemein in der Form ergibt:

$$\vartheta_{\lambda}(v, \tau) = i^{m^2n^2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m^2r} e^{\pi i \{ 2v+n^2 \} v + \frac{\pi i}{4} \{ 2v+n^2 \}^2 \tau},$$

so können wir offenbar setzen:

$$(29) \quad \vartheta_{\lambda}(v_1, v_2) = i^{m_1^2n_1^2} \sum_{r_1} (-1)^{m_1^2r_1} e^{\pi i(2v_1+n_1^2)v_1 + \frac{\pi i}{4}(2v_1+n_1^2)^2\tau_{11}} \vartheta_{\lambda}(v_2 + \tfrac{1}{2}[2v_1+n_1^2]\tau_{12}, \tau_{22}),$$

wenn wir mit λ_2 den Index derjenigen elliptischen ϑ -Function bezeichnen, deren Charakter durch die Grössen m_2^2, n_2^2 bestimmt wird. Die analoge Bedeutung soll auch dem Index λ_1 beigelegt werden.

Führen wir alsdann statt des bisher von uns für die hyperelliptischen ϑ -Functionen gebrauchten Index λ einen zusammengesetzten (λ_1, λ_2) ein, wodurch unsere bisherigen Indices

0, 1, 2, 3, 4, 5, 01, 02, 03, 04, 12, 13, 14, 23, 24, 34, der Reihe nach in die folgenden übergehen:

0,0, 1,0, 2,0, 3,1, 3,2, 3,3, 2,3, 1,3, 0,2, 0,1, 0,3, 1,2, 1,1, 2,2, 2,1, 3,0, so gehen aus Gleichung (29), indem wir λ_1 die Werthe 3, 0, 2, 1 — d. h. m_1^2 , n_1^2 die Werthe combinations (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) geben, die folgenden vier hervor:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} \vartheta_{3,\lambda_2}(v_1, v_2) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} v_1 e^{2v_1 v_1 \pi i} e^{v_1^2 \tau_{11} \pi i} \vartheta_{\lambda_2}(v_2 + v_1 \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \vartheta_{2,\lambda_2}(v_1, v_2) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{v_1} e^{2v_1 v_1 \pi i} e^{v_1^2 \tau_{11} \pi i} \vartheta_{\lambda_2}(v_2 + v_1 \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \vartheta_{0,\lambda_2}(v_1, v_2) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} v_1 e^{(2v_1+1)v_1 \pi i} e^{\frac{1}{4}(2v_1+1)^2 \tau_{11} \pi i} \vartheta_{\lambda_2}(v_2 + \frac{1}{2}[2v_1+1] \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \vartheta_{1,\lambda_2}(v_1, v_2) &= -i \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{v_1} e^{(2v_1+1)v_1 \pi i} e^{\frac{1}{4}(2v_1+1)^2 \tau_{11} \pi i} \vartheta_{\lambda_2}(v_2 + \frac{1}{2}[2v_1+1] \tau_{12}, \tau_{22}), \end{aligned} \right.$$

Verbindet man diese Relationen mit den Rosenhain'schen Definitionen (28) unter Berücksichtigung der Gleichung (27), so ergibt, dass

$$(31) \left\{ \begin{aligned} \varphi_{3,r}(v, w, p, q, A) &= \varepsilon \cdot \vartheta_{3,r}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \varphi_{0,r}(v, w, p, q, A) &= \varepsilon \cdot \vartheta_{0,r}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \varphi_{2,r}(v, w, p, q, A) &= \varepsilon \cdot \vartheta_{2,r}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \\ \varphi_{1,r}(v, w, p, q, A) &= \varepsilon \cdot \vartheta_{1,r}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}), \end{aligned} \right.$$

wenn gesetzt wird:

$$v_1 = \frac{v}{\pi i}, \quad v_2 = \frac{w}{\pi i}, \quad \tau_{11} = \frac{\lg p}{\pi i}, \quad \tau_{12} = \frac{2A}{\pi i}, \quad \tau_{22} = \frac{\lg q}{\pi i},$$

und ausserdem der Factor:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= +1 \quad \text{für } r=0, 2, 3, \\ \varepsilon &= +i \quad \text{für } r=1 \end{aligned}$$

gewählt wird.

Führen wir jetzt wieder für unsere ϑ -Functionen die sonst von uns gebrauchten Indices ein, so folgt, dass den Rosenhain'schen Functionen: .

$$\varphi_{0,0}, \varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}, \varphi_{0,3}, \varphi_{1,0}, \varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \varphi_{1,3}, \varphi_{2,0}, \varphi_{2,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{2,3}, \varphi_{3,0}, \varphi_{3,1}, \varphi_{3,2}, \varphi_{3,3}$$

unsere ϑ -Functionen in folgender Anordnung entsprechen:

$$\vartheta_0, i\vartheta_{01}, \vartheta_{03}, \vartheta_{12}, i\vartheta_1, -\vartheta_{14}, i\vartheta_{13}, i\vartheta_{02}, \vartheta_2, i\vartheta_{24}, \vartheta_{23}, \vartheta_{01}, \vartheta_{34}, i\vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5.$$

Hält man diese Beziehungen fest, so gehen die von Rosenhain auf S. 424 seines Mémoire's gegebenen 9 Doppelgleichungen genau in die folgenden über*):

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & \vartheta_{14}^2 \vartheta_{04}^2(v_1, v_2) - \vartheta_2^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) = -\vartheta_0^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) \\
 & \qquad \qquad \qquad = \vartheta_{23}^2 \vartheta_4^2(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2), \\
 \text{II.} \quad & + \vartheta_{14}^2 \vartheta_{03}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) = -\vartheta_{12}^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) - \vartheta_5^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) \\
 & \qquad \qquad \qquad = -\vartheta_{23}^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2) - \vartheta_2^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2), \\
 \text{III.} \quad & + \vartheta_{14}^2 \vartheta_{12}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{23}^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) = -\vartheta_{03}^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) - \vartheta_4^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) \\
 & \qquad \qquad \qquad = -\vartheta_{01}^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2) - \vartheta_2^2 \vartheta_4^2(v_1, v_2), \\
 \text{IV.} \quad & + \vartheta_{14}^2 \vartheta_{13}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) = \vartheta_2^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) + \vartheta_0^2 \vartheta_0^2(v_1, v_2) \\
 & \qquad \qquad \qquad = \vartheta_3^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_4^2 \vartheta_4^2(v_1, v_2), \\
 \text{V.} \quad & - \vartheta_{14}^2 \vartheta_{13}^2(v_1, v_2) + \vartheta_5^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) = \vartheta_{01}^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) + \vartheta_{12}^2 \vartheta_0^2(v_1, v_2) \\
 & \qquad \qquad \qquad = \vartheta_{34}^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_5^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2), \\
 \text{VI.} \quad & - \vartheta_{14}^2 \vartheta_{02}^2(v_1, v_2) + \vartheta_4^2 \vartheta_{31}^2(v_1, v_2) = \vartheta_{23}^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) + \vartheta_{03}^2 \vartheta_0^2(v_1, v_2) \\
 & \qquad \qquad \qquad = \vartheta_{34}^2 \vartheta_4^2(v_1, v_2) + \vartheta_5^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2), \\
 \text{VII.} \quad & - \vartheta_{14}^2 \vartheta_{24}^2(v_1, v_2) + \vartheta_0^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) = -\vartheta_2^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^2 \vartheta_0^2(v_1, v_2) \\
 & \qquad \qquad \qquad = \vartheta_{12}^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) - \vartheta_{03}^2 \vartheta_4^2(v_1, v_2), \\
 \text{VIII.} \quad & + \vartheta_{14}^2 \vartheta_{23}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{12}^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) = -\vartheta_{01}^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) + \vartheta_5^2 \vartheta_0^2(v_1, v_2) \\
 & \qquad \qquad \qquad = \vartheta_0^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_{03}^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2), \\
 \text{IX.} \quad & + \vartheta_{14}^2 \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{03}^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) = -\vartheta_{23}^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) + \vartheta_4^2 \vartheta_0^2(v_1, v_2) \\
 & \qquad \qquad \qquad = \vartheta_0^2 \vartheta_4^2(v_1, v_2) + \vartheta_{12}^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2).
 \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Relationen mit den von uns unter Nr. (26^a) zusammengestellten lehrt, dass die Rosenhain'schen Gleichungen II., I., IV., VI., IX., VIII. in ihren beiden rechten Seiten der Reihe nach mit unseren Gleichungen (26^a) identisch sind. — Ich bemerke noch beiläufig, dass man in ganz ähnlicher Weise auch die linearen Relationen zwischen je drei ϑ -Producten (es giebt deren nach Rosenhain 120) herleiten kann.

Ich wende mich jetzt wiederum zur Transformation zweiten Grades, und zwar zu dem speciellen Falle, welcher die transformirte hyperelliptische ϑ -Function als ein Product zweier elliptischer ϑ -Functionen liefert, so dass also — wenn wir uns wieder der bereits oben (in Gleichung (30)) angewendeten Bezeichnungen bedienen:

*) In der zweiten dieser Gleichungen findet sich bei Rosenhain ein Druckfehler, indem, wie man sich leicht überzeugt, der erste Coefficient der rechten Seite nicht $\varphi_{0,0}$, sondern $\varphi_{0,3}$ heissen muss.

$$(32) \quad \vartheta_2(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \vartheta_{\lambda_1}(v_1', \tau_{11}') \cdot \vartheta_{\lambda_2}(v_2', \tau_{22}').$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen dieser Gleichung ist die, dass τ_{12}' verschwindet, was für die Moduln der zu transformirenden ϑ -Functionen die Bedingung ergibt:

$$(33^a) \quad (\varrho_{12}' + \sigma_{12}' \tau_{11} + \sigma_{22}' \tau_{12}) (\varrho_{22} + \sigma_{12} \tau_{12} + \sigma_{22} \tau_{22}) \\ - (\varrho_{22}' + \sigma_{12}' \tau_{21} + \sigma_{22}' \tau_{22}) (\varrho_{12} + \sigma_{12} \tau_{11} + \sigma_{22} \tau_{12}) = 0,$$

oder:

$$(33^b) \quad (\varrho_{21}' + \sigma_{11}' \tau_{21} + \sigma_{21}' \tau_{22}) (\varrho_{11} + \sigma_{11} \tau_{11} + \sigma_{21} \tau_{12}) \\ - (\varrho_{11}' + \sigma_{11}' \tau_{11} + \sigma_{21}' \tau_{12}) (\varrho_{21} + \sigma_{11} \tau_{21} + \sigma_{21} \tau_{22}) = 0$$

(S. die erwähnte Königsberger'sche Abhandlung,
Crelle's Journal Bd. 67, S. 73 Anm.)

Alsdann muss aber

$$\vartheta_{14}'(0, 0, \tau_{11}', 0, \tau_{22}') = 0$$

sein, weil diese Function in die beiden ungeraden elliptischen ϑ -Functionen mit dem Index 1 zerfällt. Nun kann, wie Herr Königsberger gezeigt hat (a. a. O. S. 75), eine gerade transformirte ϑ -Function für die Nullwerthe der Argumente nur dann verschwinden, wenn sie sich als eine Summe von vier ϑ -Quadraten des ursprünglichen Systems darstellen lässt. Folglich können nur solche Transformationen zweiten Grades die transformirten ϑ -Functionen als Producte elliptischer ϑ -Functionen liefern, für welche

$$\Pi_{14}(v_1, v_2) \text{ oder } e^{f(v_1, v_2)\pi i} \vartheta_{14}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')$$

als Summe von vier ϑ -Quadraten erscheint, welche also der Bedingung genügen, dass für

$$-m_1^2 = -m_2^2 = n_1^2 = n_2^2 = 1$$

die aus den Transformationszahlen $\varrho, \sigma, \varrho', \sigma'$ zusammengesetzten Grössen m, n, p, q sämmtlich gerade sind. Da dies, wie aus den Gleichungen (16^a) hervorgeht, für keine der unter (16) zusammengestellten Repräsentanten-Transformationen der Fall ist, müssen wir, um Transformationen von der eben erwähnten Eigenschaft zu erhalten, jene Repräsentanten-Transformationen mit Linear-Transformationen von der Beschaffenheit combiniren, dass irgend eine derjenigen ϑ -Functionen, welche sonst als Summe von vier ϑ -Quadraten erscheinen, durch die betreffende Lineartransformation in ϑ_{14} übergeht.

Als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$\vartheta_{\lambda}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{21}')$$

sich in der Form von vier ϑ -Quadraten darstellen liess, fanden wir (s. S. 449)

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \text{a) für die Repräsentanten } A: n_1^{\lambda} = 0, & n_2^{\lambda} = 0, \\ \text{b) } & & & B: m_2^{\lambda} = 0, & n_1^{\lambda} = 0, \\ \text{c) } & & & C: m_1^{\lambda} = 0, & n_2^{\lambda} = 0, \\ \text{d) } & & & D: m_1^{\lambda} = 0, & m_2^{\lambda} = 0. \end{array} \right.$$

Denken wir uns jetzt, dass durch irgend eine Lineartransformation die Argumente und Moduln:

$$v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}'$$

übergeführt würden in:

$$w_1', w_2', t_{11}', t_{12}', t_{22}',$$

so stellen sich die linear transformirten ϑ -Functionen in der Form dar:

$$(35) \quad e^{-f(v_1, v_2)\pi i} \vartheta(w_1', w_2', t_{11}', t_{12}', t_{22}')_{m_1^v m_2^v n_1^v n_2^v} \\ = C \cdot \vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_{q' p' m' n'},$$

wenn wir mit

$$\vartheta_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

für den Augenblick die Function ϑ_{α} bezeichnen, falls $\alpha \equiv m_1^x$, $\beta \equiv m_2^x$, $\gamma \equiv n_1^x$, $\delta \equiv n_2^x \pmod{2}$, und wenn ausserdem m' , n' , p' , q' gewisse ganze Zahlen bezeichnen, welche aus den Transformationszahlen des Linearsystems und den Indices m_1^v , m_2^v , n_1^v , n_2^v gerade so zusammengesetzt sind, wie die in Nr. (11) definirten Grössen m , n , p , q aus ϱ , ϱ' , σ , σ' und m_1^{λ} , m_2^{λ} , n_1^{λ} , n_2^{λ} .

Wollen wir nun eine Lineartransformation finden, welche eine ϑ -Function, die den Bedingungen (34) a) genügt, in ϑ_{14} überführt, so muss diese nach Gleichung (35) so beschaffen sein, dass für

$$-m_1^v = -m_2^v = n_1^v = n_2^v = 1$$

m' und n' gerade Zahlen sind, also

$$m' \equiv 0, \quad n' \equiv 0 \pmod{2}.$$

Ebenso müssen für die linearen Ergänzungstransformationen zu den Repräsentantentransformationen

$$\left. \begin{array}{l} B \dots \dots p' \equiv 0, \quad m' \equiv 0 \\ C \dots \dots q' \equiv 0, \quad n' \equiv 0 \\ D \dots \dots q' \equiv 0, \quad p' \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod{2}$$

sein.

Ich will nun zeigen, wie man sich leicht Linear-Transformationen, welche diesen Bedingungen genügen, verschaffen kann.

Es ist klar, dass durch Vertauschung der charakteristischen Zahl 2 mit der Zahl 1 in irgend einer unserer 15 Repräsentanten-Transformationen die für ϱ , ϱ' , σ , σ' geltenden Bedingungsgleichungen (6) oder (7) mit der rechten Seite 0 *gar nicht*, diejenigen mit der rechten Seite 2 nur insofern geändert werden, dass diese rechte Seite den

Werth 1 annimmt, d. h. das System der Transformationszahlen geht auf diese Weise in ein lineares über.

Führen wir dieses Verfahren an den Repräsentanten C und D aus, indem wir gleichzeitig $i = 1$, $i' = 0$, $i'' = 0$ setzen, so ergeben sich die beiden Linearsysteme:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{für welches} \quad \begin{cases} m' = n_1'' + n_2'' \\ n' = n_2'' \\ p' = m_2'' - m_1'' \\ q' = m_1'' \end{cases}$$

und

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{für welches} \quad \begin{cases} m' = n_1'' + m_2'', \\ n' = n_2'' + m_1'', \\ p' = m_2'', \\ q' = m_1''. \end{cases}$$

Das erste von diesen liefert für

$$\nu = 14 \quad \text{oder} \quad -m_1'' = -m_2'' = n_1'' = n_2'' = 1$$

die Beziehung

$$m' \equiv p' \equiv 0 \pmod{2},$$

ist somit von derjenigen Beschaffenheit, wie sie für die Combination mit den Repräsentanten B geeignet ist; das zweite giebt

$$m' \equiv n' \equiv 0 \pmod{2},$$

ist somit das gesuchte Linearsystem für den Repräsentanten A .

Beachtet man ferner, dass in Folge der symmetrischen Form der für die Transformationszahlen geltenden Bedingungsgleichungen deren Gültigkeit nicht alterirt wird, wenn man

$$\left. \begin{array}{l} q_{\alpha\beta} \text{ mit } \sigma'_{\alpha\beta} \\ q'_{\alpha\beta} \text{ mit } \sigma_{\alpha\beta} \end{array} \right\} \text{ und umgekehrt}$$

vertauscht, dass aber ausserdem durch eine solche Transposition die Grössen

$$m', n', p', q' \text{ für } -m_1'' = -m_2'' = n_1'' = n_2'' = 1$$

der Reihe nach übergehen in

$$q', p', m', n',$$

so folgt, dass die beiden Systeme:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

welche durch die erwähnte Transposition aus den obigen linearen Transformationssystemen entstehen, ebenfalls lineare Transformationen liefern müssen, und dass sie ausserdem die Bedingungen erfüllen:

$$q' \equiv m' \equiv 0 \pmod{2} \text{ und } q' \equiv p' \equiv 0 \pmod{2} \text{ (für } v=14),$$

d. h. es sind dies die zu C und D gehörigen linearen Transformationen.

Combinirt man jetzt die eben gefundenen vier Linearsysteme

$$(36) \quad \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

der Reihe nach mit den 15 Repräsentanten:

$$\begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cccc} 2 & i & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cccc} 2 & 0 & i & i' \\ 0 & 2 & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

so ergeben sich die folgenden 15 Transformationssysteme zweiten Grades:

$$(37) \quad \begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i & -i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cccc} 2 & -i & i & i' \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cccc} 2 & +i & i' & i \\ i'' & 2 & +i & i'' \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

für welche die Zahlen m, n, p, q die folgenden Werthe haben:

I.

$$\begin{aligned} m &= n_1^2 + m_2^2, \\ n &= n_2^2 + m_1^2, \\ p &= 2m_2^2, \\ q &= 2m_1^2, \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} m &= n_1^2 + n_2^2, \\ n &= 2n_2^2 + i(m_2^2 - m_1^2), \\ p &= m_2^2 - m_1^2, \\ q &= 2m_1^2, \end{aligned}$$

III.

$$m = 2n_1^2 + i(n_2^2 - n_1^2) + i'(m_2^2 + m_1^2 + 2),$$

$$n = -n_1^2 + n_2^2,$$

$$p = 2m_2^2 - i(m_2^2 + m_1^2),$$

$$q = m_2^2 + m_1^2,$$

IV.

$$m = 2n_1^2 + i(n_1^2 + m_2^2 + 2i') + i'(n_2^2 + m_1^2 + 2),$$

$$n = 2n_2^2 + i''(n_1^2 + m_2^2 + 2) + i(n_2^2 + m_1^2 + i''),$$

$$p = n_1^2 + m_2^2,$$

$$q = n_2^2 + m_1^2,$$

so dass für

$$-m_1^2 = -m_2^2 = n_1^2 = n_2^2 = 1$$

m, n, p, q sämmtlich gerade Zahlen (gleichgültig ob i, i', i'' die Werthe 0 oder 1 haben) und mithin $\Pi_{14}(v_1, v_2)$ sich als Summe von vier ϑ -Quadraten darstellen lässt.

Von diesen 15 Transformationen zweiten Grades sind nicht irgend zwei durch lineare Transformation aus einander herzuleiten, da ja jede von ihnen aus einem anderen Repräsentanten durch lineare Transformation hervorgegangen ist, und somit jede einer anderen von den 15 nicht äquivalenten Classen angehört.

Sollen nun die ϑ -Functionen eines gegebenen hyperelliptischen Systems durch eine der obigen 15 Transformationen in Producte elliptischer ϑ -Functionen sich transformiren lassen, so müssen, vermöge der Bedingungsgleichung

$$\tau_{12}' = 0$$

und der hieraus resultirenden

$$\Pi_{14}(0, 0) = 0 = (\alpha) \vartheta_a^2 + (\beta) \vartheta_\beta^2 + (\gamma) \vartheta_\gamma^2 + (\delta) \vartheta_\delta^2$$

(nebst ähnlichen durch Substitutionen hergeleiteten), sowohl zwischen den ϑ -Moduln als auch zwischen den Integralmoduln jenes Systems bestimmte Beziehungen stattfinden. Es sind dies für die einzelnen Transformationen die folgenden:

I.

$$2\tau_{12} + \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 = 0 \quad x^2 = \lambda^2 \mu^2$$

II.

a) $i = 0$

$$\tau_{11} + 2\tau_{12} = 0 \quad x^2 - \lambda^2 = \mu^2(1 - \lambda^2)$$

b) $i = 1$

$$\tau_{11} + 2\tau_{12} - (\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2) = 0 \quad x^2(1 - \mu^2) = \lambda^2(x^2 - \mu^2)$$

III.

$$\begin{array}{lll}
i=0 & i'=0 & 2\tau_{12}-\tau_{22}=0 \quad \mu^2=\kappa^2\lambda^2 \\
i=0 & i'=1 & 2\tau_{12}-\tau_{22}+\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2=0 \quad \lambda^2=\kappa^2\mu^2 \\
i=1 & i'=0 & \tau_{11}-\tau_{22}=0 \quad \kappa^2-\lambda^2=\lambda^2(\kappa^2-\mu^2) \\
i=1 & i'=1 & \tau_{11}-\tau_{22}+\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2=0 \quad \kappa^2-\mu^2=\mu^2(\kappa^2-\lambda^2)
\end{array}$$

IV.

$$\begin{array}{lll}
i=0 & i'=0 & i''=0 \quad 2\tau_{12}=1 \quad \lambda^2-\mu^2=-\kappa^2(1-\lambda^2) \\
i=0 & i'=0 & i''=1 \quad 2\tau_{12}+\tau_{22}=1 \quad \mu^2(1-\lambda^2)=-\kappa^2(\lambda^2-\mu^2) \\
i=0 & i'=1 & i''=0 \quad \tau_{11}+2\tau_{12}=1 \quad \lambda^2-\mu^2=\mu^2(1-\kappa^2) \\
i=0 & i'=1 & i''=1 \quad \tau_{11}+2\tau_{12}+\tau_{22}-(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)=1 \quad \lambda^2(\kappa^2-\mu^2)=\kappa^2(1-\lambda^2) \\
i=1 & i'=0 & i''=0 \quad 4\tau_{12}+3(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)=1 \quad \lambda^2-\mu^2=\lambda^2(\kappa^2-\mu^2) \\
i=1 & i'=0 & i''=1 \quad 4\tau_{12}+\tau_{22}+3(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)=1 \quad \kappa^2-\mu^2=\kappa^2(\lambda^2-\mu^2) \\
i=1 & i'=1 & i''=0 \quad \tau_{11}+4\tau_{12}+3(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)=1 \quad \lambda^2-\mu^2=-\mu^2(\kappa^2-\lambda^2) \\
i=1 & i'=1 & i''=1 \quad \tau_{11}+4\tau_{12}+\tau_{22}+2(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}^2)=1 \quad \kappa^2-\lambda^2=-\kappa^2(\lambda^2-\mu^2).
\end{array}$$

Ich will den Fall, dass

$$\mu^2 = \kappa^2 \lambda^2,$$

hier vollständig durchführen und könnte hierzu offenbar die Transformation III. a) benutzen. Da dieselbe indessen auf andere algebraische Beziehungen führt, als die von Jacobi gegebenen, so wähle ich lieber eine aus III. a) durch eine lineare Transformation abgeleitete, nämlich diejenige, welche entsteht aus der Combination von

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

deren Transformationszahlen also enthalten sind in dem Schema:

$$(38) \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ d. h.: } \begin{cases} \varrho_{11}=1, & \varrho_{12}=1, & \sigma_{11}=0, & \sigma_{12}=0, \\ \varrho_{21}=0, & \varrho_{22}=2, & \sigma_{21}=0, & \sigma_{22}=0, \\ \varrho_{11}'=-1, & \varrho_{21}'=-1, & \sigma_{11}'=0, & \sigma_{12}'=0, \\ \varrho_{21}'=-2, & \varrho_{22}'=0, & \sigma_{21}'=0, & \sigma_{22}'=0. \end{cases}$$

Man findet hieraus zunächst:

$$(39) \quad \begin{cases} m = 2n_1^2, \\ n = -n_1^2 + n_2^2, \\ p = 2n_1^2 + 2m_2^2, \\ q = n_1^2 + n_2^2 + m_1^2 + m_2^2 + 2, \end{cases}$$

woraus sich ergibt, dass $\Pi_{14}(v_1, v_2)$ und ausserdem noch $\Pi_5(v_1, v_2)$, $\Pi_0(v_1, v_2)$, $\Pi_{23}(v_1, v_2)$ sich als Summen von vier ϑ -Quadraten darstellen lassen.

Man hat ferner:

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= 1, & \omega_{21} &= 0, & \omega_{11}' &= -1 + 2\tau_{11} - \tau_{12}, & \omega_{21}' &= -2 + 2\tau_{12} - \tau_{22}, \\ \omega_{12} &= 1, & \omega_{22} &= 2, & \omega_{12}' &= -1 + \tau_{12}, & \omega_{22}' &= \tau_{22}, \end{aligned}$$

und es ergibt demnach die Bedingung (33^a) oder (33^b) die Gleichung

$$\tau_{12}' = \tau_{21}' = -1 + \tau_{12} - \frac{1}{2} \tau_{22} = 0,$$

oder

$$(40) \quad 2\tau_{12} - \tau_{22} = 2,$$

während die beiden anderen transformirten Moduln, sowie die transformirten Argumente die Werthe haben:

$$(41) \quad \begin{cases} \tau_{11}' = -1 + 2\tau_{11} - \tau_{12}, & \tau_{22}' = \frac{1}{2} \tau_{22} = \tau_{12} - 1, \\ v_1' = 2v_1 - v_2, & v_2' = v_2. \end{cases}$$

Setzen wir nun

$$\Pi_{14}(v_1, v_2) = (\alpha) \vartheta_5^2(v_1, v_2) + (\beta) \vartheta_1^2(v_1, v_2) + (\gamma) \vartheta_3^2(v_1, v_2) + (\delta) \vartheta_{13}^2(v_1, v_2),$$

so folgt zunächst für $v_1 = v_2 = 0$

$$\Pi_{14}(0, 0) = 0 = (\alpha) \vartheta_5^2 \text{ und mithin } (\alpha) = 0$$

(da ϑ_5 nicht verschwinden kann, denn sonst wäre das vorgelegte System bereits durch diejenige Lineartransformation in ein elliptisches transformirbar, welche $\vartheta_5(v_1, v_2)$ in $\vartheta_{14}(v_1', v_2')$ überführt). Man kann daher setzen:

$$(42) \text{ a) } \Pi_{14}(v_1, v_2) = (\beta) \vartheta_1^2(v_1, v_2) + (\gamma) \vartheta_3^2(v_1, v_2) + (\delta) \vartheta_{13}^2(v_1, v_2),$$

und diese Gleichung liefert vermöge der Substitutionen:

$$\begin{aligned} v_1 - \frac{1}{2}, & \quad v_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau_{12}, & \quad v_1 + \frac{1}{2} \tau_{12}, \\ v_2, & \quad v_2 + \frac{1}{2} \tau_{22}, & \quad v_2 + \frac{1}{2} \tau_{22}, \end{aligned}$$

welche den Index der linken Seite nicht ändern, noch die folgenden drei:

$$(42) \quad \begin{cases} \text{b) } -\Pi_{14}(v_1, v_2) = (\beta) \vartheta_2^2(v_1, v_2) + (\gamma) \vartheta_{04}^2(v_1, v_2) + (\delta) \vartheta_{23}^2(v_1, v_2), \\ \text{c) } -\Pi_{14}(v_1, v_2) = -(\beta) \vartheta_{24}^2(v_1, v_2) - (\gamma) \vartheta_0^2(v_1, v_2) + (\delta) \vartheta_{01}^2(v_1, v_2), \\ \text{d) } \Pi_{14}(v_1, v_2) = -(\beta) \vartheta_{14}^2(v_1, v_2) - (\gamma) \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) + (\delta) \vartheta_{02}^2(v_1, v_2). \end{cases}$$

Setzt man $v_1 = v_2 = 0$, so liefert das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} \vartheta_2^2 & \vartheta_{04}^2 & \vartheta_{23}^2 \\ -\vartheta_{24}^2 & -\vartheta_0^2 & \vartheta_{01}^2 \\ -\vartheta_{14}^2 & -\vartheta_{34}^2 & \vartheta_{02}^2 \end{vmatrix}$$

die Bedingung

$$-\vartheta_2^2 \vartheta_{01}^2 \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{14}^2 = 0,$$

oder:

$$\mu^2 = \kappa^2 \lambda^2,$$

während sich die Quotienten der unbekannten Coefficienten aus Gleichung (42) b) und c) in der Form ergeben:

$$\frac{(\beta)}{(\delta)} = -\frac{\vartheta_{23}^2}{\vartheta_2^2}, \quad \frac{(\gamma)}{(\delta)} = \frac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta_0^2},$$

so dass wir setzen können:

$$(43) \quad \begin{aligned} \Pi_{14}(v_1, v_2) &= e^{-f(v_1, v_2)\pi i} \vartheta_1(v_1', \tau_{11}') \vartheta_1(v_2', \tau_{22}') \\ &= C \{ -\vartheta_0^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_1^2(v_1, v_2) + \vartheta_2^2 \vartheta_{01}^2 \vartheta_3^2(v_1, v_2) \\ &\quad + \vartheta_0^2 \vartheta_2^2 \vartheta_{13}^2(v_1, v_2) \}, \end{aligned}$$

wo C eine Constante bedeutet.

Durch Anwendung der Substitutionen:

$$\begin{aligned} v_1, & \quad v_1 + \frac{1}{2} \tau_{11}, & v_1 & \quad + \frac{1}{2} \tau_{11}, \\ v_2 - \frac{1}{2}, & \quad v_2 + \frac{1}{2} \tau_{21}, & v_2 & \quad - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau_{21}, \end{aligned}$$

denen die folgenden Werthe der transformirten Argumente entsprechen:

$$\begin{aligned} v_1' + \frac{1}{2}, & \quad v_1' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau_{11}', & v_1' + 1 + \frac{1}{2} \tau_{11}', \\ v_2' - \frac{1}{2}, & \quad v_2' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau_{22}', & v_2' & \quad + \frac{1}{2} \tau_{22}', \end{aligned}$$

ergeben sich aus Gleichung (43) die folgenden drei:

$$(44) \quad \begin{aligned} \Pi_{23}(v_1, v_2) &= e^{-f(v_1, v_2)\pi i} \vartheta_2(v_1', \tau_{11}') \vartheta_2(v_2', \tau_{22}') \\ &= C \{ \vartheta_0^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{02}^2(v_1, v_2) - \vartheta_2^2 \vartheta_{01}^2 \vartheta_4^2(v_1, v_2) \\ &\quad - \vartheta_0^2 \vartheta_2^2 \vartheta_{14}^2(v_1, v_2) \}, \end{aligned}$$

$$(45) \quad \begin{aligned} \Pi_5(v_1, v_2) &= e^{-f(v_1, v_2)\pi i} \vartheta_3(v_1', \tau_{11}') \vartheta_3(v_2', \tau_{22}') \\ &= C \{ \vartheta_0^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_0^2(v_1, v_2) + \vartheta_2^2 \vartheta_0^2 \vartheta_{24}^2(v_1, v_2) \\ &\quad - \vartheta_0^2 \vartheta_2^2 \vartheta_{03}^2(v_1, v_2) \}, \end{aligned}$$

$$(46) \quad \begin{aligned} \Pi_0(v_1, v_2) &= e^{-f(v_1, v_2)\pi i} \vartheta_0(v_1', \tau_{11}') \vartheta_0(v_2', \tau_{22}') \\ &= C \{ \vartheta_0^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{12}^2(v_1, v_2) + \vartheta_2^2 \vartheta_0^2 \vartheta_{23}^2(v_1, v_2) \\ &\quad - \vartheta_0^2 \vartheta_2^2 \vartheta_{04}^2(v_1, v_2) \}, \end{aligned}$$

Setzen wir hierin $v_1 = v_2 = 0$, wodurch auch $v_1' = v_2' = 0$ wird, und bezeichnen

$$\vartheta_\lambda(0, \tau_{11}') \text{ mit } \vartheta_\lambda',$$

$$\vartheta_\lambda(0, \tau_{22}') \text{ mit } \vartheta_\lambda'',$$

so erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$(47) \quad \vartheta_2' \cdot \vartheta_2'' = -C \{ \vartheta_0^2 \{ \vartheta_{01}^2 \vartheta_4^2 + \vartheta_0^2 \vartheta_{14}^2 \} \} = -C \cdot \vartheta_2^2 \vartheta_5^2 \vartheta_{23}^2,$$

$$(48) \quad \vartheta_3' \cdot \vartheta_3'' = C \{ \vartheta_0^2 \{ \vartheta_0^2 \vartheta_{23}^2 - \vartheta_2^2 \vartheta_{03}^2 \} \} = C \cdot \vartheta_0^2 \vartheta_5^2 \vartheta_{14}^2,$$

$$(49) \quad \vartheta_0' \cdot \vartheta_0'' = C \{ \vartheta_{23}^2 \{ \vartheta_0^2 \vartheta_{12}^2 - \vartheta_2^2 \vartheta_{01}^2 \} \} = C \cdot \vartheta_5^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{34}^2,$$

aus denen sich die Moduln der transformirten Integrale (sowie auch die Constante C) bestimmen lassen. Setzen wir nämlich:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{y_1} \frac{dy}{V(1-y^2)(1-c^2y^2)} = u'_1 = 2Cv'_1, \\ C = \int_0^1 \frac{dy}{V(1-y^2)(1-c^2y^2)}, \quad C + iC' = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dy}{V(1-y^2)(1-c^2y^2)}, \\ \tau'_{11} = \frac{iC'}{C}, \\ \int_0^{y_2} \frac{dy}{V(1-y^2)(1-l^2y^2)} = u'_2 = 2Lv'_2, \\ L = \int_0^1 \frac{dy}{V(1-y^2)(1-l^2y^2)}, \quad L + iL' = \int_0^{\frac{1}{l}} \frac{dy}{V(1-y^2)(1-l^2y^2)}, \\ \tau'_{22} = \frac{iL'}{L}, \end{array} \right.$$

so ist:

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = sn(u'_1, c) = \frac{1}{Vc} \frac{\vartheta_1(v'_1, \tau'_{11})}{\vartheta_0(v'_1, \tau'_{11})}, \\ \sqrt{1-y_1^2} = cn(u'_1, c) = \frac{Vc_1}{Vc} \frac{\vartheta(v'_1, \tau'_{11})}{\vartheta_0(v'_1, \tau'_{11})}, \\ \sqrt{1-c^2y_1^2} = dn(u'_1, c) = \sqrt{c_1} \frac{\vartheta_3(v'_1, \tau'_{11})}{\vartheta_0(v'_1, \tau'_{11})}, \\ \sqrt{c} = \frac{\vartheta_2'}{\vartheta_3'}, \quad \sqrt{c_1} = \frac{\vartheta_0'}{\vartheta_3'}, \quad (c^2 + c_1^2 = 1); \\ y_2 = sn(u'_2, l) = \frac{1}{Vl} \frac{\vartheta_1(v'_2, \tau'_{22})}{\vartheta_0(v'_2, \tau'_{22})}, \\ \sqrt{1-y_2^2} = cn(u'_2, l) = \frac{Vl_1}{Vl} \frac{\vartheta_2(v'_2, \tau'_{22})}{\vartheta_0(v'_2, \tau'_{22})}, \\ \sqrt{1-l^2y_2^2} = dn(u'_2, l) = \sqrt{l_1} \frac{\vartheta_3(v'_2, \tau'_{22})}{\vartheta_0(v'_2, \tau'_{22})}, \\ \sqrt{l} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_3''}, \quad \sqrt{l_1} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_3''}, \quad (l^2 + l_1^2 = 1). \end{array} \right.$$

Dividirt man jetzt die Gleichungen (47) und (48) durch Gleichung (49), so ergeben sich für die transformirten Integralmoduln die folgenden Beziehungen:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\vartheta_2' \cdot \vartheta_3''}{\vartheta_3' \cdot \vartheta_3''} = \sqrt{cl} = - \frac{\vartheta_2^2 \vartheta_{34}^2}{\vartheta_0^2 \vartheta_{14}^2} = \frac{-Vx^2 - \lambda^2}{V(1-x^2)(1-\lambda^2)}, \\ \frac{\vartheta_0' \cdot \vartheta_0''}{\vartheta_3' \cdot \vartheta_3''} = \sqrt{c_1 l_1} = \frac{\vartheta_{23}^2 \vartheta_{34}^2}{\vartheta_0^2 \vartheta_{14}^2} = \frac{V1 - x^2 \lambda^2}{V(1-x^2)(1-\lambda^2)}, \end{array} \right.$$

woraus:

$$(53) \quad \begin{cases} c = \frac{i(\lambda \pm \kappa)}{\kappa_1 \lambda_1}, & l = \frac{i(\lambda \mp \kappa)}{\kappa_1 \lambda_1}, \\ c_1 = \frac{1 \pm \kappa \lambda}{\kappa_1 \lambda_1}, & l_1 = \frac{1 \mp \kappa \lambda}{\kappa_1 \lambda_1}, \end{cases} \quad \text{wo: } \begin{cases} \kappa_1 = \sqrt{1 - \kappa^2}, \\ \lambda_1 = \sqrt{1 - \lambda^2}. \end{cases}$$

Um nun auch die durch die Transformation resultirenden algebraischen Beziehungen der Integralgrenzen herzustellen, setzen wir noch:

$$(54) \quad \begin{cases} \int_0^{\kappa_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{\kappa_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u_1 = 2 K_{11} v_1 + 2 K_{12} v_2, \\ \int_0^{\kappa_1} \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{\kappa_2} \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} = u_2 = 2 K_{21} v_1 + 2 K_{22} v_2, \end{cases}$$

wo:

$$R(x) = x(1-x)(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\kappa^2 \lambda^2 x).$$

Hierbei haben wir — wegen der später anzustellenden Vergleichung mit den Resultaten Jacobi's — dem ersten Integrale in beiden Gleichungen die untere Grenze 0 gegeben, während die von Herrn Weierstrass herrührenden Definitionen der Abel'schen Functionen an dieser Stelle die untere Grenze $\frac{1}{\lambda^2}$ erheischen. Sei daher ferner:

$$(55) \quad \begin{cases} \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\kappa_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{\kappa_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u_1 = 2 K_{11} v_1 + 2 K_{12} v_2, \\ \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\kappa_1} \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{\kappa_2} \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} = u_2 = 2 K_{21} v_1 + 2 K_{22} v_2, \end{cases}$$

so lassen sich die bekannten symmetrischen Ausdrücke $\sqrt{x_1 x_2}$, $\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}$ u. s. w., unmittelbar nach den Definitionsgleichungen der Abel'schen Functionen durch $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$ etc., darstellen*). Nun ist aber nach Gleichung (54) und (55):

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 + \int_{\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - \int_{\infty}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u_1 + K_{11} + K_{12} - i K_{11}' + i K_{12}', \\ u_2 &= u_2 + \int_{\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} - \int_{\infty}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} = u_2 + K_{21} + K_{22} - i K_{21}' + i K_{22}', \end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

$$(56) \quad \begin{cases} v_1 = v_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau_{11} - \frac{1}{2} \tau_{12}, \\ v_2 = v_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau_{21} - \frac{1}{2} \tau_{22}. \end{cases}$$

*) Siehe z. B.: Crelle's Journal Bd. 64.

Wir dividiren jetzt jede der drei Gleichungen (43), (44), (45) durch Gleichung (46) und führen zugleich statt der Argumente v_1, v_2 gemäss den Gleichungen (56) die Argumente v_1, v_2 ein. Alsdann ergibt sich, wenn wir noch die aus ϑ -Functionen (für die Nullwerthe der Argumente) zusammengesetzten Coefficienten durch κ und λ ausdrücken, wobei wir

$$\sqrt{1-\kappa^2\lambda^2} = (\kappa\lambda)_1, \quad \sqrt{\kappa^2-\lambda^2} = \lambda_\kappa$$

setzen:

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{\vartheta_1(v_1', \tau_{11}') \vartheta_1(v_2', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1', \tau_{11}') \vartheta_0(v_2', \tau_{22}')} = \frac{-(\kappa\lambda)_1 \vartheta_4^2(v_1, v_2) - \lambda_\kappa \vartheta_{02}^2(v_1, v_2) - \kappa_1 \lambda_1 \vartheta_{24}^2(v_1, v_2)}{-(\kappa\lambda)_1 \vartheta_{24}^2(v_1, v_2) + \lambda_\kappa \vartheta_0^2(v_1, v_2) - \kappa_1 \lambda_1 \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)} = \frac{Z_1}{N}, \\ \frac{\vartheta_2(v_1', \tau_{11}') \vartheta_2(v_2', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1', \tau_{11}') \vartheta_0(v_2', \tau_{22}')} = \frac{(\kappa\lambda)_1 \vartheta_3^2(v_1, v_2) - \lambda_\kappa \vartheta_1^2(v_1, v_2) - \kappa_1 \lambda_1 \vartheta_5^2(v_1, v_2)}{-(\kappa\lambda)_1 \vartheta_{24}^2(v_1, v_2) + \lambda_\kappa \vartheta_0^2(v_1, v_2) - \kappa_1 \lambda_1 \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)} = \frac{Z_2}{N}, \\ \frac{\vartheta_3(v_1', \tau_{11}') \vartheta_3(v_2', \tau_{22}')}{\vartheta_0(v_1', \tau_{11}') \vartheta_0(v_2', \tau_{22}')} = \frac{(\kappa\lambda)_1 \vartheta_{23}^2(v_1, v_2) - \lambda_\kappa \vartheta_{12}^2(v_1, v_2) + \kappa_1 \lambda_1 \vartheta_2^2(v_1, v_2)}{-(\kappa\lambda)_1 \vartheta_{24}^2(v_1, v_2) + \lambda_\kappa \vartheta_0^2(v_1, v_2) - \kappa_1 \lambda_1 \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)} = \frac{Z_3}{N}. \end{cases}$$

Die algebraischen Ausdrücke für die linken Seiten ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (51), während diejenigen für die rechten Seiten in den folgenden Gleichungen enthalten sind:

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} N &= \frac{1}{\kappa_1 \lambda_1 (\kappa\lambda)_1 \lambda_\kappa (x_1 - x_2)^2} \left\{ \begin{aligned} &(\kappa\lambda)_1^2 [(1-x_1)(1-\lambda^2 x_1)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_1) \cdot x_2(1-\kappa^2 x_2) \\ &\quad + (1-x_2)(1-\lambda^2 x_2)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_2) \cdot x_1(1-\kappa^2 x_1)] \\ &- \kappa_1^2 \lambda^2 [x_1(1-x_1)(1-\kappa^2 x_1) \cdot (1-\lambda^2 x_2)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_2) \\ &\quad + x_2(1-x_2)(1-\kappa^2 x_2) \cdot (1-\lambda^2 x_1)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_1)] \\ &+ \lambda_\kappa^2 (1-\kappa^2 \lambda^2 x_1)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_2)(x_1-x_2)^2 \\ &- 2\lambda_1^2 \sqrt{R(x_1)} \sqrt{R(x_2)} \end{aligned} \right\} \\ Z_1 &= \frac{1}{\kappa_1^2 (\kappa\lambda)_1 (x_1 - x_2)^2} \left\{ \begin{aligned} &\kappa^2 [x_1(1-x_1)(1-\lambda^2 x_1) \cdot (1-\kappa^2 x_2)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_2) \\ &\quad + x_2(1-x_2)(1-\lambda^2 x_2) \cdot (1-\kappa^2 x_1)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_1)] \\ &+ \kappa_1^2 [(1-\kappa^2 x_1)(1-\lambda^2 x_1)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_1) \cdot x_2(1-x_2) \\ &\quad + (1-\kappa^2 x_2)(1-\lambda^2 x_2)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_2) \cdot x_1(1-x_1)] \\ &- \kappa^2 \kappa_1^2 \lambda^2 (\kappa\lambda)_1^2 x_1 x_2 (x_1-x_2)^2 - 2\sqrt{R(x_1)} \sqrt{R(x_2)} \end{aligned} \right\} \\ Z_2 &= -\frac{1}{\kappa_1 \lambda_1} \left\{ \kappa^2 \lambda^2 (1-x_1)(1-x_2) + \kappa^2 (1-\lambda^2 x_1)(1-\lambda^2 x_2) - \kappa_1^2 \lambda_1^2 \right\}, \\ Z_3 &= \frac{1}{\kappa_1^2 \lambda_1^2 \lambda_\kappa^2 (x_1 - x_2)^2} \left\{ \begin{aligned} &\kappa_1^2 [x_1(1-\lambda^2 x_1)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_1) \cdot (1-x_2)(1-\kappa^2 x_2) \\ &\quad + x_2(1-\lambda^2 x_2)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_2) \cdot (1-x_1)(1-\kappa^2 x_1)] \\ &+ \lambda_\kappa^2 [x_1(1-x_1)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_1) \cdot (1-\kappa^2 x_2)(1-\lambda^2 x_2) \\ &\quad + x_2(1-x_2)(1-\kappa^2 \lambda^2 x_2) \cdot (1-\kappa^2 x_1)(1-\lambda^2 x_1)] \\ &- \kappa_1^2 \lambda_1^2 \lambda^2 (1-\kappa^2 x_1)(1-\kappa^2 x_2)(x_1-x_2)^2 \\ &- 2\lambda_1^2 \sqrt{R(x_1)} \sqrt{R(x_2)} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

Wir wollen jetzt $x_2 = 1$ setzen. Dann gehen zunächst die Gleichungen (54) — wenn wir noch statt x_1 nur x schreiben — in die folgenden über:

$$(59) \quad \begin{cases} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u_1 = 2 K_{11} v_1 + 2 K_{12} v_2, \\ \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} = u_2 = 2 K_{21} v_1 + 2 K_{22} v_2, \end{cases}$$

während die Gleichungen (57) und (58) die algebraischen Beziehungen liefern:

$$\begin{aligned} \sqrt{cl} \ y_1 y_2 &= \frac{\kappa_1 \lambda_1 \lambda_x x}{(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}, \\ \frac{\sqrt{cl}}{\sqrt{c_1 l_1}} \sqrt{(1-y_1^2)(1-y_2^2)} &= -\frac{\lambda_x (1-x)(1-\kappa^2 \lambda^2 x)}{(\kappa \lambda)_1 (1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}, \\ \frac{1}{\sqrt{c_1 l_1}} \sqrt{(1-c^2 y_1)(1-l^2 y_2)} &= \frac{\kappa_1 \lambda_1 (1-\kappa^2 \lambda^2 x^2)}{(\kappa \lambda)_1 (1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}, \end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung von (52):

$$(60) \quad \begin{cases} y_1 y_2 = -\frac{\kappa_1^2 \lambda_1^2 x}{(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}, \\ \sqrt{(1-y_1^2)(1-y_2^2)} = \frac{(1-x)(1-\kappa^2 \lambda^2 x)}{(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}, \\ \sqrt{(1-c^2 y_1)(1-l^2 y_2)} = \frac{1-\kappa^2 \lambda^2 x^2}{(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten der Gleichungen (60) folgt aber:

$$(y_1 + y_2)^2 = \frac{(1-\kappa^2 x)^2 (1-\lambda^2 x)^2 + (1-\kappa^2)^2 (1-\lambda^2)^2 x^2 - (1-x)^2 (1-\kappa^2 \lambda^2 x)^2 - 2(1-\kappa^2)(1-\lambda^2)(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)x}{(1-\kappa^2 x)^2 (1-\lambda^2 x)^2},$$

folglich:

$$(y_1 + y_2) = 0, \text{ d. h. } y_1 = -y_2.$$

Setzen wir daher

$$y_1 = y, \quad y_2 = -y,$$

so wird zunächst aus Gleichung (50):

$$(61) \quad \begin{cases} u_1' = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2 y^2)}} = 2 C v_1', \\ u_2' = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2 y^2)}} = - \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2 y^2)}} = 2 L v_2', \end{cases}$$

während die algebraischen Beziehungen (60) die Form annehmen:

$$(62) \quad \begin{cases} y^2 = + \frac{\kappa_1^2 \lambda_1^2 x}{(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}, \\ 1 - y^2 = \frac{(1-x)(1-\kappa^2 \lambda^2 x)}{(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}, \\ \sqrt{(1-c^2 y)(1-l^2 y)} = \frac{1-\kappa^2 \lambda^2 x^2}{(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)}. \end{cases}$$

Es bleibt jetzt nur noch die Relation zwischen den Integralen u_1, u_2 und u'_1, u'_2 festzustellen. Aus Gleichung (59) folgt mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$(63) \quad \begin{aligned} v_1 = \frac{1}{2}(v'_1 + v'_2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{u'_1}{2C} + \frac{u'_2}{2L} \right) \quad \text{und} \quad v_2 = v'_2 = \frac{u'_2}{2L}; \\ \begin{cases} u_1 = \frac{K_{11}}{2C} u'_1 + \frac{K_{11} + 2K_{12}}{2L} u'_2, \\ u_2 = \frac{K_{21}}{2C} u'_1 + \frac{K_{21} + 2K_{22}}{2L} u'_2, \end{cases} \end{aligned}$$

oder wenn man die Integrale selbst einsetzt:

$$(64) \quad \begin{cases} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{K_{11}}{2C} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2 y^2)}} - \frac{K_{11} + 2K_{12}}{2L} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2 y^2)}}, \\ \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{K_{21}}{2C} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2 y^2)}} - \frac{K_{21} + 2K_{22}}{2L} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2 y^2)}}, \end{cases}$$

Andererseits findet man aber durch unmittelbares Einsetzen der algebraischen Substitutionen (62):

$$(65) \quad \begin{cases} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2 y^2)}} = \frac{1}{2} \kappa_1 \lambda_1 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - \frac{1}{2} \kappa \lambda \kappa_1 \lambda_1 \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}}, \\ \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2 y^2)}} = \frac{1}{2} \kappa_1 \lambda_1 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{1}{2} \kappa \lambda \kappa_1 \lambda_1 \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}}, \end{cases}$$

(wenn wir in den Ausdrücken für die Moduln (53) jedesmal das obere Zeichen wählen),

oder auch:

$$(66) \quad \begin{cases} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{c_1 + l_1}{2} \left\{ \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2 y^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2 y^2)}} \right\}, \\ \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{(c_1 + l_1)^2}{2(c_1 - l_1)} \left\{ \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2 y^2)}} - \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2 y^2)}} \right\}, \end{cases}$$

so dass sich die Relationen ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{K_{11}}{2C} &= -\frac{K_{11} + 2K_{12}}{2L} = -\frac{c_1 + l_1}{2}, \\ \frac{K_{21}}{2C} &= \frac{K_{21} + 2K_{22}}{2L} = -\frac{(c_1 + l_1)^2}{2(c_1 - l_1)}, \end{aligned}$$

und hieraus:

$$(67) \quad \frac{K_{11}}{K_{21}} = -\frac{K_{11} + 2K_{12}}{K_{21} + 2K_{22}} = -\kappa\lambda.$$

Ich will schliesslich noch die Resultate, welche Jacobi im 8^{ten} Bande des Crelle'schen Journals gegeben hat, zur Vergleichung hier mittheilen. Sie lauten:

$$\int_0^x \frac{dx}{V(x)(1-x)(1-\kappa\lambda x)(1+\kappa x)(1+\lambda x)} = \frac{b' + c'}{2} \{F(b, \varphi) + F(c, \varphi)\},$$

$$\int_0^x \frac{Vx \, dx}{V(1-x)(1-\kappa\lambda x)(1+\kappa x)(1+\lambda x)} = \frac{(c' + b')^2}{2(c' - b')} \{F(b, \varphi) - F(c, \varphi)\},$$

(wo $F(b, \varphi)$, $F(c, \varphi)$ das elliptische Integral 1^{ter} Gattung in der Legendre'schen Form bedeuten),

$$\sin^2 \varphi = \frac{(1+\kappa)(1+\lambda)x}{(1+\kappa x)(1+\lambda x)},$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{(1-x)(1-\kappa\lambda x)}{(1+\kappa x)(1+\lambda x)}, \quad b = \frac{V\kappa + V\lambda}{V(1+\kappa)(1+\lambda)}, \quad b' = \frac{1 - V\kappa\lambda}{V(1+\kappa)(1+\lambda)},$$

$$1 - b^2 \sin^2 \varphi = \frac{(1 - V\kappa\lambda x)^2}{(1+\kappa x)(1+\lambda x)}, \quad c = \frac{V\kappa - V\lambda}{V(1+\kappa)(1+\lambda)}, \quad c' = \frac{1 + V\kappa\lambda}{V(1+\kappa)(1+\lambda)}.$$

$$1 - c^2 \sin^2 \varphi = \frac{(1 + V\kappa\lambda x)}{(1+\kappa x)(1+\lambda x)},$$

Diese Gleichungen sind aber offenbar mit den unsrigen: (66), (62), (53), identisch, wenn wir statt der Jacobi'schen Bezeichnungen:

$$\sqrt{\kappa}, \quad \sqrt{\lambda}, \quad b, \quad b', \quad c, \quad c'$$

der Reihe nach

$$i\lambda, \quad i\kappa, \quad c, \quad c_1, \quad l, \quad l_1$$

und ausserdem

$$\sin \varphi = y$$

setzen.

Beuthen O/S., 28. August 1875.