Zum Waringschen Problem für rationale Zahlen und Polynome.

Von

E. Kamke in Münster i. W.

§ 1.¹⁾

Herr Siegel²⁾ hat kürzlich bei Gelegenheit einer größeren Arbeit gezeigt, wie der Waring-Hilbertsche Satz über die Zerfällung von Zahlen in n -te Potenzen auf wenigen Zeilen aus der Hilbertschen Identität abgeleitet werden kann, wenn man sich nicht auf ganze Zahlen beschränkt, sondern auch rationale Zahlen zuläßt. Nach diesem Muster läßt sich aber auch ganz kurz und unmittelbar ein Satz über die Zerfällung rationaler Zahlen in rationale Polynomwerte beweisen, den ich vor kurzem aus einer schwieriger zu gewinnenden Verallgemeinerung des erwähnten Waring-Hilbertschen Satzes für ganze Zahlen hergeleitet habe³⁾. Dabei mag dieser Satz, entsprechend dem Siegelschen Muster, ebenfalls gleich für Zahlkörper formuliert werden.

Satz. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl $N = N(n)$ von folgender Art: Es sei K ein algebraischer Zahlkörper und*

$$\varphi(x) = \sum_{v=0}^n \alpha_v x^v$$

ein Polynom n -ten Grades mit Koeffizienten in K , mit⁴⁾ $\alpha_n > 0$ und mit

¹⁾ Für den Inhalt von § 2 siehe dessen Anfang. Beide Paragraphen sind meiner Habilitationsschrift entnommen, die Ostern 1922 der Philos. Fakultät der Universität Münster i. W. vorgelegen hat.

²⁾ *Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate* [Math. Zeitschr. 11 (1921), S. 246–275]; Satz 2.

³⁾ *Über die Zerfällung rationaler Zahlen in rationale Polynomwerte* [Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 828–828].

⁴⁾ Sind α, β Zahlen des Körpers, so soll $\alpha > \beta$ bzw. $\alpha < \beta$ bedeuten, daß in allen reellen der konjugierten Körper $K^{(i)}$ die Ungleichung $\alpha^{(i)} > \beta^{(i)}$ bzw. $\alpha^{(i)} < \beta^{(i)}$

mindestens einer reellen Nullstelle in jedem reellen der konjugierten Körper³⁾. Es bezeichne $u^{(i)}$ die größte Nullstelle im konjugierten Körper $K^{(i)}$, sofern dieser reell ist. Dann ist für jede Zahl $\zeta > 0$ des Körpers die Gleichung

$$(1) \quad \zeta = \sum_{x=0}^N \varphi(\xi_x)$$

durch solche Zahlen ξ_x des Körpers lösbar, für welche in den reellen Körpern $K^{(i)}$

$$(2) \quad \xi_x^{(i)} > u^{(i)}$$

ist, also die Zahlen $\varphi(\xi_x) > 0$ sind.

Hierin ist für $\varphi(x) = x^n$ der Siegelsche Satz 2, für den Körper der rationalen Zahlen mein früherer Satz enthalten.

Für den Beweis wird der folgende Hilfssatz mehrfach gebraucht.

Hilfssatz. Es sei $K = K(\vartheta)$ ein nicht total imaginärer Körper, und es seien $K^{(1)}, \dots, K^{(t)}$ die reellen unter den konjugierten Körpern. Dann gibt es bei gegebenem $\varepsilon > 0$ zu je t reellen Zahlen $v_1, \dots, v_t$ eine solche Zahl ω des Körpers, daß

$$0 < \omega^{(i)} - v_i < \varepsilon \quad (i = 1, \dots, t)$$

ist.

Beweis. Es gibt ein Polynom $g(x)$ mit reellen Koeffizienten, das bzw. für $x = \vartheta^{(1)}, \dots, \vartheta^{(t)}$ die Werte $v_1 + \frac{1}{2}\varepsilon, \dots, v_t + \frac{1}{2}\varepsilon$ annimmt. Die Koeffizienten des Polynoms können so durch rationale Zahlen approximiert werden, daß für das neue Polynom $h(x)$

$$|h(\vartheta^{(i)}) - g(\vartheta^{(i)})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, \dots, t)$$

ist. Hieraus folgt aber wegen $g(\vartheta^{(i)}) = v_i + \frac{1}{2}\varepsilon$ für $\omega = h(\vartheta)$ die Behauptung.

Beweis des Satzes. Nach dem Hilfssatz 1 meiner Dissertation⁴⁾ gibt es zu n solche natürlichen Zahlen $P; A_1, \dots, A_{n+1}; r_1, \dots, r_P$ und

besteht. Ist kein reeller unter den konjugierten Körpern vorhanden, d. h. K total imaginär, so wird durch $\alpha > \beta$ und $\alpha < \beta$ nichts ausgesagt. — Entsprechendes gilt für $\alpha \geq \beta$ und $\alpha \leq \beta$.

³⁾ Wenn K total imaginär ist, fällt diese Bedingung fort; ebenso die Ungleichung (2).

⁴⁾ Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes [Math. Ann. 88 (1921). S. 85–112].

ganze Zahlen $a_{\kappa\lambda}$, daß für $\nu = 2, \dots, n+1$ folgende n Identitäten mit den gleichen Zahlen P, r_κ und $a_{\kappa\lambda}$ bestehen⁷⁾:

$$A_\nu(x_1^2 + \dots + x_9^2)^\nu = \sum_{\kappa=1}^P r_\kappa (a_{\kappa 1}x_1 + \dots + a_{\kappa 9}x_9)^{2\nu}.$$

Bei zweimaliger Differentiation nach x_1 entstehen hieraus die n Identitäten

$$(3) \quad \begin{cases} A_{\nu+1}(x_1^2 + \dots + x_9^2)^\nu + 2\nu A_{\nu+1}x_1^2(x_1^2 + \dots + x_9^2)^{\nu-1} \\ = (2\nu+1) \sum_{\kappa=1}^P r_\kappa a_{\kappa 1}^2 (a_{\kappa 1}x_1 + \dots + a_{\kappa 9}x_9)^{2\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n). \end{cases}$$

Hierin wird $x_4 = \dots = x_9 = 0$, $B_\nu = A_{\nu+1}/(2\nu+1)$ und die mit n gegebene natürliche Zahl $\sum_{\kappa=1}^P r_\kappa a_{\kappa 1}^2 = Q$ gesetzt. Da jede total positive Zahl des Körpers in vier Quadrate von Körperzahlen zerfällbar ist⁸⁾, so ist für jede Zahl H_λ des Körpers mit $H_\lambda^2 < 1$ die Gleichung

$$H_\lambda^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 = 1$$

durch Zahlen $x_2, \dots, x_5$ des Körpers lösbar. Daher folgen, wenn noch die Zahlen $a_{\kappa 1}H_\lambda + a_{\kappa 2}x_2 + \dots + a_{\kappa 5}x_5$, jede $r_\kappa a_{\kappa 1}^2$ -mal aufgeführt, in irgendeiner Reihenfolge mit $\eta_{1\lambda}, \dots, \eta_{Q\lambda}$ bezeichnet werden, aus (3) für ein jedes derartiges H_λ die n Gleichungen

$$(4) \quad B_\nu + 2\nu B_\nu H_\lambda^2 = \sum_{\kappa=1}^Q \eta_{\kappa\lambda}^2 \quad (\nu = 1, \dots, n),$$

wobei die $\eta_{\kappa\lambda}$ Zahlen aus K sind. Da, wiederum nach dem eben angeführten Satze, jede Zahl H des Körpers mit $0 < H < 1$ in der Form $H = H_1^2 + \dots + H_4^2$ darstellbar und jedes dieser $H_i^2 < 1$ ist, folgt durch Addition der Gleichungen (4) für $\lambda = 1, 2, 3, 4$, daß für jedes $0 < H < 1$ des Körpers die simultanen Darstellungen

$$(5) \quad 4B_\nu + 2\nu B_\nu H = \sum_{\kappa=1}^N \eta_{\kappa\nu}^2 \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

gelten, wobei die B_ν gewisse mit n gegebene positive rationale Zahlen sind, $N = 4Q$ eine natürliche mit n gegebene Zahl ist und die $\eta_{\kappa\nu}$ gewisse Zahlen des Körpers sind:

Es sei nun $\zeta > 0$ eine gegebene Zahl des Körpers.

⁷⁾ So mit Rücksicht auf § 2; für § 1 könnte von vornherein $x_6 = \dots = x_9 = 0$ sein.

⁸⁾ Siegel a. a. O., Satz 1.

Nach dem Hilfssatz gibt es im Körper eine Zahl ϱ mit⁹⁾ $\varrho \stackrel{*}{>} u$ und mit $\varphi(\varrho) < \zeta/2N$. Es werde

$$\varphi(y + \varrho) = \psi_{\varrho}(y) = \sum_{r=0}^n \beta_r y^r$$

gesetzt. Dann sind die $\beta_r = \beta_r(\varrho)$ Zahlen in K , und es ist $\beta_n > 0$ sowie, da jedes $u^{(i)}$ die größte reelle Nullstelle war, $\beta_0 = \varphi(\varrho) > 0$.

In (5) werde nun die r -te Zeile mit $\beta_r \gamma^r$ multipliziert, wo $\gamma > 0$ eine vorläufig noch willkürliche Zahl aus K ist. Werden die so entstehenden n Gleichungen addiert, und wird

$$\sigma(x) = \sum_{r=1}^n B_r \beta_r x^r, \quad \tau(x) = \sigma'(x),$$

$$\xi_x = \gamma \eta_x^2 + \varrho \quad (x = 1, \dots, N)$$

gesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} N\beta_0 + 4\sigma(\gamma) + 2H\gamma\tau(\gamma) &= \sum_{x=1}^N \psi_{\varrho}(\gamma \eta_x^2) \\ &= \sum_{x=1}^N \varphi(\xi_x), \end{aligned}$$

wobei $\xi_x \geq \varrho$, also $\xi_x \stackrel{*}{>} u$ ist. Hieraus folgt die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes, sobald gezeigt ist, daß es in K Zahlen H mit $0 < H < 1$, $\gamma > 0$ und $\xi_0 \stackrel{*}{>} u$ gibt, so daß

$$(6) \quad \varphi(\xi_0) + N\beta_0 + 4\sigma(\gamma) + 2H\gamma\tau(\gamma) = \zeta.$$

Dieses läßt sich aber so beweisen: In jedem der reellen konjugierten Körper ist, wenn $\sigma^{(i)}(x)$ dadurch aus $\sigma(x)$ gebildet wird (und ebenso $\tau^{(i)}(x)$ aus $\tau(x)$ und später $\varphi^{(i)}(x)$ aus $\varphi(x)$), daß die Koeffizienten durch die konjugierten Zahlen ersetzt werden, $4\sigma^{(i)}(x) + x\tau^{(i)}(x)$ ein Polynom mit positivem höchsten Koeffizienten und ohne konstantes Glied, nimmt also für $x > 0$ jeden positiven Wert an; daher gibt es für jedes ξ_0 in K mit

$$(7) \quad \xi_0 \stackrel{*}{>} u \quad \text{und} \quad \varphi(\xi_0) < \frac{1}{2}\zeta$$

zu jedem reellen konjugierten Körper wegen $\beta_0 < \zeta/2N$ eine positive Zahl $c^{(i)}$, so daß

$$(8) \quad \zeta^{(i)} - \varphi^{(i)}(\xi_0^{(i)}) - N\beta_0^{(i)} = 4\sigma^{(i)}(c^{(i)}) + c^{(i)}\tau^{(i)}(c^{(i)})$$

⁹⁾ Der Stern über dem Zeichen $>$ oder $<$ einer Ungleichung bedeutet, daß die Ungleichung für jeden reellen Körper $K^{(i)}$ gelten soll, nachdem an jeden in ihr vorkommenden Buchstaben oben der Index (i) angehängt ist. Ist K total imaginär, so sagt die Ungleichung nichts aus.

ist. Da $\tau^{(i)}(x)$ höchstens $n - 1$ positive Nullstellen hat, kann dabei durch passende Wahl von ξ_0 innerhalb der Bedingungen (7), die wegen des Hilfssatzes möglich ist, überdies erreicht werden, daß in jedem reellen konjugierten Körper $\tau^{(i)}(c^{(i)}) \neq 0$ ist. Nach dem Hilfssatz gibt es dann eine Zahl $\gamma > 0$ in K , für welche die $\gamma^{(i)}$ so nahe an den (positiven) $c^{(i)}$ liegen, daß

$$|\gamma \tau(\gamma)| \stackrel{*}{>} \frac{1}{2} |c \tau(c)|$$

und

$$|4\sigma(c) + c\tau(c) - 4\sigma(\gamma) - \gamma\tau(\gamma)| \stackrel{*}{<} \frac{1}{2} |c\tau(c)|,$$

also

$$\stackrel{*}{<} |\gamma \tau(\gamma)|$$

ist. Für dieses γ ist mithin wegen (8)

$$(9) \quad \gamma \tau(\gamma) - |\gamma \tau(\gamma)| \stackrel{*}{<} \zeta - \varphi(\xi_0) - N\beta_0 - 4\sigma(\gamma) \stackrel{*}{<} \gamma \tau(\gamma) + |\gamma \tau(\gamma)|.$$

Wird nun

$$H = \frac{\zeta - \varphi(\xi_0) - N\beta_0 - 4\sigma(\gamma)}{2\gamma \tau(\gamma)}$$

gesetzt, so ist H eine Zahl des Körpers und erfüllt wegen (9) sowohl bei positivem wie bei negativem $\tau^{(i)}(\gamma^{(i)})$ die Ungleichungen $0 < H < 1$ und schließlich auch (6).

§ 2.

Das Siegelsche Verfahren liefert auch einen Satz Waringscher Art für rationale Funktionen.

Herr Landau¹⁰⁾ hat auf Grund des im § 1 erwähnten Satzes über die Zerfällbarkeit jeder total positiven Zahl eines Körpers in vier Quadrate gezeigt, daß sich jedes definite rationalzahlige¹¹⁾ Polynom von x als Summe von acht Quadraten rationalzahliger Polynome von x darstellen läßt.

Herr Fleck¹²⁾ hat die Zerfällung definiter rationalzahliger Polynome in 4. und 6. Potenzen von Polynomen in Angriff genommen, ohne jedoch — was in der Natur der Sache begründet ist — zu ähnlich allgemeinen Ergebnissen zu kommen, wie sie über die Zerfällung von *ganzen Zahlen* in Potenzen bekannt sind.

¹⁰⁾ Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate [Math. Ann. 62 (1906), S. 272–285].

¹¹⁾ Ein Polynom heißt rationalzahlig, wenn die Koeffizienten rationale Zahlen sind. Eine rationale Funktion heißt rationalzahlig, wenn sie als Quotient zweier rationalzahliger Polynome geschrieben ist.

¹²⁾ Über die Darstellung gewisser ganzer rationalzahliger definiter Funktionen als Summen von vierten resp. sechsten Potenzen ganzer rationalzahliger Funktionen [Math. Ann. 64 (1907), S. 567–572].

Läßt man demgegenüber bei der Darstellung auch rationale Funktionen zu, so besteht folgender

Satz. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl $N = N(n)$ von folgender Art: Ist $g(x)$ eine definite¹³⁾ rationale rationalzahlige Funktion vom Grad $m = \mu n$ (μ gerade, $\mu \geq 0$), so gibt es N rationale rationalzahlige Funktionen $\xi_n(x)$ mit nirgends verschwindenden Nennern, so daß*

$$g(x) = \sum_{n=1}^N \xi_n^n(x), \quad \xi_n(x) \geq 0$$

ist.

Für den Beweis wird der Weierstraßsche Approximationssatz erweitert zu dem

Hilfssatz 1. Es sei $f(x)$ eine stetige reelle Funktion, für die

$$(10) \quad \lim_{x=+\infty} f(x) = \lim_{x=-\infty} f(x) = L$$

vorhanden ist. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine rationale rationalzahlige Funktion $R(x)$ mit nirgends verschwindendem Nenner, so daß für alle x gleichmäßig

$$|f(x) - R(x)| < \varepsilon$$

ist.

Beweis. Wegen (10) gibt es zu ε rationale Zahlen $X > 1$ und K , so daß für alle $|x| > X - 1$

$$(11) \quad |f(x) - K| < \frac{1}{4} \varepsilon$$

ist. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gibt es ein Polynom $S(x)$ mit reellen Koeffizienten, so daß für $|x| < X + 1$

$$|f(x) - K - S(x)| < \frac{1}{8} \varepsilon$$

ist, und daher ein rationalzahliges Polynom $T(x)$, so daß für die gleichen x

$$(12) \quad |f(x) - K - T(x)| < \frac{1}{4} \varepsilon$$

ist.

Es werde

$$\alpha(x) = \frac{1}{1 + (X^{-1}x)^{2m}} \quad (m \text{ ganz, } > 0)$$

gesetzt. Dann ist $\alpha(x)$ eine rationale rationalzahlige Funktion, und bei festem x ist für $m \rightarrow \infty$

¹³⁾ Eine rationale Funktion heißt hier definit, wenn sie beständig > 0 ist und ihr Nenner nirgends verschwindet.

$$\alpha(x) \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{bei } |x| > X, \\ = \frac{1}{2} & \text{bei } |x| = X, \\ \rightarrow 1 & \text{bei } |x| < X. \end{cases}$$

Aus dem Verhalten von $\alpha(x)$ und aus den Polynomialeigenschaften von $T(x)$ folgt, daß m so groß gewählt werden kann, daß

$$\begin{aligned} |\alpha(x)T(x)| &< \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{für alle } |x| \geq X + \frac{1}{2}, \\ |(\alpha(x) - 1)T(x)| &< \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{für alle } |x| \leq X - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ist. Dann ist wegen (11) und (12) sowohl für $|x| \geq X + \frac{1}{2}$ wie für $|x| \leq X - \frac{1}{2}$

$$(13) \quad |f(x) - K - \alpha(x)T(x)| < \varepsilon.$$

Für $X - \frac{1}{2} < |x| < X + \frac{1}{2}$ ist $|T(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ wegen (11) und (12), also, da stets $|\alpha(x)| \leq 1$ ist, wiederum wegen (11)

$$(14) \quad |f(x) - K - \alpha(x)T(x)| < \varepsilon.$$

Durch (13) und (14) ist aber die Behauptung mit $R(x) = K + \alpha(x)T(x)$ bewiesen.

Hilfssatz 2. Es sei $g(x)$ eine definite rationale rationalzahlige Funktion vom Grad $m = \mu n$ (n ganz und > 0 , μ gerade und ≥ 0); es seien ferner $0 < a < b$ gegebene Zahlen. Dann gibt es eine definite rationale rationalzahlige Funktion $\gamma(x)$, so daß

$$a < \gamma^n(x)g(x) < b$$

ist.

Beweis. Es sei $G(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, $A = \sqrt[n]{a}$, $B = \sqrt[n]{b}$, $H(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}\mu} / G(x)$. Dann sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 für $f(x) = \frac{1}{2}(A + B)H(x)$ erfüllt. Daher gibt es für $\varepsilon = \frac{1}{2}(B - A)$ mal der unteren Grenze von $H(x)$ eine rationale rationalzahlige Funktion $R(x)$ mit nirgends verschwindendem Nenner, so daß

$$\left| R(x) - \frac{1}{2}(A + B)H(x) \right| < \varepsilon \leq \frac{1}{2}(B - A)H(x)$$

ist. Hieraus folgt

$$AH(x) < R(x) < BH(x),$$

also insbesondere $R(x)$ definit, und weiter

$$a(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}\mu n} / g(x) < R^n(x) < b(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}\mu n} / g(x),$$

$$a < \left(\frac{R(x)}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}\mu}} \right)^n g(x) < b,$$

wodurch der Hilfssatz mit $\gamma(x) = R(x) / (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}\mu}$ bewiesen ist.

Beweis des Satzes. Da aus dem erwähnten Landauschen Satz unmittelbar folgt, daß jede definite rationale rationalzahlige Funktion sich als Summe von acht Quadraten rationaler rationalzahliger Funktionen mit nirgends verschwindenden Nennern darstellen läßt, ist für jede rationale rationalzahlige Funktion $H_\lambda(x)$ mit nirgends verschwindendem Nenner und mit $H_\lambda^2(x) < 1$ die Gleichung

$$H_\lambda^2(x) + x_2^2(x) + \dots + x_9^2(x) = 1$$

durch Funktionen $x_2(x), \dots, x_9(x)$ mit den bei $H_\lambda(x)$ genannten Eigenschaften lösbar. Für ein solches $H_\lambda(x)$ folgt daher aus (3) für $\nu = n$, wenn die Zahlen $B = B_n$ und Q dieselbe Bedeutung wie dort haben,

$$(15) \quad B + 2nBH_\lambda^2(x) = \sum_{\kappa=1}^Q \eta_{\kappa\lambda}^{2n}(x),$$

wobei die $\eta_{\kappa\lambda}(x)$ rationale rationalzahlige Funktionen mit nirgends verschwindenden Nennern sind. Da weiter für jede definite rationale rationalzahlige Funktion $H(x) < 1$ die Gleichung

$$H(x) = H_1^2(x) + \dots + H_8^2(x)$$

durch acht Funktionen $H_\lambda(x)$ der angegebenen Art lösbar ist, folgt durch Addition der Gleichungen (15) für $\lambda = 1, \dots, 8$ bei $N = 8Q$, daß für jede Funktion $H(x)$ der genannten Art eine Gleichung

$$(16) \quad 8B + 2nBH(x) = \sum_{\kappa=1}^N \eta_{\kappa}^{2n}(x)$$

besteht, wobei die $\eta_{\kappa}(x)$ die vorhin bei $\eta_{\kappa\lambda}(x)$ genannten Eigenschaften haben.

Zu der gegebenen Funktion $g(x)$ gibt es nach Hilfssatz 2 eine definite rationale rationalzahlige Funktion $\gamma(x)$, so daß

$$8B < g(x)\gamma^n(x) < 8B + 2nB$$

ist. Die dann durch

$$(17) \quad H(x) = \frac{g(x)\gamma^n(x) - 8B}{2nB}$$

definierte Funktion erfüllt daher die an das Bestehen von (16) geknüpften Bedingungen; mithin folgt aus (16) und (17)

$$g(x)\gamma^n(x) = \sum_{\kappa=1}^N \eta_{\kappa}^{2n}(x),$$

und hieraus die Richtigkeit des Satzes mit $\xi_{\kappa}(x) = \eta_{\kappa}^2(x)/\gamma(x)$.

Hagen i. W., 18. 12. 1921:

(Eingegangen am 20. 12. 1921.)