

rechnung der Schwingungszeiten zu, sondern sie gestattet auch einen tieferen Einblick in die Zusammenhänge der einzelnen Schwingungsvorgänge und in das Verhältnis der Schwingungsdauern zueinander. Die Anwendung der vorstehenden Ueberlegungen zur Berechnung der Schwingungsdauern von Maschinenwellen habe ich in einem Aufsatz, der demnächst in der »Schweizerischen Bauzeitung« erscheint, an einem praktischen Zahlenbeispiel durchgeführt.

55

Zur Synthese der ebenen Mechanismen.¹⁾

Von H. ALT in Dresden.

Die Synthese der Mechanismen hat das Ziel, Mechanismen bezüglich ihrer Bauart und der Abmessungen ihrer Glieder derart auszumitteln, daß sie bestimmte vorgeschriebene Bedingungen erfüllen. Eine systematische Behandlung der Getriebesynthese hat zunächst die Aufgabe zu lösen, diejenige zwangsläufige kinematische Kette zu finden, die einem gesuchten Mechanismus, entsprechend den jeweils gestellten Bedingungen, zugrunde gelegt werden soll. Diese Grundaufgabe der Getriebesynthese wird bei den ebenen Gelenkmechanismen in der Weise gelöst, daß man auf Grund der von M. Grübler²⁾ herrührenden Zwangsläufigkeitsbedingungen die sämtlichen überhaupt möglichen zwangsläufigen kinematischen Ketten für eine beliebige Gliederzahl aufstellt und dann eine für den vorliegenden Zweck geeignete Kette auswählt. Ist die kinematische Kette gewählt, die für den gesuchten Mechanismus benutzt werden soll, so sind noch die Abmessungen ihrer einzelnen Glieder zu ermitteln. Hieraus folgt als weitere wesentliche Aufgabe der Getriebesynthese, zu untersuchen, wie viele und welche Forderungen sich bei der Konstruktion von Mechanismen erfüllen lassen, und ferner, Methoden anzugeben, nach denen auf Grund der gestellten Forderungen die gesuchten Abmessungen der Glieder ermittelt werden können. Die Behandlung dieser Hauptaufgabe bildet den Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Als Ausgangspunkt dienen Untersuchungen Burmesters³⁾, die dieser jedoch für einen anderen Zweck, nämlich für die Behandlung der angenäherten Geradfürungen, angestellt hat. Diese Untersuchungen, deren Ergebnisse im ersten Abschnitt in der Hauptsache ohne Beweis vorgeführt werden, befassen sich mit den Beziehungen, die zwischen drei, vier und fünf endlich verschiedenen Lagen einer komplizierten bewegten Ebene bestehen, und insbesondere mit denjenigen Punkten, deren entsprechende Lagen auf einem Kreis liegen. Bei drei Lagen einer Ebene geht durch entsprechende Punkte stets ein Kreis, bei vier Lagen dagegen nur durch die Punkte, die auf bestimmten Kurven liegen, während man bei fünf Lagen einer Ebene nur vier solcher Kreispunkte erhält. Der zweite Abschnitt bringt eine Untersuchung über diejenigen Punkte bei drei Lagen einer Ebene, denen Kreise vom gleichen Radius entsprechen, wobei sich der geometrische Ort dieser Punkte als Koppelkurve ergibt. Im dritten Abschnitt, der zwei durch eine dritte Ebene gelenkig verbundene Ebenen behandelt, wird die Aufgabe erörtert, bei einer Anzahl beliebig gegebener Lagen zweier Ebenen in diesen die beiden Gelenkpunkte so zu bestimmen, daß ihre Entfernung in den gegebenen Lagen beider Ebenen die gleiche Größe hat und sie daher durch eine dritte Ebene starr verbunden werden können. Die Lösung dieser Aufgabe ist für zwei oder drei Lagen zweier Ebenen bereits durch M. Grübler⁴⁾ angegeben worden; sie wird hier auch für vier und fünf Lagen entwickelt und zwar unter Benutzung des Gedankens der Relativbewegung in der Weise, daß die Relativlagen der einen Ebene gegen die andere Ebene untersucht und auf sie die Ergebnisse der beiden ersten Abschnitte angewendet werden. Hierbei wird gezeigt, wie man allgemein eine Anzahl der wichtigsten bei der Getriebesynthese auftretenden Forderungen erfüllen kann. Als Sonderfälle werden im vierten Abschnitt das allgemeine Gelenkviereck und daran anschließend das Schubkurbelgetriebe wegen ihrer praktischen Bedeutung ausführlich be-

¹⁾ Auszug aus einer von der Technischen Hochschule Dresden genehmigten Habilitationsschrift.

²⁾ M. Grübler, Allgemeine Eigenschaften der zwangsläufigen ebenen kinematischen Ketten, Civilingenieur 1883, S. 167 bis 200, und Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbflusses in Preußen 1885, S. 179 bis 223.

³⁾ L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, S. 599 u. f.

⁴⁾ M. Grübler, Getriebelehre, Berlin 1917, S. 107 u. f.

handelt. Eine Untersuchung über die Forderung bestimmter Geschwindigkeiten bildet den Inhalt des fünften Abschnittes, der sich mit dem Fall befaßt, daß bei zwei durch eine dritte Ebene gelenkig verbundenen Ebenen die Winkelgeschwindigkeiten beider Ebenen in ein oder in zwei Lagen ein vorgeschriebenes Verhältnis haben sollen, wobei die entsprechenden Momentanpole als gegeben anzunehmen sind. Die hier abgeleiteten allgemeinen Verfahren werden im sechsten Abschnitt verwertet, der die Forderung behandelt, daß ein oder zwei gegebene Lagen der einen Ebene Totlagen sein sollen. Die in den ersten sechs Abschnitten gewonnenen Ergebnisse, aus denen überall zeichnerische Verfahren entwickelt werden, um die praktische Anwendung zu erleichtern, werden im siebenten und achten Abschnitt bei der Untersuchung der Dampfmaschinensteuerung von Heusinger und bei der einer Wälzhebelsteuerung angewendet. Dabei wird der Hauptwert darauf gelegt, an einer Reihe von typischen Fragestellungen der praktischen Getriebesynthese die Brauchbarkeit der vorgeführten Methoden, die Art ihrer Handhabung und ihre vielseitige Verwendbarkeit zu zeigen.

1. Die Kreise durch entsprechende Punkte bei drei, vier und fünf Lagen einer Ebene. Sind zwei Lagen P_1 und P_2 einer Ebene P gegeben, etwa durch je zwei entsprechende Punkte A_1, B_1 bzw. A_2, B_2 , so kann man die Bewegung, durch die P von P_1 nach P_2 gelangt, durch die Drehung um einen bestimmten Punkt P^{12} ersetzt denken, den man den Pol der Ebenen P_1 und P_2 nennt und der als Schnittpunkt der Mittellote von $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gefunden wird. Dieser Pol ist zugleich selbstentsprechender Punkt der beiden Ebenen P_1 und P_2 .

Betrachtet man drei Lagen P_1, P_2, P_3 einer Ebene P , so lassen sich diesen drei verschiedene Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} zuordnen, deren Bedeutung aus den beigefügten Marken ersichtlich ist. Diese Pole bilden ein Dreieck, dessen Winkel halb so groß sind wie die

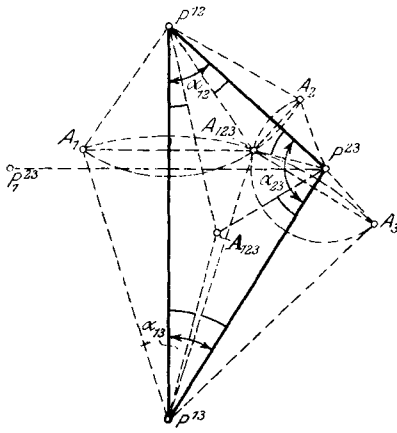


Abb. 1

entsprechenden Drehwinkel; z. B. ist der Poldreieckswinkel α_{12} bei P^{12} (Abb. 1) gleich der Hälfte des Drehwinkels der Ebenen P_1 und P_2 . Zu einem beliebig gegebenen Punkte A_1 der Ebene P_1 findet man die entsprechenden Punkte A_2 und A_3 in den Ebenen P_2 und P_3 , indem man um P^{12} mit P^{13} A_1 den Kreis mit dem Zentriwinkel $2\alpha_{12}$ bzw. um P^{13} mit P^{23} A_1 den Kreis mit dem Zentriwinkel $2\alpha_{13}$ schlägt. Die von A_1 auf $P^{12} P^{13}$, von A_2 auf $P^{12} P^{23}$, von A_3 auf $P^{13} P^{23}$ gefällten Lote schneiden sich in einem Punkte A_{123} , der der Grundpunkt des Punktes A bezüglich der drei Ebenen P_1, P_2, P_3 genannt werden möge. Durch die drei homologen Punkte A_1, A_2, A_3 läßt sich stets ein Kreis legen, dessen Mittelpunkt A_{123} mit dem Grundpunkt A_{123} in der Beziehung steht, daß die Verbindungslinien beider Punkte mit den drei Polen in jedem Pol gleiche Winkel mit den Seiten des Poldreiecks einschließen. In Abb. 1 ist in jedem Pol ein Paar gleicher Winkel

durch Kreisbögen bezeichnet. Diese Eigenschaft liefert eine Konstruktion für den Kreis-
mittelpunkt A_{123} , wenn z. B. der Punkt A_1 bzw. sein Grundpunkt A_{123} gegeben ist, oder umgekehrt für den Punkt A_1 bzw. A_{123} , wenn A_{123} gegeben ist. Man findet, daß jedem Punkte A_1 eindeutig ein Mittelpunkt A_{123} zugeordnet ist und umgekehrt. Zwischen den Punkten A_1 und A_{123} besteht eine quadratische Verwandtschaft, bei der einer Geraden im System der Punkte A_1 ein durch die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} gehender Kegelschnitt im System der zugeordneten Mittelpunkte A_{123} entspricht. Eine besondere Stellung nehmen hierbei die Pole selbst ein. Jedem der drei Pole, aufgefaßt als Punkte des Mittelpunktsystems, entspricht nicht ein einzelner Punkt A_1 , sondern es entsprechen ihm sämtliche Punkte der gegenüberliegenden Polgeraden. Betrachtet man z. B. P^{23} als Grundpunkt, so fällt dieser mit den zugehörigen homologen Punkten der Ebenen P_2 und P_3 zusammen. Den dritten homologen Punkt P_1^{23} in der Ebene P_1 findet man, indem man von P^{23} auf $P^{12} P^{13}$ das Lot fällt und dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Entsprechend findet man zu den andern Polen P^{12} und P^{13} die Punkte P_3^{12} bzw. P_2^{13} in den Ebenen P_3 bzw. P_2 .

Nimmt man zu den bisher behandelten drei Ebenen P_1, P_2, P_3 noch eine vierte P_4 hinzu, so ergeben sich insgesamt sechs Pole $P^{12}, P^{13}, P^{23}, P^{14}, P^{24}, P^{34}$, die jedoch nicht

mehr unabhängig voneinander sind, sondern für die der folgende von Burmester gefundene Satz gilt: Die beiden durch einen Pol gehenden Geradenpaare, die sich auf je zwei Pole stützen, deren Marken gleiche Ziffern enthalten, bilden gleiche Winkel (Abb. 2). Z. B. ist $\sphericalangle P^{14} P^{12} P^{24} = \sphericalangle P^{13} P^{12} P^{23}$. In Abb. 2 sind in jedem Pol zwei gleiche Winkel durch Kreisbögen mit Pfeilen angegeben, ferner für einen beliebigen Punkt A seine homologen Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 mit den zugehörigen Grundpunkten $A_{123}, A_{124}, A_{134}, A_{234}$. Von den sechs Polen nennt man je zwei, deren Marken keine gleichen Ziffern aufweisen, also P^{12}, P^{34} bzw. P^{13}, P^{24} bzw. P^{23}, P^{14} . Gegenpole. Nimmt man zwei Paar Gegenpole, z. B. P^{12}, P^{34} und P^{13}, P^{24} , als gegeben an, so liegen die beiden andern Pole auf einer zirkularen Kurve dritten Grades, die Burmester die Pollagenkurve nennt und die sich wie folgt ermitteln läßt. Durch die gegebenen zwei Paare von Gegenpolen ist ein Vierseit bestimmt, dessen zwei weitere Eckpunkte mit Π^{14} bzw. Π^{23} bezeichnet seien (Abb. 3). Die drei Diagonalen $P^{12} P^{34}, P^{13} P^{24}, \Pi^{14} \Pi^{23}$ des Vierseits werden durch eine Gerade ζ halbiert. Die Umkreise der vier Dreiecke, die durch das Vierseit gebildet werden, schneiden sich in einem Punkte Γ , den man daher als Schnittpunkt zweier dieser vier Kreise finden kann. Zieht man durch Γ die Verbindungslinien mit zwei der sechs Ecken des Vierseits, etwa mit P^{12} und P^{13} , wobei sich auf der Geraden ζ die Schnittpunkte M^{12} bzw. M^{13} ergeben, und schlägt um M^{12} den Kreis durch P^{12} und um M^{13} den Kreis durch P^{13} , so bestimmen diese beiden Kreise ein Kreisbüschel mit der Mittellinie ζ . Zieht man nun durch Γ eine beliebige Gerade g , die ζ in M schneidet, und schlägt um M den Kreis, der dem eben definierten Büschel angehört, so schneidet dieser die Gerade g in zwei Punkten P' und P'' der Pollagenkurve, die hiernach punktweise bestimmt werden kann. Die Gerade ζ nennt man die Mittellinie und den Punkt Γ den Hauptbrennpunkt der Pollagenkurve. Wenn also zwei Paare von Gegenpolen gegeben sind, so zeichnet man die Pollagenkurve, auf der man den fünften Pol beliebig wählen kann, während der sechste Pol dann auf ihr zufolge der oben angegebenen Winkelbeziehungen eindeutig bestimmt ist.

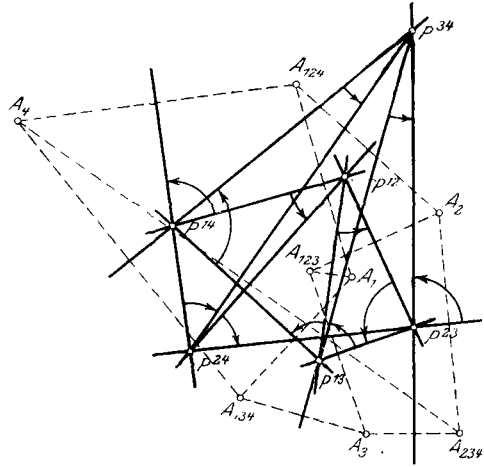


Abb. 2

Bei drei Lagen einer Ebene liegen je drei homologe Punkte A_1, A_2, A_3 stets auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt A_{123} eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt kann jedem Punkte A_{123} eine und nur eine Gruppe von drei homologen Punkten A_1, A_2, A_3 zugeordnet

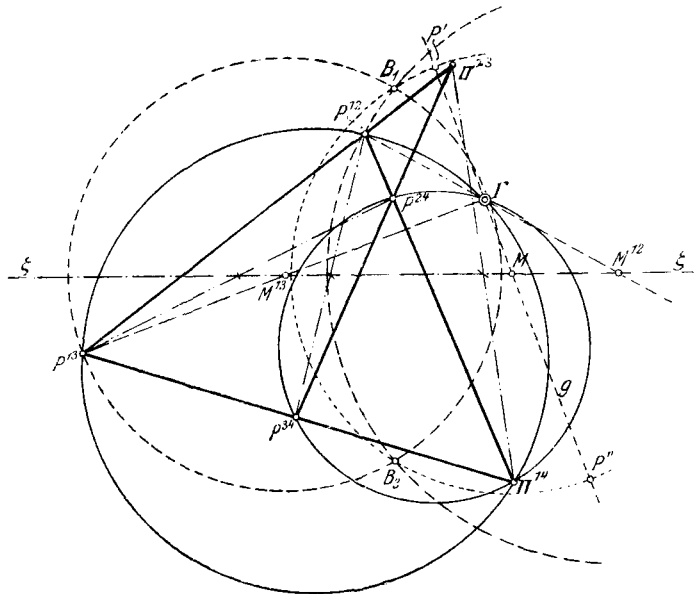
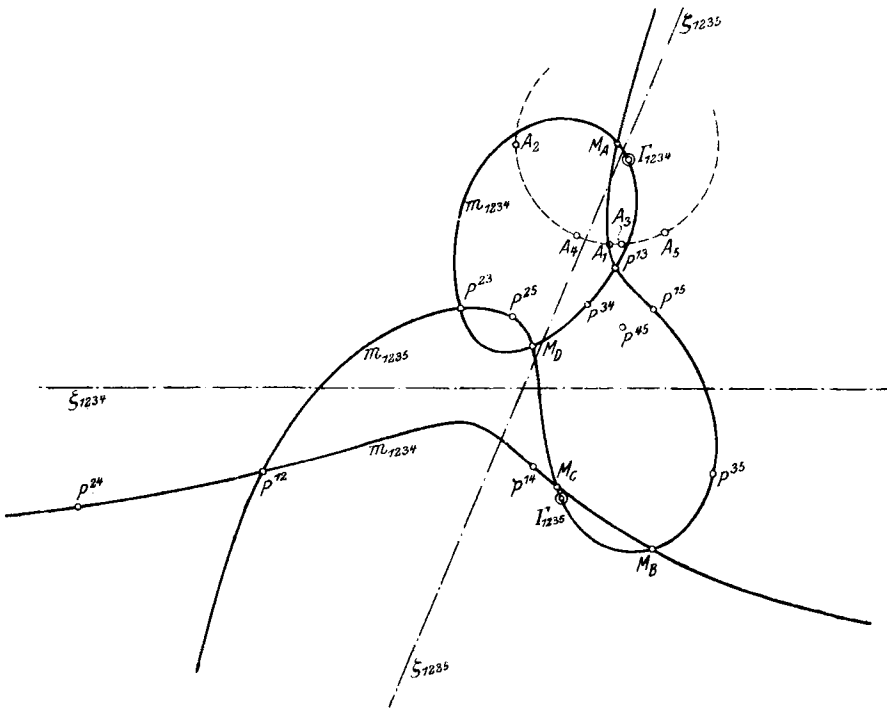


Abb. 3

werden. Bei vier Lagen einer Ebene werden im allgemeinen vier homologe Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 nicht mehr auf einem Kreise liegen, es wird aber Gruppen von je vier homologen Punkten geben, durch die sich ein Kreis legen läßt. Den geometrischen Ort der Mittelpunkte dieser Kreise durch vier homologe Punkte nennt Burmester die Mittelpunktkurve und den geometrischen Ort der entsprechenden Punkte A_i in der Ebene P_i die Kreispunktkurve. Man erkennt, daß die Kreispunktkurven in den Ebenen P_1, P_2, P_3, P_4 , d. h. die geometrischen Oerter der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 , kongruent sind. Wie Burmester gezeigt hat, ist die Mittelpunktkurve mit der oben definierten Pollagenkurve für die Pole $P^{12}, P^{13}, P^{23}, P^{14}, P^{24}, P^{34}$ und die Kreispunktkurve der Ebene P_1 mit der Pollagenkurve für die Pole $P^{12}, P^{13}, P_1^{23}, P^{14}, P_1^{24}, P_1^{34}$ identisch, wobei z. B. P_1^{34} der zu P^{34} bezüglich der Geraden $P^{13}P^{14}$ symmetrisch liegende Punkt ist. Entsprechend findet man die Kreispunktkurven in den Ebenen P_2, P_3, P_4 .

Bei fünf Lagen P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 einer Ebene P ergeben sich die zehn Pole P^{12}, P^{13} , usf. Zeichnet man zwei Mittelpunktkurven, etwa für die Ebenen P_1, P_2, P_3, P_4 und P_1, P_2, P_3, P_5 , so haben die Schnittpunkte beider Kurven die Eigenschaft, Mittelpunkte von Kreisen zu sein, die durch je fünf entsprechende Punkte der vorgelegten Ebenen gehen. Was die Zahl der Schnittpunkte anbelangt, so ergibt sich folgendes. Als Kurven dritter Ordnung haben sie neun Punkte gemeinsam. Zu diesen gehören im vorliegenden Falle die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} , die wegen ihrer oben erwähnten Sonderstellung als Mittelpunkte von Kreisen durch homologe Punkte hier nicht in Betracht kommen, und ferner die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte, durch die alle Mittelpunktkurven gehen. Von den neun Schnittpunkten sind also fünf in Abzug zu bringen, so daß sich der Burmestersche Satz ergibt: Bei fünf Lagen einer Ebene gibt es im allgemeinen vier Gruppen von je fünf homologen Punkten, die auf je einem Kreise liegen. Von den vier Kreismittelpunkten können alle reell, zwei reell und zwei imaginär oder alle imaginär sein. Durch diese vier Kreismittelpunkte, die man die Burmesterschen Punkte nennt und die als Schnittpunkte der Mittelpunktkurven für die Ebenen P_1, P_2, P_3, P_4 und P_1, P_2, P_3, P_5 gefunden wurden, gehen auch die drei übrigen Mittelpunktkurven der fünf gegebenen Ebenen, so daß man die vier Burmestersche Punkte als Schnittpunkte zweier beliebiger



der fünf möglichen Mittelpunktkurven finden kann. In Abb. 4 sind die zehn Pole für fünf Ebenen und zwei Mittelpunktkurven m_{1234} und m_{1235} eingezeichnet. Man findet hier die vier reellen Burmesterschen Punkte M_A, M_B, M_C, M_D . Für M_A sind die zugeordneten fünf homologen Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , die auf einem Kreise um M_A liegen, angegeben.

Wenn mehr als fünf Lagen einer Ebene gegeben sind, so gibt es im allgemeinen keine Punkte dieser Ebene, deren homologe Lagen sämtlich auf einem Kreise liegen.

2. Kreisbahnen von vorge-schriebenem Radius. Wenn drei Lagen P_1, P_2, P_3 einer Ebene P vorgelegt sind, so läßt sich zu jedem Punkte A der Ebene P der Mittelpunkt M_A des Kreises durch die drei Lagen A_1, A_2, A_3 des Punktes A bestimmen. Es soll nun untersucht werden, wo diejenigen Mittelpunkte M_A liegen, denen Kreise von festem Radius entsprechen.

Gegeben seien die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} , ein beliebiger Punkt A_1 der Ebene P_1 und der zugeordnete Kreismittelpunkt M_A (Abb. 5). Die Strecke $A_1 M_A$ ist dann der Radius r des zu M_A gehörigen Kreises. Es sei ferner

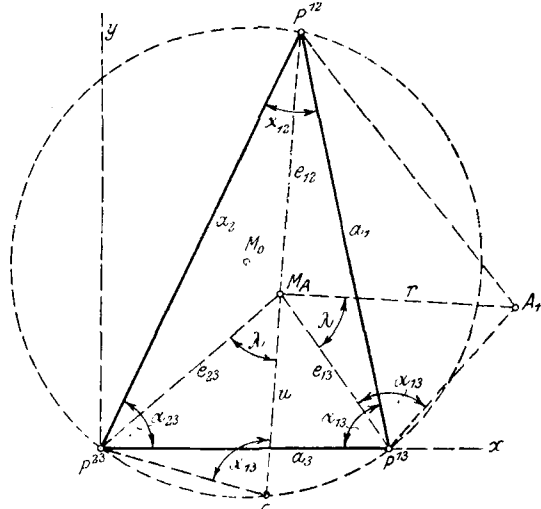


Abb. 5

$$M_A P^{12} = e_{12}, \quad M_A P^{13} = e_{13}, \quad M_A P^{23} = e_{23}.$$

Die Gerade $P^{12} M_A$ möge den Umkreis des Poldreiecks in C schneiden und es sei $M_A C = u$. Bezeichnet man die Winkel des Poldreiecks entsprechend mit $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$, so findet man

$$\sphericalangle P^{12} C P^{23} = \sphericalangle P^{12} P^{13} P^{23} = \alpha_{13}$$

als Peripheriewinkel über der gleichen Sehne. Da ferner gemäß der oben angegebenen Konstruktion des Punktes M_A

$$\sphericalangle P^{12} P^{13} A_1 = \sphericalangle P^{23} P^{13} M_A$$

ist, so folgt

$$\sphericalangle M_A P^{13} A_1 = \sphericalangle P^{23} P^{13} P^{12} = \alpha_{13}.$$

Es läßt sich nun in einfacher Weise zeigen, daß vom Punkte M_A aus je zwei der vier Punkte $P^{12}, P^{13}, P^{23}, A_1$ unter dem gleichen Winkel erscheinen. Hiernach ist im vorliegenden Falle

$$\sphericalangle A_1 M_A P^{13} = \sphericalangle P^{23} M_A C = \lambda.$$

Da somit die beiden Dreiecke $M_A A_1 P^{13}$ und $M_A P^{23} C$ in zwei Winkeln übereinstimmen und daher ähnlich sind, so gilt die Beziehung

$$r : e_{13} = e_{23} : u.$$

Bezeichnet man mit $p^2 = e_{12} u$ die Potenz des Punktes M_A in bezug auf den Kreis durch die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} , so findet man

$$e_{12} e_{13} e_{23} = r p^2 \dots \dots \dots (1).$$

Wenn r einen bestimmten gegebenen Wert besitzt, so stellt die Gleichung (1) den geometrischen Ort aller Punkte M_A dar, zu denen Kreise vom gegebenen Radius r gehören. Um die Art dieses geometrischen Ortes zu untersuchen, den wir die R_M -Kurve nennen wollen, führen wir rechtwinklige Koordinaten ein mit P^{23} als Ursprung und der Geraden $P^{23} P^{13}$ als x -Achse (Abb. 5). Bezeichnet man die Seiten des Poldreiecks mit $P^{12} P^{13} = a_1, P^{12} P^{23} = a_2, P^{13} P^{23} = a_3$, so hat der Mittelpunkt M_0 des Kreises durch P^{12}, P^{13}, P^{23} die Koordinaten

$$x_0 = \frac{1}{2} a_3, \quad y_0 = \frac{1}{2} a_3 \cot \alpha_{12}$$

und der Pol P^{12}

$$x_{12} = a_2 \cos \alpha_{23}, \quad y_{12} = a_2 \sin \alpha_{23}.$$

Die Koordinaten der beiden anderen Pole sind $x_{23} = y_{23} = 0$ bzw. $x_{13} = a_3$, $y_{13} = 0$. Wenn man die Koordinaten des beliebigen Punktes M_A mit x, y bezeichnet, so läßt sich nunmehr die Gleichung (1) in der Form schreiben:

$$(x^2 + y^2) [(x - a)^2 + y^2] [(x - a_2 \cos \alpha_{23})^2 + (y - a_2 \sin \alpha_{23})^2] = r^2 [x^2 + y^2 - a_3 x - a_3 y \cot \alpha_{12}]^2 \quad (2).$$

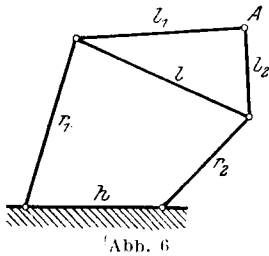


Abb. 6

Man ersieht aus Gl. (2), daß die R_M Kurve eine trizirkulare (d. h. dreimal durch die beiden zyklischen Punkte der Ebene gehende) Kurve sechsten Grades ist, welche die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} als Doppelpunkte besitzt. Da unter den trizirkularen Kurven sechsten Grades die Koppelkurven ebenfalls drei Doppelpunkte aufweisen, so liegt die Annahme nahe, daß die R_M -Kurve zur Gruppe der Koppelkurven gehört. Stellt man die Gleichung der Koppelkurve für einen beliebigen Koppelpunkt A eines allgemeinen Gelenkvierecks mit den Bezeichnungen der Abbildung 6 auf, so findet man, daß die erhaltene Gleichung mit der Kurvengleichung (2) identisch ist,

wenn man P^{23} und P^{13} als Festpunkte des Gelenkvierecks wählt und

$$l_3 = a_3, \quad l = r \frac{a_3}{2 a_2 \sin \alpha_{23}}$$

$$l_1 = r_1 = \frac{r}{2 \sin \alpha_{23}}, \quad l_2 = r_2 = r \frac{a_1}{2 a_2 \sin \alpha_{23}}$$

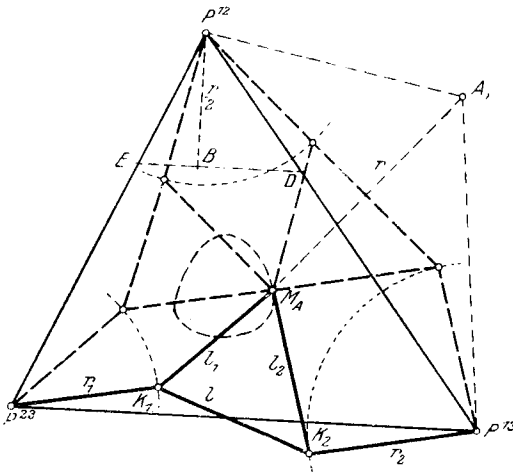


Abb. 7

setzt. Diese Strecken lassen sich, wie man sofort erkennt, sehr einfach zeichnerisch ermitteln, wenn das Poldreieck $P^{12} P^{13} P^{23}$ und der Radius r gegeben sind (Abb. 7). Man zieht durch P^{12} die Höhe des Poldreiecks, trägt auf dieser die Strecke $P^{12} B = \frac{1}{2} r$ auf und zieht durch B zu $P^{13} P^{23}$ die Parallele, die $P^{12} P^{23}$ in E und $P^{12} P^{13}$ in D schneidet. Dann ist $P^{12} E = l_1 = r_1$, $P^{12} D = l_2 = r_2$, $DE = l$. Wir finden also das Ergebnis: Die R_M -Kurven dreier Lagen einer Ebene sind spezielle Koppelkurven. In jedem Punkte der Koppelkurve geht die Kurvennormale durch den Schnittpunkt der beiden Kurbelgeraden des Gelenkvierecks, so daß sich in allen Punkten die Kurventangenten leicht angeben lassen. Daher kann man die Kurve schon durch eine geringe Zahl von Punkten hinreichend genau bestimmen.

Da sich nach dem Satze von Roberts¹⁾ jede Koppelkurve durch drei verschiedene Gelenkvierecke erzeugen läßt und im vorliegenden Falle die drei Punkte P^{12}, P^{13}, P^{23} dem Punkte M_A gleichartig zugeordnet sind, so folgt, daß das obere gegebene Gelenkviereck mit dem Steg $P^{23} P^{13} = a_3$ ersetzt werden kann durch ein solches mit dem Steg $P^{23} P^{12} = a_2$ oder eins mit dem Steg $P^{12} P^{13} = a_1$, wobei die Bestimmungsstücke der Gelenkvierecke ähnlich, wie oben angegeben ist, zu konstruieren sind. Hierbei ergibt sich, daß in jedem der drei Punkte P^{12}, P^{13}, P^{23} die beiden Kurbeln gleich lang sind und symmetrisch zur Verbindungslinie mit M_A liegen. In Abb. 7 sind die drei Gelenkvierecke eingezeichnet, bei denen der gemeinsame Koppelpunkt M_A für den gegebenen Wert von r die ebenfalls eingezeichnete R_M -Kurve beschreibt. Das Gelenkviereck $P^{23} P^{13} K_1 K_2 M_A$ mit dem Steg $P^{23} P^{13}$ ist hierbei ausgezogen, während die beiden anderen Gelenkvierecke gestrichelt sind.

Untersucht man die R_M -Kurven für verschiedene Werte von r , so tritt die Frage auf, innerhalb welcher Grenzen die Größe des Radius r gewählt werden darf. Es ist unmittelbar einzusehen, daß es eine obere Grenze für r nicht gibt, da stets Punkte vor-

¹⁾ Roberts, Three-bar Motion in the Plane Space, Proceedings of the London Mathematical Society, VII 1875, S. 14.

handen sind, für die r unendlich groß wird, für die also drei homologe Punkte auf einer Geraden liegen. Die Beantwortung der Frage, welchen kleinsten Wert r annehmen kann, ergibt sich durch folgende Ueberlegung. Wir hatten gefunden, daß die R_M -Kurven Koppelkurven sind, die durch Gelenkvierecke erzeugt werden, deren Steg eine der Seiten des Dreieckes $P^{12}P^{13}P^{23}$ ist und deren übrige Abmessungen dem gegebenen Radius r proportional sind. Hieraus folgt, daß man den kleinsten möglichen Radius erhält, wenn man ein Gelenkviereck von möglichst kleinen Abmessungen benutzt. Betrachtet man (Abb. 8) die Seite $P^{13}P^{23} = a_3$ als Steg des Gelenkvierecks, so ergeben sich für dieses die kleinsten Abmessungen, wenn man mit den früheren Bezeichnungen $r_1 + r_2 + l = a_3$ setzt. Da hier $l_1 = r_1$ und $l_2 = r_2$ und das Koppeldreieck $K_1M_AK_2$ dem Poldreieck $P^{23}P^{12}P^{13}$ ähnlich ist, so ist in diesem Falle, in dem das Gelenkviereck in Ruhe bleibt und die Koppelkurve daher zu einem Punkte zusammenschumpft, dieser Punkt der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Poldreiecks. Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man die Dreieckseite $P^{12}P^{13}$ bzw. $P^{23}P^{12}$ als Steg betrachtet. Damit ist der Satz gefunden: Bei drei Lagen einer Ebene gibt es immer einen und nur einen kleinsten Kreis durch drei entsprechende Punkte. Dieser kleinste Kreis hat als Mittelpunkt den Mittelpunkt des Inkreises des Poldreiecks und ist doppelt so groß wie dieser.

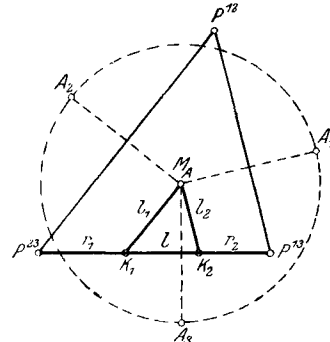


Abb. 8

Der geometrische Ort aller Punkte A_1 der Ebene P_1 , die mit ihren homologen Punkten A_2 und A_3 auf Kreisen von gleichem Radius r liegen, soll R_1 -Kurve genannt werden. Die entsprechenden geometrischen Orter R_2, R_3 für die Punkte A_2 bzw. A_3 sind der R_1 -Kurve kongruent. Um die R_1 -Kurve zu ermitteln, soll zunächst gezeigt werden, daß diejenigen beiden Kreise gleichen Radius haben, die um einen beliebigen Punkt M_A und den zugeordneten Grundpunkt A_{123} geschlagen werden, wobei der Kreis um M_A durch die von A_{123} abgeleiteten homologen Punkte geht und umgekehrt. Vorgelegt seien die Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} und der dem letzteren in P_1 entsprechende Punkt P_1^{23} (Abb. 9). Ferner sei ein beliebiger Punkt A_{123} und der zugeordnete Mittelpunkt M_A gegeben, und es seien A_1, A_2, A_3 die von A_{123} als Grundpunkt und M_1, M_2, M_3 die von M_A als Grundpunkt abgeleiteten homologen Punkte.

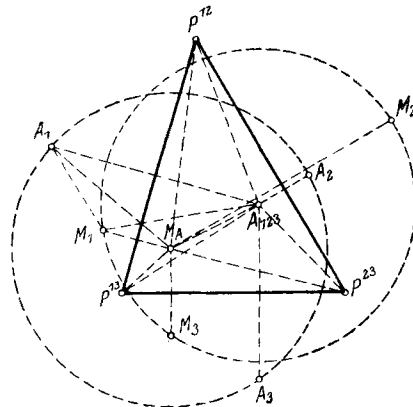


Abb. 9

Dann liegen A_1, A_2, A_3 auf einem Kreise um M_A und M_1, M_2, M_3 auf einem Kreise um A_{123} . Da die vier Punkte M_1, A_1, A_{123}, M_A ein gleichschenkliges Trapez bilden, so sind dessen Diagonalen $M_A A_1$ und $A_{123} M_1$ einander gleich. Ebenso findet man $M_A A_2 = A_{123} M_2$ und $M_A A_3 = A_{123} M_3$. Damit ist der Beweis erbracht, daß die um M_A und A_{123} geschlagenen Kreise durch je drei homologe Punkte gleichen Radius haben, und daß infolgedessen die R_M -Kurve durch einen Punkt M_A immer durch den zugeordneten Punkt A_{123} geht. Da nun A_{123} bezüglich der Geraden $P^{12}P^{13}$ symmetrisch zu A_1 liegt, so folgt, daß auch die R_1 -Kurve symmetrisch zur R_M -Kurve bezüglich $P^{12}P^{13}$ gelegen ist. Wir finden somit, daß die R_1 -Kurve ebenfalls eine Koppelkurve ist, die sich von dem Dreieck $P^{12}P^{13}P_1^{23}$ in derselben Weise ableitet wie die R_M -Kurve vom Poldreieck $P^{12}P^{13}P^{23}$. Das Entsprechende gilt für die R_2 - und die R_3 -Kurve.

Es tritt nun die Frage auf, ob man bei vier Lagen einer Ebene Gruppen von vier homologen Punkten ermitteln kann, die auf je einem Kreise von vorgeschriebenem Radius r liegen. Nimmt man die sechs Pole der vier Ebenen als gegeben an, so läßt sich für jedes der vier hierdurch bestimmten Poldreiecke zu dem gegebenen Werte von r die R_M Kurve ermitteln. Je zwei dieser Kurven, z. B. für die Ebenen P_1, P_2, P_3 bzw. P_1, P_2, P_4 , schneiden sich in Punkten, welche die gewünschte Eigenschaft besitzen.

Hieraus folgt, daß alle vier R_M -Kurven, die sich zu den sechs Polen für das gegebene r zeichnen lassen, durch die gesuchten Punkte gehen. Außerdem haben je zwei R_M -Kurven einen der sechs Pole als Doppelpunkt und ferner die beiden zyklischen Punkte der Ebene als dreifache Punkte gemeinsam. Es ist unmittelbar einzusehen, daß die sämtlichen Punkte, welche die vier R_M -Kurven gemeinsam haben, auf der Mittelpunktkurve der vier Ebenen liegen müssen, die hiernach auch der geometrische Ort aller Schnittpunkte von je vier R_M -Kurven für alle Werte von r ist. Um bei vier Lagen einer Ebene die Mittelpunkte von Kreisen mit gleichem vorgeschriebenem Radius r durch je vier homologe Punkte zu finden, zeichnet man am zweckmäßigsten zunächst die Mittelpunktkurve und dann für drei der vier Lagen zum gegebenen Werte r die R_M -Kurve. Beide Kurven schneiden sich in den gesuchten Punkten. Die Zahl der Schnittpunkte ergibt sich durch folgende Ueberlegung. Da die R_M -Kurve eine trizirkulare Kurve sechsten Grades und die Mittelpunktkurve eine zirkulare Kurve dritten Grades ist, so haben beide 18 Punkte gemeinsam, von denen sechs in die beiden zyklischen Punkte der Ebene fallen. Da die Mittelpunktkurve ferner durch die allen R_M -Kurven gemeinsamen drei Doppelpunkte geht, so sind weitere sechs Punkte in Abzug zu bringen, so daß man

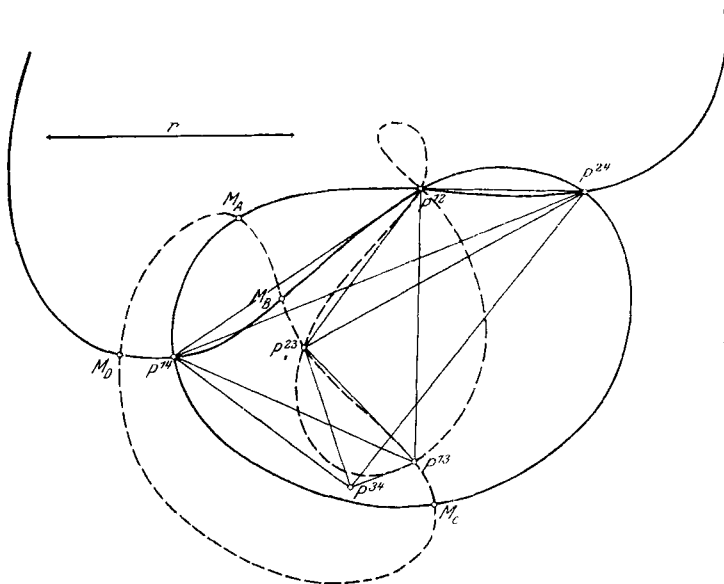


Abb. 10

sechs Punkte der verlangten Art erhält. Für die Ebenen P_1, P_2, P_3, P_4 ergeben sich die entsprechenden Konstruktionen, wenn man z. B. in der Ebene P_1 an Stelle der R_M -Kurve die R_1 -Kurve und statt der Mittelpunktkurve die Kreispunktkurve benutzt. Damit ist der für die Anwendungen wichtige Satz gefunden: Bei vier Lagen einer Ebene gibt es im allgemeinen sechs Gruppen von je vier homologen Punkten, die auf je einem Kreise von vorgeschriebenem Radius r liegen. Von den sechs Schnittpunkten können sechs reell, vier reell und zwei

imaginär, zwei reell und vier imaginär oder sechs imaginär sein. In Abb. 10 sind für einen bestimmten Wert von r die R_M Kurven für das System der Ebenen P_1, P_2, P_3 (gestrichelt) und für das der Ebenen P_1, P_2, P_4 (ausgezogen) angegeben. Von den sechs in Betracht kommenden Schnittpunkten beider Kurven sind hier vier reell: M_A, M_B, M_C, M_D .

3. Die Ermittlung der Gelenkpunkte bei zwei durch eine dritte Ebene gelenkig verbundenen Ebenen. Von drei Ebenen P, Q und S , die sich komplanz in derselben ruhenden Ebene bewegen, seien die Ebenen P und Q durch die Ebene S gelenkig verbunden. Von jeder Ebene seien mehrere Lagen P_1, P_2, P_3, \dots bzw. Q_1, Q_2, Q_3, \dots bzw. S_1, S_2, S_3, \dots gegeben, die einander zugeordnet sind. Die Pole jeder Ebene werden entsprechend mit P^{12}, P^{13}, \dots bzw. Q^{12}, Q^{13}, \dots bzw. S^{12}, S^{13}, \dots bezeichnet.

Betrachtet man zunächst drei einander zugeordnete Lagen der Ebenen P und Q , so ist bei Annahme eines beliebigen Punktes D als Gelenkpunkt der Ebenen P und S der zugeordnete Gelenkpunkt E der Ebenen Q und S eindeutig bestimmt. Bei der Ermittlung des Punktes E geht man davon aus, daß die Länge DE sich nicht ändert und daher die relativen Lagen des Punktes D gegen eine der drei Lagen Q_1, Q_2, Q_3 der Ebene Q , z. B. gegen Q_1 , auf einem Kreise um E_1 liegen müssen¹⁾. In den Ebenen

¹⁾ Hierüber vergl. M. Grübler, Getriebelehre, S. 107 u. f.

P_1, P_2, P_3 seien drei beliebige homologe Punkte D_1, D_2, D_3 gegeben (Abb. 11); die mit diesen Punkten zusammenfallenden Punkte der Ebenen Q_1, Q_2 bzw. Q_3 werden mit D_1', D_2', D_3' bezeichnet. In der Ebene Q_1 lassen sich die den Punkten D_2' und D_3' der Ebenen Q_2 bzw. Q_3 entsprechenden Punkte D_2^1 bzw. D_3^1 konstruieren, wobei darauf zu achten ist, daß D_2' und D_2^1 auf einem Kreise um Q^{12} liegen und daß der Winkel $D_3'Q^{12}D_2^1$ doppelt so groß ist wie der Winkel $Q^{23}Q^{12}Q^{13}$ des Poldreiecks. Entsprechend liegen D_3' und D_3^1 auf einem Kreise um Q^{13} , und es ist Winkel $D_3'Q^{13}D_3^1 = 2 Q^{23}Q^{13}Q^{12}$. Durch diese Beziehungen sind die Punkte D_2^1 und D_3^1 in der Ebene Q_1 bestimmt. Der Mittelpunkt E_1 des Kreises durch die drei Punkte D_1', D_2^1, D_3^1 ist der gesuchte Gelenkpunkt der Ebene Q_1 und der Radius des eben gefundenen Kreises ist gleich dem Abstände DE der Gelenkpunkte der Ebenen P und Q . Man konstruiert nun aus dem Poldreieck $Q^{12}Q^{13}Q^{23}$ zum

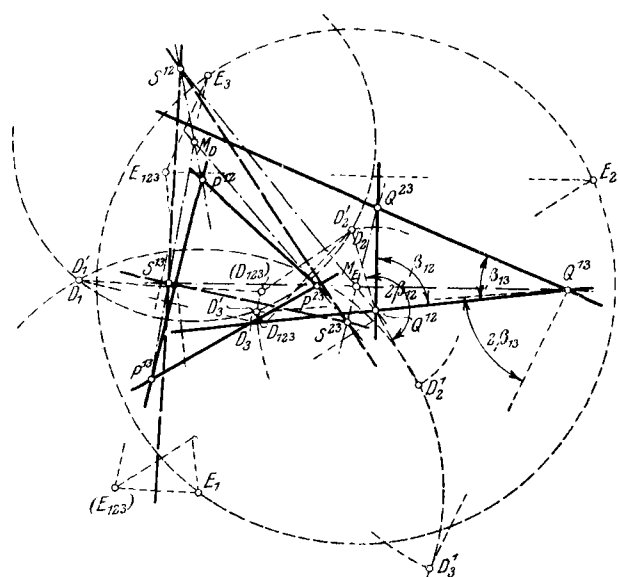


Abb. 11

Punkte E_1 die homologen Punkte E_2 und E_3 der Ebenen Q_2 bzw. Q_3 , und es muß sich dann zeigen, daß $E_1D_1 = E_1D_2 = E_1D_3$ ist.

Durch die Punkte D und E ist die Ebene S bestimmt, deren Lagen S_1, S_2, S_3 seien, und deren entsprechende Pole S^{12}, S^{13}, S^{23} durch die Punktepaare D_1E_1, D_2E_2, D_3E_3 bestimmt sind. Dem Punkte D , der den beiden Ebenen P und S angehört, sei als Mittelpunkt des Kreises durch die drei homologen Punkte D_1, D_2, D_3 der Punkt M_D zugeordnet, ebenso dem gemeinsamen Punkte E der Ebenen Q und S ein Punkt M_E als Mittelpunkt des Kreises durch die drei homologen Punkte E_1, E_2, E_3 . Da die Mittelsenkrechte zu D_1D_2 durch M_D geht, die Punkte D_1 und D_2 aber auch von den Polen P^{12} und S^{12} je gleiche Abstände haben, so folgt, daß die Punkte M_D, P^{12} und S^{12} in einer Geraden liegen. Das Entsprechende gilt auch für die anderen Pole. Somit finden wir den Satz: Die Verbindungslinien je zweier entsprechender Pole der Ebenen P und S bilden ein Strahlenbüschel durch den Mittelpunkt M_D des Kreises durch die homologen Lagen D_1, D_2, D_3 des Gelenkpunktes beider Ebenen. Ebenso bilden die Geraden durch je zwei entsprechende Pole der Ebenen Q und S ein Strahlenbüschel durch den Punkt M_E . Hiernach findet man den Pol S^{12} als Schnittpunkt der Geraden $P^{12}M_D$ und $Q^{12}M_E$ und entsprechend die Pole S^{13} und S^{23} als Schnittpunkte der Geraden $P^{13}M_D$ und $Q^{13}M_E$ bzw. $P^{23}M_D$ und $Q^{23}M_E$. Da die Punkte D und E der Ebene S angehören, so müssen die von D_1, D_2, D_3 bzw. E_1, E_2, E_3 auf die entsprechenden Seiten des Poldreiecks $S^{12}S^{13}S^{23}$ gefällten Lote sich in je einem Punkte (D_{123}) bzw. (E_{123}) schneiden, wobei $(D_{123})(E_{123}) = D_1E_1 = D_2E_2 = D_3E_3$ ist.

Den Lagen P_1, P_2, P_3 der Ebene P waren die Lagen Q_1, Q_2, Q_3 der Ebene Q eindeutig zugeordnet worden, so daß also Q sich in der Lage Q_1 befindet, wenn P die Lage P_1 einnimmt. Das Gleiche gilt für die Lagen P_2 und Q_2 sowie P_3 und Q_3 . Denkt man sich nun P_2 und Q_2 als ein starrs Gebilde so zurückbewegt, daß Q_2 mit Q_1 zusammenfällt, dann nimmt die mit Q_2 vorübergehend als starr verbunden gedachte Ebene P_2 die Lage P_2^1 ein. In der gleichen Weise bewegt man das System der beiden starr verbunden gedachten einander zugeordneten Ebenen Q_3 und P_3 so, daß Q_3 mit Q_1 zusammenfällt; die Lage, in die dann P_3 gelangt, werde mit P_3^1 bezeichnet. Ordnet man nun die Ebenen P_1, P_2^1 und P_3^1 den Ebenen Q_1, Q_2 bzw. P_1, P_2, P_3 zu, so sind P_1, P_2^1, P_3^1 die relativen Lagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1 . Die zu ihnen gehörigen Pole werden entsprechend mit R^{12}, R^{13}, R^{23} bezeichnet und in folgender Weise

gefunden (Abb. 12). Die im Pole P^{12} zusammenfallenden homologen Punkte der Ebenen P_1 und P_2 seien die Punkte H_1 und H_2 , deren homologer Punkt H_3 in der Ebene P_3 ermittelt wird, indem man von P^{12} auf P^{13} P^{23} das Lot fällt und dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Entsprechend ergibt sich zu den im Pole P^{13} zusammenfallenden Punkten J_1 und J_2 der homologe Punkt J_3 und zu den in P^{23} lie-

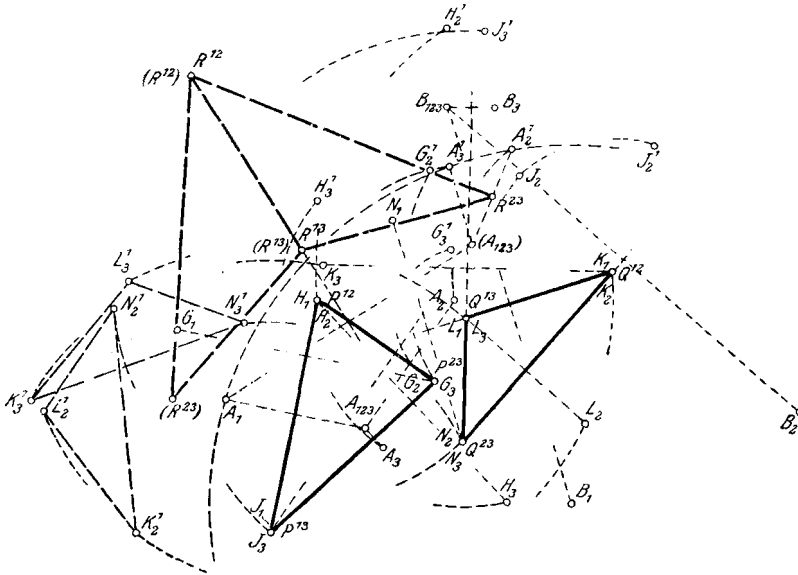


Abb. 12

genden Punkten G_2 und G_3 der homologe Punkt G_1 . Man bringt nun die Punkte G_3, H_3, J_3 durch Drehung um den Pol Q^{13} um einen Winkel, der doppelt so groß ist wie der Poldreieckswinkel $Q^{23}Q^{13}Q^{12}$, in die Lagen G_3^1, H_3^1 bzw. J_3^1 . Ferner ergeben sich entsprechend die Punkte G_2^1, H_2^1, J_2^1 , indem man die Punkte G_2, H_2, J_2 um Q^{12} dreht und zwar um einen Winkel, der doppelt so groß ist wie der Winkel $Q^{13}Q^{12}Q^{23}$. Hierbei sind G_1, H_1, J_1 Punkte der Ebene P_1 , ferner G_2^1, H_2^1, J_2^1 Punkte der Ebene P_2^1 und G_3^1, H_3^1, J_3^1 Punkte der Ebene P_3^1 . Durch je zwei der genannten Punkte in jeder Ebene sind dann die Pole R^{12}, R^{13}, R^{23} als Schnittpunkte von Mittelsenkrechten bestimmt.

Ermittelt man umgekehrt die relativen Lagen Q_1, Q_2^1, Q_3^1 der Ebene Q gegen die Ebene P_1 , so bleiben die beiden Ebenen P_1 und Q_1 ebenso wie im vorherigen Falle in der gleichen gegenseitigen Lage. Hieraus folgt, daß die Pole (R^{12}) und (R^{13}) der relativen Lagen der Ebene Q gegen P_1 mit den entsprechenden Polen R^{12} bzw. R^{13} der Relativlagen der Ebene P gegen Q_1 zusammenfallen. Aus den Eigenschaften der Relativbewegung ergibt sich nun, daß die Winkel des Poldreiecks $R^{12}R^{13}R^{23}$ gleich der Differenz der entsprechenden Winkel der Poldreiecke $P^{12}P^{13}P^{23}$ und $Q^{12}Q^{13}Q^{23}$ sind. Hierbei ist den Winkeln ein Richtungssinn beizulegen, der in den einzelnen Polen durch die Marken der beiden andern Pole des Dreiecks bestimmt wird. Daher sind die entsprechenden Winkel der beiden Dreiecke $R^{12}R^{13}R^{23}$ und $(R^{12})(R^{13})(R^{23})$ absolut genommen einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. Da beide Dreiecke die Seite $R^{12}R^{13}$ gemeinsam haben, so sind sie kongruent, und die beiden Pole R^{23} und (R^{23}) liegen symmetrisch bezüglich der Geraden $R^{12}R^{13}$.

In der Ebene P sei ein beliebiger Punkt A mit den homologen Lagen A_1, A_2, A_3 gegeben. Die Relativlagen A_2^1, A_3^1 von A gegen die Ebene Q_1 findet man dann als homologe Punkte zu A_1 aus dem Poldreieck $R^{12}R^{13}R^{23}$ (Abb. 12). Es sei B_1 der Mittelpunkt des Kreises durch A_1, A_2^1, A_3^1 . Betrachtet man dann B_1 als Punkt der Ebene Q_1 und ermittelt aus dem Poldreieck $Q^{12}Q^{13}Q^{23}$ seine homologen Punkte B_2 und B_3 in den Ebenen Q_2 bzw. Q_3 , so sind B_1, B_2, B_3 die homologen Lagen desjenigen Punktes B der Ebene Q , der vom gegebenen Punkte A der Ebene P in den drei als einander zugeordnet gegebenen Lagen beider Ebenen die gleiche Entfernung besitzt. Diese Entfernung ist gleich dem Radius des um B_1 geschlagenen durch A_1, A_2^1, A_3^1 gehenden Kreises.

Hiernach läßt sich die Aufgabe, zu einem Punkte A der Ebene P denjenigen Punkt B der Ebene Q zu konstruieren, der während der drei betrachteten Lagen von A die gleiche Entfernung hat, unter der Benutzung der Pole R^{12}, R^{13}, R^{23} noch einfacher lösen als in dem oben behandelten Falle, in dem die Ebene S hinzugezogen wurde.

Es soll jetzt zu den bisher behandelten drei Lagen der Ebenen P und Q noch eine vierte Lage P_4 bzw. Q_4 hinzugenommen werden. Ermittelt man hier die Relativlagen der Ebene P gegen die Ebene Q_4 , so findet man die sechs Pole $R^{12}, R^{13}, R^{23}, R^{14}, R^{24}, R^{34}$. Die Aufgabe, in den Ebenen P bzw. Q die Gelenkpunkte A und B zu bestimmen, in denen die beiden Ebenen durch eine dritte Ebene S gelenkig verbunden werden können, ist nun auf die Frage nach den Kreispunkten im System der Relativlagen zurückgeführt. Man zeichnet zu den Polen R^{12}, \dots, R^{34} die Mittelpunktkurve, welche den geometrischen Ort aller Punkte B_1 der Ebene Q_1 darstellt, die als Gelenkpunkte in Q_1 gewählt werden können. Die diesem Punkte B_1 zugeordneten Gelenkpunkte A_1 der Ebene P_1 liegen auf der Kreispunktkurve, die durch die Punkte $R^{12}, R^{13}, R^{23}, R^{14}, R^{24}, R^{34}$ bestimmt ist. Man kann also bei je vier einander zugeordneten Lagen der Ebenen P und Q den einen der beiden Gelenkpunkte nicht mehr willkürlich annehmen, sondern muß ihn auf einer bestimmten Kurve, der Mittelpunktkurve bzw. der Kreispunktkurve, wählen. Greift man einen beliebigen Punkt A_1 auf der Kreispunktkurve in der Relativebene R_1 heraus und ermittelt seine homologen Punkte A_2^1, A_3^1, A_4^1 in den Relativebenen R_2, R_3 bzw. R_4 , so liegen A_1, A_2^1, A_3^1, A_4^1 auf einem Kreise um einen Punkt B_1 der Ebene Q_1 , der auf der Mittelpunktkurve der Relativebenen R_1, R_2, R_3, R_4 gelegen ist. Man verfährt nun weiter, wie es oben bei je drei Lagen der Ebenen P und Q angegeben wurde. Man betrachtet A_1 als Punkt der Ebene P_1 und konstruiert seine homologen Punkte A_2, A_3, A_4 in den Ebenen P_2, P_3, P_4 , und ebenso bestimmt man zum Punkte B_1 der Ebene Q_1 die homologen Punkte B_2, B_3, B_4 in den Ebenen Q_2, Q_3, Q_4 . Dann ist, wie gefordert wurde, $A_1 B_1 = A_2 B_2 = A_3 B_3 = A_4 B_4$, so daß also die Ebenen P und Q in den Punkten A bzw. B durch eine starre dritte Ebene gelenkig verbunden werden können. Da es unendlich viele Paare zugeordneter Gelenkpunkte A bzw. B in den Ebenen P bzw. Q gibt, so kann man noch eine weitere Annahme machen, durch die dann die Gelenkpunkte festgelegt sind. Fordert man z. B., daß die Entfernung AB einen vorgeschriebenen Wert l hat, so zeichnet man für drei der vier Relativebenen R_1, R_2, R_3, R_4 , z. B. für R_1, R_2, R_3 , in R_1 die R_1 -Kurve für $r = l$, welche die Kreispunktkurve der Ebene R_1 in den gesuchten Punkten A_1 schneidet. Jeder der erhaltenen (im allgemeinen sechs) Schnittpunkte kann in der Ebene P_1 als Gelenkpunkt verwendet werden, und zu jedem ist eindeutig ein Gelenkpunkt B_1 in der Ebene Q_1 bestimmt, wobei $A_1 B_1 = l$ ist.

Sind fünf einander zugeordnete Lagen der Ebenen P und Q gegeben, so findet man in den Relativlagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1 fünf Relativebenen R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 mit den zehn Polen R^{12}, R^{13}, \dots . Die Gelenkpunkte A bzw. B der beiden Ebenen P und Q ergeben sich dann auf Grund der früheren Untersuchungen wie folgt. Zu den fünf Relativebenen zeichnet man zwei Mittelpunktkurven, z. B. für R_1, R_2, R_3, R_4 und R_1, R_2, R_3, R_5 und erhält in den (im allgemeinen vier) Schnittpunkten beider Kurven Punkte B_1 , von denen jeder als Gelenkpunkt der Ebene Q_1 verwendet werden kann. Die homologen Punkte B_2, B_3, B_4, B_5 sowie der zugeordnete Gelenkpunkt A der Ebene P mit seinen homologen Lagen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ergeben sich dann in derselben Weise, wie es oben bei je vier Lagen der Ebenen P und Q angegeben wurde. Bei je sechs und mehr zugeordneten Lagen zweier Ebenen P und Q lassen sich im allgemeinen nicht mehr Gelenkpunkte A bzw. B ermitteln, deren Abstände in den sechs Lagen die gleiche Größe haben.

4. Die Ermittlung der Koppelgelenkpunkte beim Gelenkviereck und beim Schubkurbelgetriebe.

Die beiden Kurbeln des Gelenkvierecks seien durch die Ebenen P bzw. Q und die Koppel durch die Ebene S dargestellt (Abb. 13). Hier handelt es sich um die Aufgabe, in den Kurbelebenen P bzw. Q die Gelenkpunkte A bzw. B , in denen die Koppel S mit den Kurbeln verbunden ist, so zu ermitteln, daß einer Anzahl beliebig gegebener Lagen der Kurbel P eine gleiche Zahl gegebener Stellungen der Kurbel Q zugeordnet ist. Sind drei Lagen der Kurbelebenen als einander zugeordnet vorgelegt, so darf man den einen Gelenkpunkt beliebig wählen; der andere ist dann eindeutig bestimmt. Bei vier Lagen beider Ebenen darf man einen der beiden Gelenkpunkte auf einer bestimmten Kurve

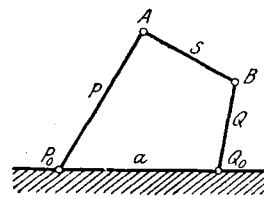


Abb. 13

willkürlich annehmen, während bei fünf zugeordneten Lagen der Kurbebenen die Gelenkpunkte sich als Schnittpunkte zweier Kurven ergeben, wobei also keine willkürliche Annahme mehr gemacht werden darf.

Der Fall des Gelenkvierecks ergibt sich, wenn die sämtlichen Pole aller Lagen der Kurbelebene P in einem Punkte P_0 und ebenso alle Pole der Lagen der Kurbelebene Q in einem Punkte Q_0 zusammenfallen. Die Entfernung a der Punkte P_0 und Q_0 , der Steg des Gelenkvierecks, sei gegeben. Es sollen zunächst je drei Lagen der Ebenen P und Q betrachtet werden, die durch drei entsprechende Punkte E_1, E_2, E_3 bzw. F_1, F_2, F_3 bestimmt seien (Abb. 14) Die Drehwinkel der Ebene P , d. h. die

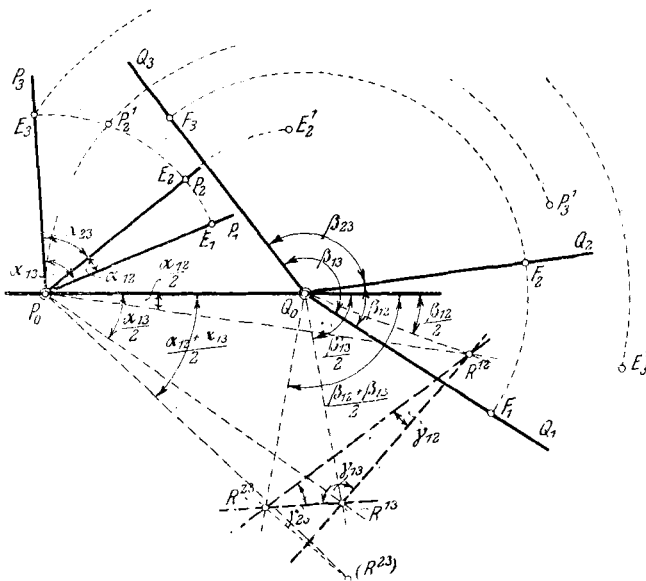


Abb. 14

Winkel, um die ihre Lagen gegeneinander gedreht sind, werden mit $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$ bezeichnet, die Drehwinkel der Ebene Q mit $\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{23}$. Durch diese Winkel und den Abstand a der Pole P_0 und Q_0 sind die Lagen der beiden Kurbebenen definiert. Um nun die Pole der Relativlagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1 zu finden, verfahren wir wie im allgemeinen Falle. Beim Gelenkviereck entarten die Poldreiecke der Ebenen P und Q zu je einem Punkte P_0 bzw. Q_0 , und man hat an Stelle der Winkel der beiden Poldreiecke die Hälfte der entsprechenden Drehwinkel der Ebenen zu setzen. Man ermittelt nun einen Punkt P_2^1 , der auf dem um Q_0 mit $Q_0 P_0$ geschlagenen Kreise und ferner auf einem Strahle durch Q_0 liegt, der

gegen die Gerade $P_0 Q_0$ um den Winkel β_{12} im Richtungssinn $F_2 F_1$ gedreht ist. Ebenso findet man einen Punkt P_3^1 als Schnittpunkt des Kreises um Q_0 mit dem Radius $Q_0 P_0$ und der Geraden durch Q_0 , die mit $P_0 Q_0$ den Winkel $F_3 Q_0 F_1 = \beta_{13}$ einschließt. Ferner konstruiert man in ähnlicher Weise einen Punkt E_2^1 , indem man um Q_0 mit $Q_0 E_2$ den Kreis schlägt und diesen mit der Geraden durch Q_0 zum Schnitt bringt, die mit $Q_0 F_2$ den Winkel β_{12} im Richtungssinn $F_2 F_1$ bildet, und weiter einen Punkt E_3^1 als Schnittpunkt des Kreises um Q_0 mit dem Radius $Q_0 E_3$ und der Geraden durch Q_0 , die gegen $Q_0 E_2$ unter dem Winkel $F_3 Q_0 F_1 = \beta_{13}$ geneigt ist. Die Mittelsenkrechten zu $P_0 P_2^1$ und $E_1 E_2^1$ schneiden sich im Pole R^{12} , die Mittelsenkrechten zu $P_0 P_3^1$ und $E_1 E_3^1$ in R^{13} und diejenigen zu $P_2^1 P_3^1$ und $E_2^1 E_3^1$ in R^{23} , wobei R^{12}, R^{13}, R^{23} die Pole der relativen Lagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1 sind. Hierbei schließt die Gerade $Q_0 R^{12}$, die Mittelsenkrechte zu $P_0 P_2^1$, mit $P_0 Q_0$ den Winkel $1/2 \beta_{12}$ ein, da der Winkel $P_0 Q_0 P_2^1 = \beta_{12}$ durch $Q_0 R^{12}$ halbiert wird. Ebenso findet man, daß die Gerade $Q_0 R^{13}$ mit $Q_0 P_0$ den Winkel $1/2 \beta_{13}$ bildet.

Wie allgemein gezeigt wurde, gelten die Pole R^{12} und R^{13} sowohl für die Relativlagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1 , wie auch umgekehrt für die relativen Lagen der Ebene Q gegen die Ebene P_1 . Hieraus folgt, daß R^{12} und R^{13} auch auf Geraden durch P_0 liegen, die mit $P_0 Q_0$ den Winkel $1/2 \alpha_{12}$ bzw. $1/2 \alpha_{13}$ bilden. Was die Lage des Poles R^{23} anbelangt, so hat der Winkel, den die Gerade $Q_0 R^{23}$ mit $P_0 Q_0$ einschließt, die Größe

$$\begin{aligned}
 -(\sphericalangle P_0 Q_0 P_2^1 + \sphericalangle 1/2 P_2^1 Q_0 P_3^1) &= -(\beta_{12} + 1/2 \beta_{23}) \\
 &= -\left(\beta_{12} + \frac{\beta_{13} - \beta_{12}}{2}\right) = -1/2(\beta_{12} + \beta_{13}).
 \end{aligned}$$

Hierdurch ist die unter diesem Winkel gegen $P_0 Q_0$ geneigte Gerade durch Q_0 als ein geometrischer Ort für den Pol R^{23} gefunden. Da ferner allgemein die Winkel γ_{12} ,

γ_{13} , γ_{23} des Poldreiecks $R^{12}R^{13}R^{23}$ gleich der Differenz der entsprechenden Winkel in den Poldreiecken der Ebenen P_1, P_2, P_3 bzw. Q_1, Q_2, Q_3 sind, so folgt unter Beachtung des Richtungssinnes der Winkel (Abb. 14)

$$\gamma_{12} = \frac{1}{2}(\beta_{12} - \alpha_{12}), \quad \gamma_{23} = \frac{1}{2}(\beta_{23} - \alpha_{23}), \quad \gamma_{13} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\beta_{13} - \alpha_{13}).$$

Durch diese Winkel ist der Pol R^{23} vollständig bestimmt. Da bei dieser Art der Ermittlung des Poles R^{23} jedoch leicht Fehler unterlaufen können, wenn man den Richtungssinn der Winkel nicht genau beachtet, soll noch eine weitere Konstruktion angegeben werden. Wie allgemein nachgewiesen wurde, liegt der Pol R^{23} für die Relativlagen der Ebene P gegen die Ebene Q_1 bezüglich der Polgeraden $R^{12}R^{13}$ symmetrisch zum Pole (R^{23}) der Relativlagen der Ebene Q gegen die Ebene P_1 . Wendet man die für die erste Relativbewegung angestellten Betrachtungen für die umgekehrte Relativbewegung an, so findet man, daß der Pol (R^{23}) auf einer Geraden durch P_0 liegen muß, die mit P_0Q_0 den Winkel $-\frac{1}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{13})$ bildet. Nun lassen sich R^{23} und (R^{23}) in folgender Weise konstruieren (Abb. 15). Man zieht durch Q_0 und P_0 je eine Gerade unter dem Winkel $-\frac{1}{2}(\beta_{12} + \beta_{13})$ bzw. $-\frac{1}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{13})$ gegen Q_0P_0 , welche die Gerade $R^{12}R^{13}$ in N bzw. M unter den Winkeln ν bzw. μ schneiden. Durch M und N legt man je eine Gerade, die zu P_0M bzw. Q_0N in bezug auf $R^{12}R^{13}$ symmetrisch liegen. Dann wird Q_0N von der Geraden durch M in R^{23} und P_0M von der Geraden durch N in (R^{23}) geschnitten.

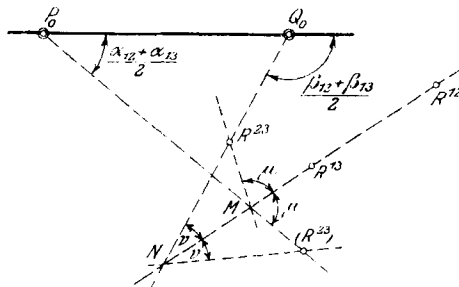


Abb. 15

Wenn beim Gelenkvierneck vier Lagen der Kurbebenen P und Q durch die weiteren Winkel α_{14} bzw. β_{14} vorgelegt sind, so hat man außer den Polen R^{12}, R^{13}, R^{23} noch die Pole R^{14}, R^{24}, R^{34} zu ermitteln. Man verfährt hierbei ganz entsprechend wie bei drei Lagen. Der Pol R^{14} ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Geraden durch P_0 bzw. Q_0 , die mit P_0Q_0 die Winkel $-\frac{1}{2}\alpha_{14}$ bzw. $-\frac{1}{2}\beta_{14}$ bilden. R^{24} wird dann ebenso gefunden wie R^{23} , indem man an Stelle von $R^{12}R^{13}$ die Gerade $R^{13}R^{14}$ benutzt. Hieraus folgt unmittelbar die Gesetzmäßigkeit, nach der die Pole der Relativlagen auch bei mehr als je vier Lagen der Kurbebenen P und Q gefunden werden können

Wenn außer dem Steg P_0Q_0 eines Gelenkvierneckes fünf beliebige Lagen der Kurbebenen P und Q als einander zugeordnet gegeben sind, so läßt sich nunmehr die Koppel AB so bestimmen, daß bei der Bewegung des Gelenkvierneckes die geforderte gegenseitige Zuordnung der fünf Lagen der Kurbebenen tatsächlich erfüllt wird. Um die Gelenkpunkte A und B , in denen die Koppel mit den Kurbebenen verbunden ist, zu finden, zeichnet man in der mit P_1 zusammenfallenden Relativebene R_1 zwei Kreispunktkurven, z. B. für die beiden Systeme $R_1R_2R_3R_4$ und $R_1R_2R_3R_5$, die sich im allgemeinen in vier Punkten schneiden. Zu diesen ermittelt man in den Ebenen R_2, R_3, R_4, R_5 , wie auch in den Ebenen P_2, P_3, P_4, P_5 die entsprechenden Gruppen von vier homologen Punkten $A_2^1, A_3^1, A_4^1, A_5^1$ bzw. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Die Punkte $A_1, A_2^1, A_3^1, A_4^1, A_5^1$ liegen auf einem Kreise um den Mittelpunkt B_1 , der als Punkt der Ebene Q_1 anzusehen ist und zu dem man die homologen Punkte B_2, B_3, B_4, B_5 in den Ebenen Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 konstruiert. Dann ist $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = A_5B_5$ und die Punkte A und B sind die gesuchten Koppelgelenkpunkte. Wenn nur vier gegebene Lagen der Kurbebenen P und Q einander zugeordnet werden sollen, so läßt sich noch eine Forderung erfüllen, wobei insbesondere zwei Möglichkeiten erwähnt seien; entweder ist die Länge k der Koppel oder die Länge einer der beiden Kurbeln vorgeschrieben. Im ersteren Falle zeichnet man in der Ebene R_1 für das System $R_1R_2R_3R_4$ die Kreispunktkurve und z. B. für das System $R_1R_2R_3$ die R_1 -Kurve für den Wert $r = k$. Beide Kurven schneiden sich im allgemeinen in sechs Punkten A_1 , die der Ebene P_1 angehören. Dann ermittelt man, wie oben angegeben ist, die homologen Punkte A_2, A_3, A_4 in den Ebenen P_2, P_3, P_4 und die zugeordneten homologen Punkte B_1, B_2, B_3, B_4 der Ebenen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , wobei die Forderung $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = k$ erfüllt ist. Wird im zweiten Falle die Länge der Kurbel $P_0A = r_1$ gegeben, so zeichnet man wieder für das System $R_1R_2R_3R_4$ in der Ebene R_1 die Kreispunktkurve und ermittelt deren Schnittpunkte A_1 mit dem um P_0 mit dem Radius r_1 geschlagenen Kreise. Im allgemeinen gibt es vier solcher Schnitt-

punkte A_1 , zu denen man in den Ebenen P_2, P_3, P_4 die homologen Punkte A_2, A_3, A_4 , die von P_0 die gleiche Entfernung r_1 besitzen, und in den Ebenen R_2, R_3, R_4 die homologen Punkte A_2^1, A_3^1, A_4^1 konstruiert, die mit A_1 auf einem Kreise um einen Punkt B_1 der Ebene Q_1 liegen. Bestimmt man zu B_1 in den Ebenen Q_2, Q_3, Q_4 die homologen Punkte B_2, B_3, B_4 , so ist $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4$, so daß wir in A und B die gesuchten Koppelgelenkpunkte gefunden haben.

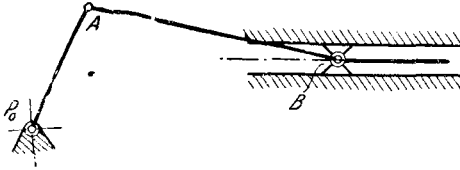


Abb. 16

bei der für das Gelenkviereck angegebenen Konstruktion den Punkt Q_0 als den unendlich fernen Punkt einer Senkrechten zur Schubrichtung betrachtet.

Die Drehwinkel der Ebenen P_2 und P_3 gegen die Ebene P_1 seien wieder α_{12} bzw. α_{13} . Die Lagen Q_2 und Q_3 der Kreuzkopfebene Q gegen die Lage Q_1 seien durch die Strecken b_{12} bzw. b_{13} gegeben. Man zieht durch P_0 eine Parallele zur Schubrichtung \vec{s} (Abb. 17) und bestimmt auf dieser die Punkte E_{12}, E_{13}, E_{23} , indem man die Strecken $P_0E_{12} = -\frac{1}{2}b_{12}$, $P_0E_{13} = -\frac{1}{2}b_{13}$, $P_0E_{23} = -\frac{1}{2}(b_{12} + b_{13})$ aufträgt. Ferner zieht man durch P_0 eine Senkrechte P_0P_1 zur Schubrichtung, trägt an diese in P_0 die gegebenen Winkel α_{12} und α_{13} an und erhält dadurch die Strahlen P_0P_2 und P_0P_3 . Hierbei nimmt man P_1 auf der Senkrechten zur Schubrichtung von P_0 aus in derjenigen Richtung an, von der aus gesehen die Lagen Q_1, Q_2, Q_3 in dem gleichen Sinne aufeinander folgen, wie der Drehsinn der zugeordneten Winkel α_{12} und α_{13} um P_0 angibt. An P_0P_1 trägt man in P_0 den Winkel $-\frac{1}{2}\alpha_{13}$ an, dessen freier Schenkel die Senkrechte zur Schubrichtung durch E_{12} im Pole R^{12} schneidet.

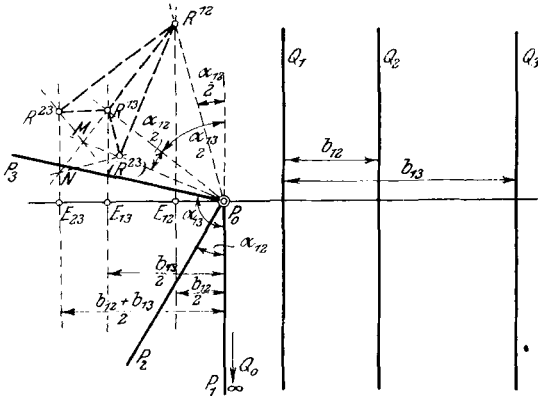


Abb. 17

Ebenso ergibt sich R^{13} als Schnittpunkt der Senkrechten zur Schubrichtung durch E_{13} mit dem freien Schenkel des in P_0 an P_0P_1 angetragenen Winkels $-\frac{1}{2}\alpha_{13}$. In P_0 trägt man nun an P_0P_1 den Winkel $-\frac{1}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{13})$ an, dessen freier Schenkel die Gerade $R^{12}R^{13}$ in M schneidet. Weiter findet man einen Punkt N als Schnittpunkt der Geraden $R^{12}R^{13}$ mit der Senkrechten zur Schubrichtung durch E_{23} . Durch M und N zieht man je eine Gerade, die zu MP_0 bzw. NE_{23} in bezug auf $R^{12}R^{13}$ symmetrisch ist, und findet auf NE_{23} bzw. MP_0 als Schnittpunkte die Pole R^{23} bzw. (R^{23}) .

Sind nicht nur drei, sondern vier oder fünf einander zugeordnete Lagen der Ebenen P und Q gegeben, so findet man die entsprechenden Pole der Relativlagen, indem man die drei Lagen P_1, P_2, P_4 bzw. Q_1, Q_2, Q_4 behandelt, wobei dann R^{24} und (R^{24}) symmetrisch bezüglich der Geraden $R^{12}R^{14}$ liegen. In gleicher Weise ergeben sich die übrigen Pole.

Beim Schubkurbelgetriebe können wieder mehrere verschiedene Fragestellungen auftreten. Wenn gefordert wird, daß fünf Lagen der Kurbelebene P und der Kreuzkopfebene Q einander zugeordnet sein sollen, so findet man, wie die allgemeinen Untersuchungen gezeigt haben, für die Lage des Kurbel- und des Kreuzkopfszapfens im allgemeinen je vier Lösungen. Wird verlangt, daß nur vier Lagen der Kurbelebene P und der Kreuzkopfebene Q einander zugeordnet sein sollen, so kann man wieder eine weitere Forderung erfüllen. Man kann entweder die Länge der Pleuelstange vorschreiben oder verlangen, daß das Kurbelgetriebe zentrisch sein soll. Die beiden

Von den Sonderfällen des Gelenkvierecks soll der wichtigste, das Schubkurbelgetriebe, besonders behandelt werden (Abb. 16). Hier sei der Kurbelmittelpunkt P_0 und die Schubrichtung der Kreuzkopfebene gegeben und es seien zunächst wieder drei einander zugeordnete Lagen der Kurbelebene P und der Kreuzkopfebene Q vorgelegt. Die Pole R^{12}, R^{13}, R^{23} bzw. (R^{23}) der Relativlagen von P gegen Q , ergeben sich, wenn man

den Punkt Q_0 als den unendlich fernen Punkt einer Senkrechten zur Schubrichtung betrachtet. Die Drehwinkel der Ebenen P_2 und P_3 gegen die Ebene P_1 seien wieder α_{12} bzw. α_{13} . Die Lagen Q_2 und Q_3 der Kreuzkopfebene Q gegen die Lage Q_1 seien durch die Strecken b_{12} bzw. b_{13} gegeben. Man zieht durch P_0 eine Parallele zur Schubrichtung \vec{s} (Abb. 17) und bestimmt auf dieser die Punkte E_{12}, E_{13}, E_{23} , indem man die Strecken $P_0E_{12} = -\frac{1}{2}b_{12}$, $P_0E_{13} = -\frac{1}{2}b_{13}$, $P_0E_{23} = -\frac{1}{2}(b_{12} + b_{13})$ aufträgt. Ferner zieht man durch P_0 eine Senkrechte P_0P_1 zur Schubrichtung, trägt an diese in P_0 die gegebenen Winkel α_{12} und α_{13} an und erhält dadurch die Strahlen P_0P_2 und P_0P_3 . Hierbei nimmt man P_1 auf der Senkrechten zur Schubrichtung von P_0 aus in derjenigen Richtung an, von der aus gesehen die Lagen Q_1, Q_2, Q_3 in dem gleichen Sinne aufeinander folgen, wie der Drehsinn der zugeordneten Winkel α_{12} und α_{13} um P_0 angibt. An P_0P_1 trägt man in P_0 den Winkel $-\frac{1}{2}\alpha_{13}$ an, dessen freier Schenkel die Senkrechte zur Schubrichtung durch E_{12} im Pole R^{12} schneidet.

ersten Fragestellungen sind im allgemeinen Falle des Gelenkviereckes bereits behandelt worden. Wenn ein zentrisches Schubkurbelgetriebe gefordert wird, so zeichnet man im System $R_1 R_2 R_3 R_4$ die Mittelpunktkurve, welche die gegebene Kreuzkopfbahngerade im allgemeinen in drei Punkten B_1 schneidet, von denen jeder als Gelenkpunkt der Kreuzkopfebene verwendet werden kann. Man betrachtet B_1 als Punkt der Ebene Q_1 , ermittelt die homologen Punkte B_2, B_3, B_4 in den Ebenen Q_2, Q_3, Q_4 und erhält damit die Lagen des Kreuzkopfes. Der Gelenkpunkt A der Kurbel ebene wird dann ebenso, wie es beim Gelenkviereck gezeigt wurde, gefunden. Entsprechend verfährt man, wenn das Kurbelgetriebe nicht zentrisch sein, wenn aber der Abstand des Kurbelmittelpunktes P_0 von der Kreuzkopfbahn einen gegebenen Wert haben soll.

Wenn die Längen von Pleuelstange und Kurbel gegeben sind, oder wenn das Kurbelgetriebe zentrisch sein soll und außerdem die Länge der Kurbel oder der Pleuelstange vorgeschrieben ist, so können nur noch je drei Lagen der Kurbel ebene P und der Kreuzkopfebene Q willkürlich einander zugeordnet werden. Sind die Längen r_1 bzw. k von Kurbel bzw. Pleuelstange vorgeschrieben und sind drei einander zugeordnete Lagen P_1, P_2, P_3 bzw. Q_1, Q_2, Q_3 von Kurbel- bzw. Kreuzkopfebene gegeben, so ermittelt man zunächst wieder die Pole R^{12}, R^{13}, R^{23} der Relativlagen von P gegen Q , und zeichnet zu ihnen in der Ebene R_1 für den Wert $r = k$ die R_1 -Kurve, die den um P_0 mit dem Radius r_1 geschlagenen Kreis in den gesuchten Punkten A_1 der Ebene P_1 schneidet, von denen jeder als Gelenkpunkt der Kurbel ebene verwendet werden kann. Konstruiert man zu einem der gefundenen Punkte A_1 , aufgefaßt als Punkt der Ebene R_1 , die entsprechenden Punkte A_2^1 und A_3^1 der Ebenen R_2 bzw. R_3 , so gibt der Mittelpunkt B_1 des Kreises durch A_1, A_2^1, A_3^1 , der den gegebenen Radius k hat, die Lage des Kreuzkopfszapfens in der Ebene Q_1 an.

Sind wieder drei zugeordnete Lagen der Ebenen P und Q vorgelegt und ferner die Bahngerade des Kreuzkopfgelenkpunktes und die Kurbellänge r_1 gegeben, so konstruiert man im Poldreieck $R^{12}R^{13}R^{23}$ zu einer Anzahl von Punkten (A_1) des um P_0 mit r_1 geschlagenen Kreises diejenigen Punkte (B_1), welche Mittelpunkte der Kreise durch drei entsprechende Punkte (A_1), (A_2^1), (A_3^1) der Ebenen R_1, R_2, R_3 sind. Die so gefundenen Punkte (B_1) bilden eine Kurve vierten Grades, welche die gegebene Bahngerade des Kreuzkopfgelenkpunktes in den gesuchten Punkten B_1 schneidet. Diesen Punkten B_1 lassen sich dann in bekannter Weise ebensoviele Punkte A_1 zuordnen, welche die Lage des Kurbelzapfens in der Ebene P_1 angeben. Wenn statt der Kurbellänge r_1 die Länge k der Pleuelstange gegeben ist, zeichnet man für die Pole $R^{12}, R^{13}, (R^{23})$ in der Ebene R_1 die R_1 -Kurve für den Wert $r = k$ und erhält in deren Schnittpunkten B_1 mit der gegebenen Bahngeraden die gesuchten Lagen des Kreuzkopfgelenkpunktes in der Ebene Q_1 . Im Poldreieck $R^{12}R^{13}(R^{23})$ konstruiert man zum Punkte B_1 der Ebene R_1 die entsprechenden Punkte B_2^1 bzw. B_3^1 der Ebenen R_2 bzw. R_3 . Der Mittelpunkt A_1 des Kreises durch B_1, B_2^1, B_3^1 gibt dann die Lage des Kurbelzapfens in der Ebene P_1 an.

5. Die Forderung bestimmter Geschwindigkeiten. Bei der Synthese der Mechanismen tritt mitunter die Forderung auf, daß eine bewegte Ebene neben anderen Bedingungen noch solche erfüllen soll, die ihren Geschwindigkeitszustand betreffen¹⁾. Da zur Bestimmung des Geschwindigkeitszustandes einer Ebene die Lage des Momentanpoles bekannt sein muß, so müssen wir außer den bisher betrachteten Polen, die sich auf je zwei endlich verschiedene Lagen einer Ebene beziehen, noch den Momentanpol hinzunehmen.

Bei den weiteren Untersuchungen soll nun folgende allgemeine Aufgabe behandelt werden. Es seien mehrere Lagen P_1, P_2, \dots bzw. Q_1, Q_2, \dots zweier Ebenen P bzw. Q als einander zugeordnet gegeben, und es sollen beide Ebenen durch eine dritte Ebene S in den Punkten A bzw. B gelenkig verbunden werden. In einer der Lagen, z. B. P_1 bzw. Q_1 , in der die beiden Momentanpole Π_{P_1} bzw. Π_{Q_1} gegeben seien, sollen die Winkelgeschwindigkeiten beider Ebenen ein vorgeschriebenes Verhältnis $\lambda = \omega_{Q_1} : \omega_{P_1}$ besitzen. Auf Grund dieser sowie anderer gegebener Bedingungen sind dann die Gelenkpunkte A bzw. B zu ermitteln.

Nimmt man zunächst die Punkte A und B als bekannt an, so schneiden sich die Geraden $\Pi_{P_1} A_1$ und $\Pi_{Q_1} B_1$ im Momentanpol Π_{S_1} (Abb. 18) der Ebene S_1 , und die Geschwindigkeiten v_{A_1} bzw. v_{B_1} der Punkte A_1 bzw. B_1 sind den Entfernungen a_1 bzw. b_1 von Π_{S_1} proportional; es ist also $v_{B_1} : v_{A_1} = b_1 : a_1$.

¹⁾ Hierüber vergl. M. Grübler, Getriebelehre, S. 113 u. f.

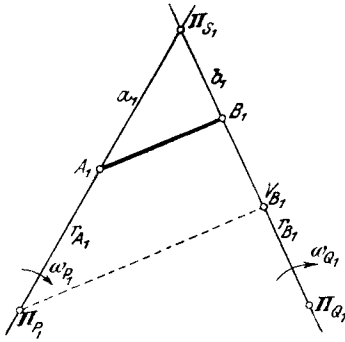


Abb. 18

Ferner ist

$$v_{B1} = r_{B1} \omega_{Q1} \text{ und } v_{A1} = r_{A1} \omega_{P1},$$

wobei

$$r_{B1} = \Pi_{Q1} B1 \text{ und } r_{A1} = \Pi_{P1} A1$$

ist. Wenn v_{A1} gegeben ist, so trägt man auf $A1 \Pi_{P1}$ die Strecke $A1 V_{A1} \hat{=} v_{A1}$ auf und zieht durch V_{A1} zu $A1 B1$ die Parallele, die $B1 \Pi_{Q1}$ in V_{B1} schneidet. Dann stellt $B1 V_{B1}$ die Geschwindigkeit v_{B1} des Punktes $B1$ dar. Wählt man hierbei den Zeichnungsmaßstab so, daß $v_{A1} \hat{=} r_{A1}$ und daher $\omega_{P1} \hat{=} 1$ ist, so liegt V_{B1} auf der durch Π_{P1} zu $A1 B1$ gezogenen Parallelen (Abb. 18). Wenn nun andererseits die Winkelgeschwindigkeit ω_{Q1} der Ebene Q_1 einen vorgeschriebenen Wert $\omega_{Q1} = \lambda \omega_{P1}$ besitzen soll, so muß der Punkt $B1$ eine Geschwindigkeit

$$v_{B1}' = r_{B1} \lambda \omega_{P1}$$

haben. Entsprechend ergibt sich auf $B1 \Pi_{Q1}$ ein Punkt V_{B1}' , wobei unter der obigen Annahme ($\omega_{P1} \hat{=} 1$)

$$B1 V_{B1}' = \lambda r_{B1}$$

ist. Man findet also den Punkt V_{B1}' , indem man, z. B. mit Hilfe eines auf das Verhältnis λ eingestellten Reduktionszirkels, auf $B1 \Pi_{Q1}$ von $B1$ die Strecke λr_{B1} aufträgt. Der geforderte Geschwindigkeitszustand der Ebene Q wird nun erreicht, wenn die beiden Punkte V_{B1} und V_{B1}' zusammenfallen.

Wir hatten gefunden, daß die Gelenkpunkte A und B bestimmt sind, wenn man je fünf Lagen der Ebenen P und Q einander zuordnet, und daß in diesem Falle daher weitere Bedingungen nicht erfüllt werden können. Wenn dagegen eine Zuordnung von nur vier Lagen gefordert wird, so kann man in einer der vier Lagen noch einen bestimmten Geschwindigkeitszustand der Ebene Q vorschreiben. In dem Falle schließlich, in dem nur drei Lagen der Ebenen P und Q als einander zugeordnet gegeben sind, kann man in zwei dieser drei Lagen einen bestimmten Geschwindigkeitszustand verlangen.

In dem ersteren Falle, in dem vier Lagen der Ebenen P und Q vorgelegt sind und in der Lage 1 das Verhältnis λ gegeben ist, findet man für die Punkte $A1$ und $B1$ je eine Kurve als geometrischen Ort. Um diese beiden Kurven zu finden, konstruieren

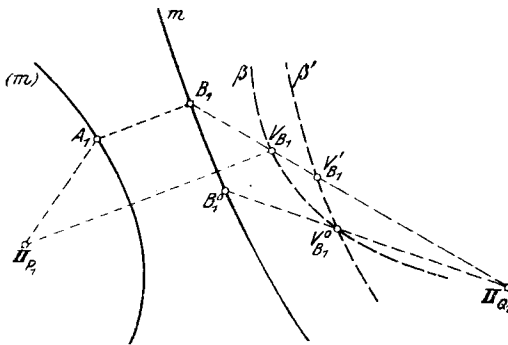


Abb. 19

wir die früher definierten Pole $R^{12}, R^{13}, R^{14}, R^{23}, R^{24}, R^{34}$ sowie $(R^{23}), (R^{24}), (R^{34})$ der Relativlagen von P gegen Q und umgekehrt derjenigen von Q gegen P und zeichnen für die Pole $R^{12}, R^{13}, R^{14}, R^{23}, R^{24}, R^{34}$ bzw. $R^{12}, R^{13}, R^{14}, (R^{23}), (R^{24}), (R^{34})$ die Mittelpunktkurve m bzw. (m) . Dann ist m der geometrische Ort aller Punkte $B1$ und (m) derjenige der Punkte $A1$. Auf den beiden Kurven ermitteln wir eine Anzahl einander paarweise entsprechender Punkte $A1$ bzw. $B1$ und konstruieren mit Hilfe der Momentanpole Π_{P1} und Π_{Q1} unter der Annahme $\omega_{P1} \hat{=} 1$ die entsprechenden Punkte V_{B1} , die eine Kurve β bilden (Abb. 19). Ferner ermitteln wir in der oben angegebenen

Weise die entsprechenden Punkte V_{B1}' , indem wir auf $B1 \Pi_{Q1}$ die Strecke $B1 V_{B1}' = \lambda B1 \Pi_{Q1}$ auftragen, und erhalten für die Punkte V_{B1}' eine Kurve β' . Die Schnittpunkte der Kurven β und β' sind diejenigen Punkte V_{B1}^0 , welche die gesuchten Gelenkpunkte A bzw. B bestimmen. Die Gerade $\Pi_{Q1} V_{B1}^0$ schneidet die Kurve m in dem Gelenkpunkt $B1^0$, dem auf (m) ein Punkt $A1^0$ entspricht.

Wenn nur drei gegebene Lagen P_1, P_2, P_3 bzw. Q_1, Q_2, Q_3 der Ebenen P und Q einander zugeordnet werden sollen und die Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten $\lambda_1 = \omega_{Q1} : \omega_{P1}$ in der Lage 1 und $\lambda_2 = \omega_{Q2} : \omega_{P2}$ in der Lage 2 mit den Momentanpolen Π_{P1}, Π_{P2} bzw. Π_{Q1}, Π_{Q2} gegeben sind, so erhält man die Gelenkpunkte A und B auf Grund

der folgenden Ueberlegung. Wie wir früher gefunden hatten, läßt sich bei drei einander zugeordneten Lagen der Ebenen P und Q zu jedem Punkte A der Ebene P eindeutig ein Punkt B der Ebene Q bestimmen. Allen Punkten A_1 , die auf einer Geraden g_1 liegen, entspricht als geometrischer Ort der Punkte B_1 ein Kegelschnitt k_1 , der durch die drei Relativpole R^{12}, R^{13}, R^{23} geht¹⁾ und daher bestimmt ist, wenn wir zu zwei beliebigen Punkten A_1 der Geraden g_1 die zwei entsprechenden Punkte B_1 aufgesucht haben, da sich aus fünf gegebenen Punkten der Kegelschnitt konstruieren läßt.

Wir ermitteln nun zunächst den geometrischen Ort a_1 der Punkte A_1 , für die in der Lage 1 der Ebenen P und Q der geforderte Geschwindigkeitszustand erzielt wird, und suchen dann auf der Kurve a_1 die Punkte A_1 so zu bestimmen, daß auch in der Lage 2 die bezüglich der Geschwindigkeit gestellte Forderung erfüllt wird. Wir ziehen in der Ebene P_1 eine beliebige Gerade g_1 durch den Momentanpol Π_{P_1} und ermitteln den dieser Geraden zugeordneten Kegelschnitt k_1 in der Ebene Q_1 , indem wir zum Punkte Π_{P_1} und zu einem beliebigen zweiten Punkte D_1 der Geraden g_1 die entsprechenden zwei Punkte G_1 bzw. H_1 der Ebene Q_1 aufsuchen und durch diese sowie die Pole R^{12}, R^{13}, R^{23} den Kegelschnitt legen (Abb. 20). Dann wählen wir auf g_1 eine Reihe von Punkten A_1 , bestimmen auf k_1 die entsprechenden Punkte B_1 und ermitteln mit Hilfe der Größe λ_1 auf den Strahlen $\Pi_{Q_1} B_1$ in der oben angegebenen Weise die Punkte V_{B_1} und V_{B_1}' , die je eine Kurve β bzw. β' bilden, welche sich in dem gesuchten Punkte $V_{B_1}^0$ schneiden. Die Gerade $\Pi_{Q_1} V_{B_1}^0$ schneidet den Kegelschnitt k_1 in dem Punkte B_1^0 , zu dem man auf g_1 den entsprechenden Punkt A_1^0 findet, indem man durch B_1^0 zu $V_{B_1}^0$ Π_{P_1} die Parallele zieht. Wendet man dieses Verfahren wiederholt an, so erhält man in der Ebene P_1 auf jeder durch Π_{P_1} gelegten Geraden einen Punkt A_1^0 . Hierbei ist zu beachten, daß die sämtlichen Kegelschnitte, die in der Ebene Q_1 dem Geradenbüschel durch Π_{P_1} der Ebene P_1 entsprechen, durch vier Punkte gehen und zwar durch R^{12}, R^{13}, R^{23} und denjenigen Punkt G_1 der Ebene Q_1 , der dem Punkte Π_{P_1} der Ebene P_1 entspricht. Die gefundenen Punkte A_1^0 bilden eine der Ebene Q_1 angehörende Kurve, die den oben definierten Ort a_1 darstellt. Zu a_1 zeichnen wir die homologe (kongruente) Kurve a_2 in der Ebene P_2 und suchen zu einer Reihe von Punkten A_2 der Kurve a_2 die zugeordneten Punkte B_2 der Ebene Q_2 auf. In der gleichen Weise, wie es oben angegeben wurde, ermitteln wir unter Benutzung der Momentanpole Π_{P_2} und Π_{Q_2} sowie des gegebenen Winkelgeschwindigkeitsverhältnisses λ_2 zu jedem Punktpaare A_2, B_2 je einen Punkt V_{B_2} und einen Punkt V_{B_2}' und erhalten hierbei wieder zwei Kurven β und β' , die sich in demjenigen Punkte $V_{B_2}^0$ schneiden, durch den dann die gesuchten Gelenkpunkte A_2 und B_2 bestimmt sind. Wenn man die Ebenen P und Q in diesen Punkten durch eine dritte Ebene S gelenkig miteinander verbindet, so werden hierbei die gestellten Forderungen erfüllt, indem die drei Lagen P_1, P_2, P_3 der Ebene P den Lagen Q_1, Q_2, Q_3 der Ebene Q zugeordnet sind und das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten beider Ebenen in den Lagen 1 und 2 die vorgeschriebenen Werte λ_1 bzw. λ_2 besitzt.

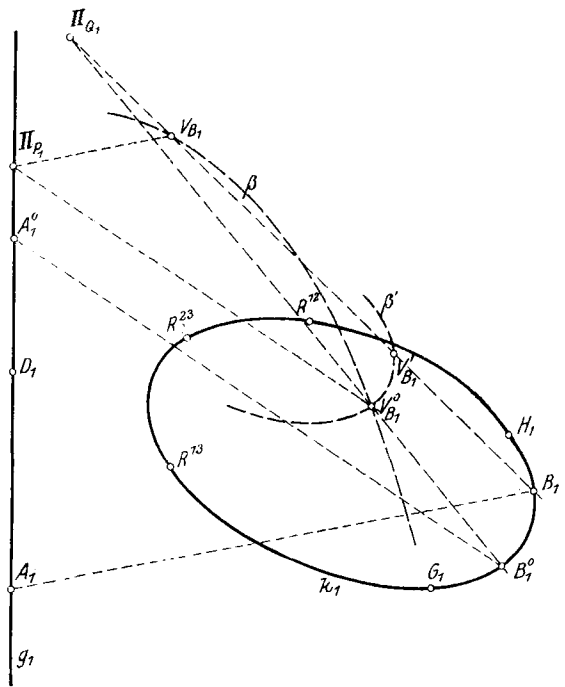


Abb. 20

¹⁾ Hierüber vergl. L. Burmeister, Lehrbuch der Kinematik, S. 605.

6. Die Forderung von Totlagen. Sind zwei Ebenen P und Q durch eine dritte Ebene S in den Punkten A bzw. B gelenkig verbunden, so nennen wir diejenigen Lagen der Ebene Q , in denen sie sich während der Bewegung der Ebene P in Ruhe befindet, ihre Totlagen. Wenn mehrere zugeordnete Lagen der Ebenen P und Q gegeben sind, wobei die Ebene Q in ein oder zwei dieser Lagen sich in Totlagen befinden soll, so erkennt man unmittelbar, daß die Konstruktion der gesuchten Gelenkpunkte A und B dieselbe bleibt wie im vorigen Abschnitte, wenn man dort das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten $\lambda = \omega_{Q1} : \omega_{P1}$ gleich Null setzt.

Wenn vier Lagen der Ebenen P und Q einander zugeordnet werden sollen und die Lage Q_1 eine Totlage sein soll, so zeichnet man zunächst wieder die beiden Mittelpunktkurven m bzw. (m) in den Ebenen Q_1 bzw. P_1 und bestimmt dann die Kurve β der Punkte V_{B1} . Der Punkt, in dem diese Kurve β die Mittelpunktkurve m schneidet, ist der gesuchte Gelenkpunkt B_1 der Ebene Q_1 . Sind nur drei Lagen der Ebenen P und Q vorgelegt, wobei die Ebene Q in den Lagen Q_1 und Q_2 Totlagen haben soll, so zeichnen wir in der Ebene P_1 das Geradenbüschel durch den Momentanpol Π_{P1} und das zugeordnete Kegelschnittbüschel in der Ebene Q_1 . Zu jedem der Kegelschnitte zeichnen wir die Kurve der Punkte V_{B1} , die den ersteren in einem Punkte B_1^0 schneidet, und finden hierdurch für die Punkte B_1^0 eine Kurve b_1^0 . Zu dieser zeichnen wir in der Ebene Q_2 die homologe (kongruente) Kurve b_2^0 . Wir ermitteln dann zu einer Reihe von Punkten B_2^0 der Kurve b_2^0 die entsprechenden Punkte A_2^0 der Ebene P_2 und konstruieren die zugehörige Kurve β der Punkte V_{B2} . Diese Kurve β schneidet die Kurve b_2^0 in dem gesuchten

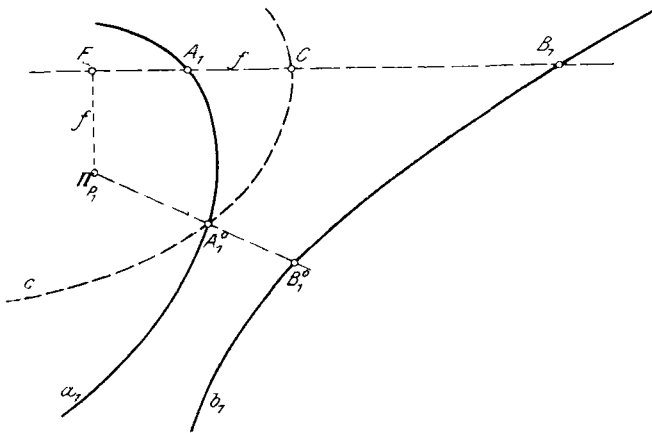


Abb. 21

Kegelschnittbüschel in der Ebene Q_1 . Zu jedem der Kegelschnitte zeichnen wir die Kurve der Punkte V_{B1} , die den ersteren in einem Punkte B_1^0 schneidet, und finden hierdurch für die Punkte B_1^0 eine Kurve b_1^0 . Zu dieser zeichnen wir in der Ebene Q_2 die homologe (kongruente) Kurve b_2^0 . Wir ermitteln dann zu einer Reihe von Punkten B_2^0 der Kurve b_2^0 die entsprechenden Punkte A_2^0 der Ebene P_2 und konstruieren die zugehörige Kurve β der Punkte V_{B2} . Diese Kurve β schneidet die Kurve b_2^0 in dem gesuchten

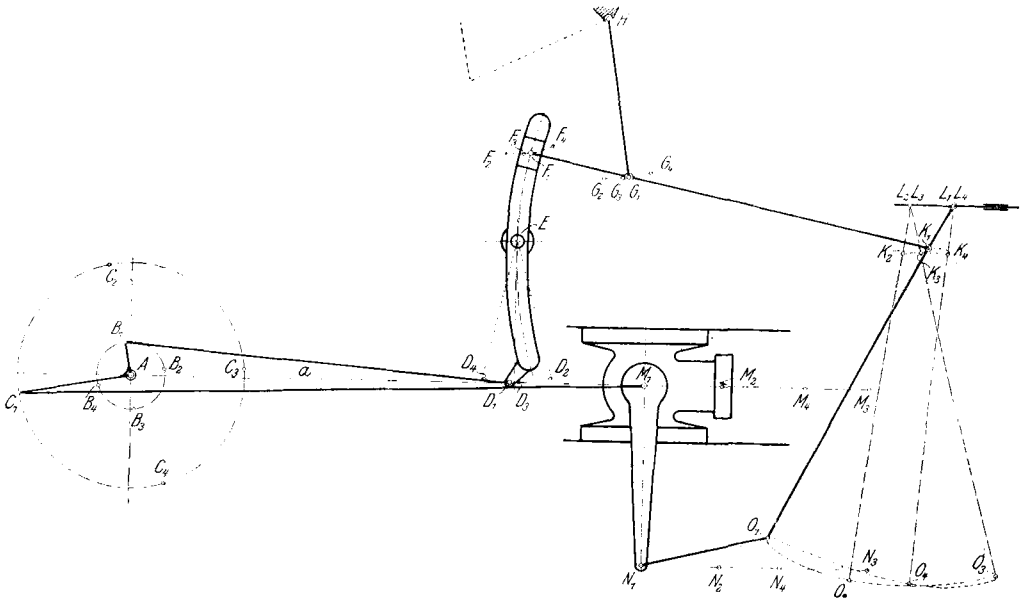


Abb. 22

Gelenkpunkte B_2 der Ebene Q_2 , durch den dann der Gelenkpunkt A_2 der Ebene P_2 und damit die Ebene S bestimmt ist.

Eine andre Konstruktion der Totlagen folgt daraus, daß, wenn Q_1 eine Totlage sein soll, die Punkte B_1, A_1 und der Momentanpol II_{P_1} in einer Geraden liegen müssen. Wenn die geometrischen Oerter der Punkte A_1 und B_1 , die Kurven a_1 bzw. b_1 , ermittelt sind, so legt man durch je zwei zusammengehörige Punkte A_1 und B_1 eine Gerade und fällt auf diese vom Momentanpol II_{P_1} der Ebene P_1 das Lot $II_{P_1}F = f$ (Abb. 21). Dann trägt man auf der Geraden A_1B_1 die Strecke $A_1C = f$ auf und erhält als geometrischen Ort der Punkte C unter Berücksichtigung des Richtungssinnes der Lote eine Kurve c , welche die Kurve a_1 in dem gesuchten Gelenkpunkte A_1^0 schneidet. Den andern Gelenkpunkt B_1^0 findet man dann als Schnittpunkt der Geraden $II_{P_1}A_1^0$ mit der Kurve b_1 .

7. Untersuchungen an der Heusingersteuerung. Um zu zeigen, in welcher Weise sich die Ergebnisse der vorliegenden Betrachtungen in praktischen Fällen anwenden lassen, sollen zunächst einige Untersuchungen an der Dampfmaschinenumsteuerung von Heusinger von Waldegg durchgeführt werden. Es ist jedoch nicht beabsichtigt, hier auf die Steuerung als solche näher einzugehen, sondern es sollen an dem Beispiele der Heusingersteuerung einige Fragestellungen erörtert werden, die von allgemeiner Bedeutung für die Konstruktion von Mechanismen bzw. Getrieben sind.

Den Untersuchungen ist die in Abb. 22 schematisch dargestellte Steuerung zugrunde gelegt, bei der für alle Stangen winkelrechte Mittellage angenommen und eine als normal gegebene Füllung von 35 vH eingestellt ist. Es wurden die vier Lagen Voreinströmen, Expansion, Vorausströmen und Kompression durch ein Müllersches Schieberdiagramm ermittelt und entsprechend durch die Marken 1, 2, 3 bzw. 4 kenntlich gemacht. Die Bahnen der Gelenkpunkte sind in Abb. 22 eingezeichnet, um die Bewegungsvorgänge deutlicher hervortreten zu lassen.

a) Der Antrieb der Kulissee. Die Kulissee, die sich um den festen Punkt E dreht, wird durch die um A (die Kurbelwelle) drehbare Exzenterkurbel AB mittels der Exzenterstange BD angetrieben. Damit, wie verlangt wird, den beiden vertikalen Stellungen AB_{III} und $A(B_{III})$ der Exzenterkurbel die gleiche Stellung der Kulissee entspricht, muß die zugeordnete Lage D_{III} des Punktes D der

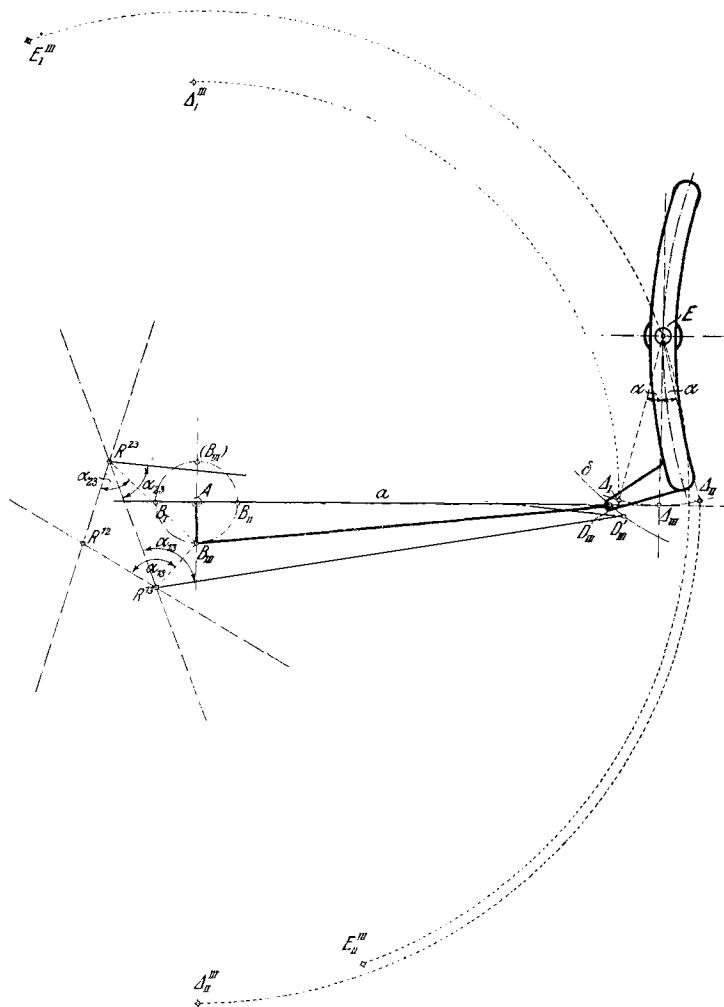


Abb. 23

Kulisse auf der Geraden a liegen, die der Kreuzkopfmittelpunkt M beschreibt (Abb. 23). Das Bestreben, die Dampfverteilung zu verbessern, führt auf die Forderung, den Kulissengelenkpunkt D so zu bestimmen, daß der den beiden horizontalen Stellungen AB_I und AB_{II} der Exzenterkurbel zugeordnete Kulissendrehwinkel $D_I E D_{II}$ durch die dem Punkte B_{III} entsprechende Lage ED_{III} halbiert wird. Es handelt sich hier um ein Gelenkviereck $ABDE$ mit den Festpunkten A und E , bei dem je drei Lagen der beiden Kurbeln AB und ED als einander zugeordnet und ferner der Gelenkpunkt B der einen Kurbel gegeben sind. Dann ist der Gelenkpunkt D der Kulisse eindeutig bestimmt, so daß die weitere Forderung, daß die Mittellage D_{III} von D auf der Geraden a liegen soll, nur erfüllt werden kann, wenn man z. B. den Kulissendrehwinkel $D_I E D_{II}$ nicht als gegeben annimmt. Man verfährt nun folgendermaßen. Für einen beliebigen Kulissendrehwinkel $D_I E D_{II} = 2\alpha$ ermittelt man die relativen Lagen der Kulisse gegen die Mittelstellung der Exzenterkurbel AB_{III} . Zu diesem Zwecke wählen wir auf der Kulisse einen beliebigen Punkt A mit seinen drei Lagen A_I, A_{II}, A_{III} (Abb. 23) und ermitteln die Punkte A_I^{III}, A_{II}^{III} sowie E_I^{III}, E_{II}^{III} als dritte Eckpunkte von Dreiecken, indem wir $B_{III} A A_I^{III} \cong B_I A A_I, B_{III} A A_{II}^{III} \cong B_{II} A A_{II}, B_{III} A E_I^{III} \cong B_I A E, B_{III} A E_{II}^{III} \cong B_{II} A E$ machen. Die Mittelsenkrechten zu $E_I^{III} E_{II}^{III}$ und $A_I^{III} A_{II}^{III}$ schneiden sich im Pole R^{12} ; entsprechend ergeben sich die Pole R^{13} bzw. R^{23} als Schnittpunkte der Mittellote zu EE_I^{III} und $A_I A_{II}^{III}$ bzw. EE_{II}^{III} und $A_{II} A_{III}^{III}$. Die Winkel α_{13} und α_{23} , die $B_{III} R^{13}$ bzw. $B_{III} R^{23}$ mit $R^{13} R^{12}$ bzw. $R^{23} R^{12}$ bilden, trägt man an $R^{13} R^{23}$ in R^{13} bzw. R^{23} an und erhält als Schnittpunkt der beiden freien Schenkel den Punkt D_{III}' , der als Gelenkpunkt der Kulisse in ihrer Mittelstellung die Eigenschaft hat, daß er mit den beiden äußeren Kulissenstellungen die gleichen Winkel α einschließt. Wiederholt man das angegebene Verfahren für einige andre Werte von α , so ergeben sich entsprechende Punkte D_{III}' , die eine Kurve δ bilden. Der Schnittpunkt D_{III} dieser Kurve δ mit der Geraden a ist dann der gesuchte Kulissengelenkpunkt und $B_{III} D_{III}$ ist die Länge der Exzenterstange. Wie die Konstruktion (Abb. 23) zeigt, muß, um die oben angegebene Forderung zu erfüllen, der Kulissengelenkpunkt um eine gewisse Strecke nach der Kurbel hin verlegt werden. Dieses Ergebnis stimmt mit dem von Pflitzner¹⁾ gefundenen überein, der jedoch den Punkt D nur durch Probieren ermittelt.

b) Die Aufhängung der Kulissenstange. Wie die bereits erwähnten Untersuchungen von Pflitzner ergeben haben, muß zur Erzielung einer gleichförmigen Dampfverteilung auf Kurbel- und Deckelseite des Zylinders danach gestrebt werden, daß bei einer bestimmten, z. B. der normalen, Füllungseinstellung der Kulissenstein während der Bewegung der Steuerung sich nicht gegen die Kulisse verschiebt, d. h. daß die den gegebenen vier Stellungen des Mechanismus entsprechenden vier Lagen des Gelenkpunktes F des Kulissensteins auf einem Kreise um den Kulissendrehpunkt E liegen. Die in Abb. 22 eingezeichnete Bahn des Punktes F zeigt deutlich die Abweichung von der Kreisbahn und daher die Unvollkommenheit der gezeichneten Steuerung. Die angegebene Forderung läßt sich bei richtiger Wahl des Aufhängepunktes G der Kulissenstange FK erfüllen. In diesem Falle werden die vier Lagen des Punktes F entsprechend den zugeordneten Exzenterstellungen auf einem Kreise um E gewählt. Die zugehörigen Lagen des Endpunktes K der Kulissenstange sind dann, falls die Längen KL und FK als gegeben angesehen werden, durch die vier Schieberstellungen, d. h. die Lagen des Punktes L , bestimmt. Damit sind die vier Lagen der Kulissenstange FK als bekannt zu betrachten, und es handelt sich nun um die Aufgabe, diejenigen Punkte in der Ebene der Kulissenstange zu ermitteln, deren vier entsprechende Lagen auf einem Kreise liegen. Diese Punkte würden dann als Aufhängepunkte verwendet werden können.

Da die vier Lagen der Kulissenstange nach Abb. 22 zu wenig voneinander abweichen und daher kein deutliches Bild der Konstruktion ergeben, wird in Abb. 24 ein Beispiel mit anderen Abmessungen, jedoch im übrigen den gleichen Bedingungen, vorgeführt. Es sind vier Lagen einer Ebene FK in der Weise gegeben, daß die vier homologen Lagen des Punktes F auf einem Kreise um den Punkt E liegen, während die vier entsprechenden Lagen des Punktes K beliebig gewählt seien. Man ermittelt hier die sechs Pole $P^{12}, P^{13}, P^{23}, P^{14}, P^{24}, P^{34}$, die zu den vier Lagen der Ebene FK gehören und zeichnet dann für eine der vier Lagen, z. B. für die Lage 1, die Kreispunkt-

¹⁾ Pflitzner, Untersuchungen an der Heusingersteuerung, Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 481 u. f.

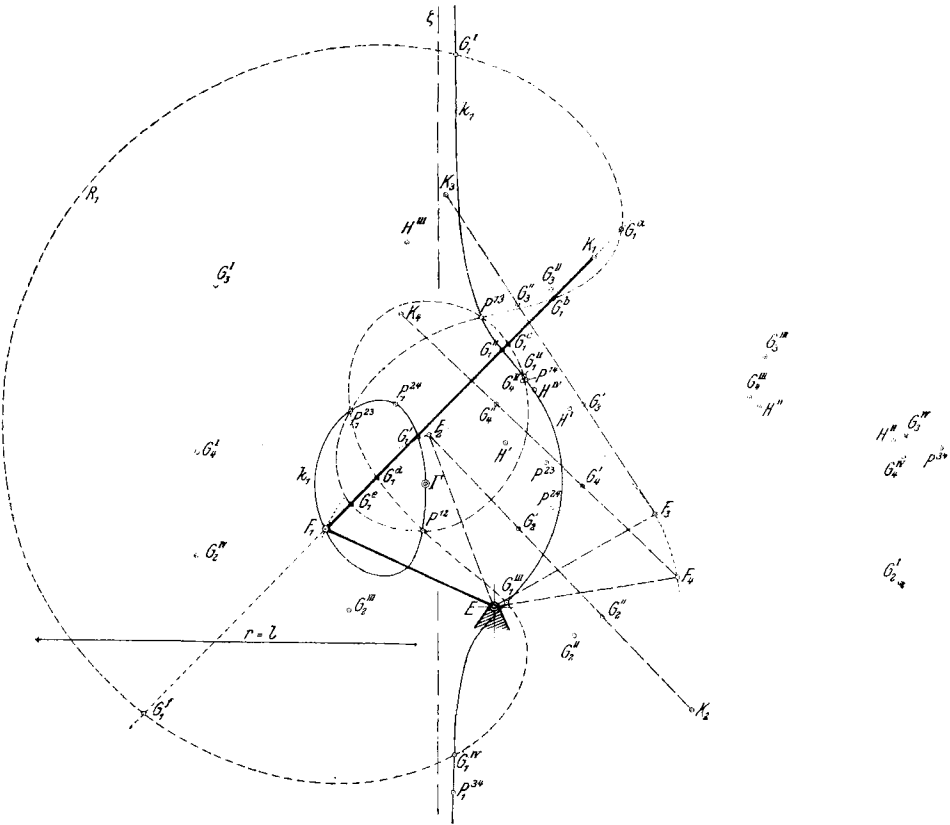


Abb. 24

kurve k_1 , die dann in der Lage 1 der Ebene FK der geometrische Ort aller Punkte ist, deren vier homologe Lagen auf einem Kreise liegen, und die daher bei der Heusingersteuerung als Aufhängepunkte der Kullissenstange in Betracht kommen. Um den Aufhängepunkt auf der Kurve k_1 festzulegen, kann man noch eine Annahme machen bzw. noch eine weitere Forderung erfüllen. Verlangt man z. B., daß der Aufhängepunkt auf der Geraden FK liegt, so findet man ihn als Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve k_1 . Von den drei Schnittpunkten, die sich hierbei ergeben, ist der eine der gegebene Punkt F_1 , während die beiden anderen G_1^I und G_1^{II} , die mit ihren entsprechenden Punkten G_2^I, G_2^I, G_4^I bzw. $G_2^{II}, G_2^{II}, G_4^{II}$ auf je einem Kreise um H' bzw. H'' liegen, als Aufhängepunkte dienen können. Wenn dagegen eine bestimmte Länge l der Aufhängestange GH vorgeschrieben ist, so zeichnet man in der Lage 1 der Ebene FK für drei der vier Lagen die R_1 -Kurve für den Wert $r = l$. Diese schneidet im Falle der Abb. 24 die Kreispunktkurve k_1 in vier reellen Punkten $G_1^I, G_1^{II}, G_1^{III}, G_1^{IV}$, von denen jeder mit seinen drei homologen Punkten G_2^I, G_2^I, G_4^I bzw. $G_2^{II}, G_2^{II}, G_4^{II}$ bzw. $G_2^{III}, G_2^{III}, G_4^{III}$ bzw. $G_2^{IV}, G_2^{IV}, G_4^{IV}$ auf je einem Kreise vom gleichen vorgeschriebenen Radius l

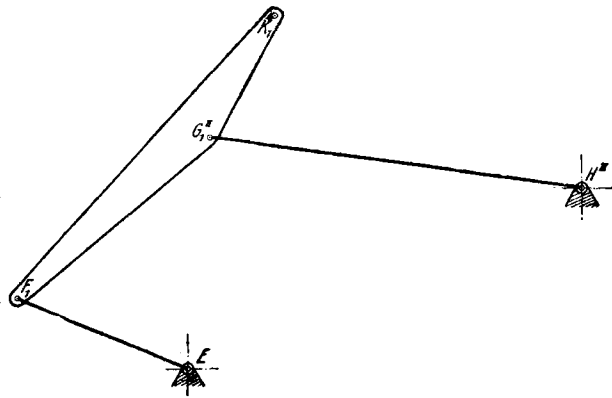


Abb. 24a

liegt, deren Mittelpunkte mit H^I, H^{II}, H^{III} bzw. H^{IV} bezeichnet sind. Führt man also, abgesehen von dem auf dem Kreise um E bewegten Punkt F , einen der vier Schnittpunkte, z. B. G^{II} (Abb. 24a) auf einem Kreise um den zugehörigen Mittelpunkt H^{II} , so ist die Bedingung erfüllt, daß der Punkt K bei der Bewegung des erhaltenen Gelenkviereckes $EF GH$ die vier vorgeschriebenen Lagen K_1, K_2, K_3, K_4 durchläuft, die den ebenfalls gegebenen Lagen F_1, F_2, F_3, F_4 des Punktes F entsprechen.

Bei der Heusingersteuerung wird es wegen der Kürze des von F zurückgelegten Weges in der Regel genügen, wenn man nur drei Lagen des Punktes F auf dem Kreise um E annimmt, etwa die beiden Totlagen und eine mittlere Lage. Demgemäß seien auch drei zugeordnete Lagen des Punktes K vorgelegt, so daß drei Lagen der Ebene FK als gegeben angenommen werden können. Hier darf man, um den Aufhängepunkt G zu bestimmen, noch zwei weitere Annahmen machen. Wählt man z. B. den Aufhängepunkt G willkürlich, so ergibt sich der Punkt H als Mittelpunkt des Kreises durch die drei entsprechenden Lagen G_1, G_2, G_3 , wobei die Länge der Aufhängestange GH der Radius dieses Kreises ist. Wenn dagegen die Aufhängestange GH eine gegebene Länge l haben soll und ferner gefordert wird, daß der Aufhängepunkt G auf der Geraden FK liegt, so ermittelt man die sechs Schnittpunkte $G_1^a, G_1^b, G_1^c, G_1^d, G_1^e, G_1^f$ dieser Geraden mit der in der Lage 1 für $r=l$ gezeichneten R_1 -Kurve. Jeder der sechs Schnittpunkte kann als Aufhängepunkt benutzt werden (Abb. 24).

c) Der Steuerungsantrieb seitens des Kreuzkopfes. Die Bewegung des Kreuzkopfes wird durch die Kreuzkopfschwinge NO und die Stange OL , die ihrerseits im Punkte K von der Kulissenstange FK angetrieben wird, auf den Schieber übertragen, dessen Bewegung mit der des Punktes L identisch ist. Für eine bestimmte Füllung sei die Schieberbewegung, d. h. die Bewegung des Punktes L und ferner die von der Kullisse abgeleitete Bewegung des Punktes K gegeben, so daß die Bewegung der Stange KL

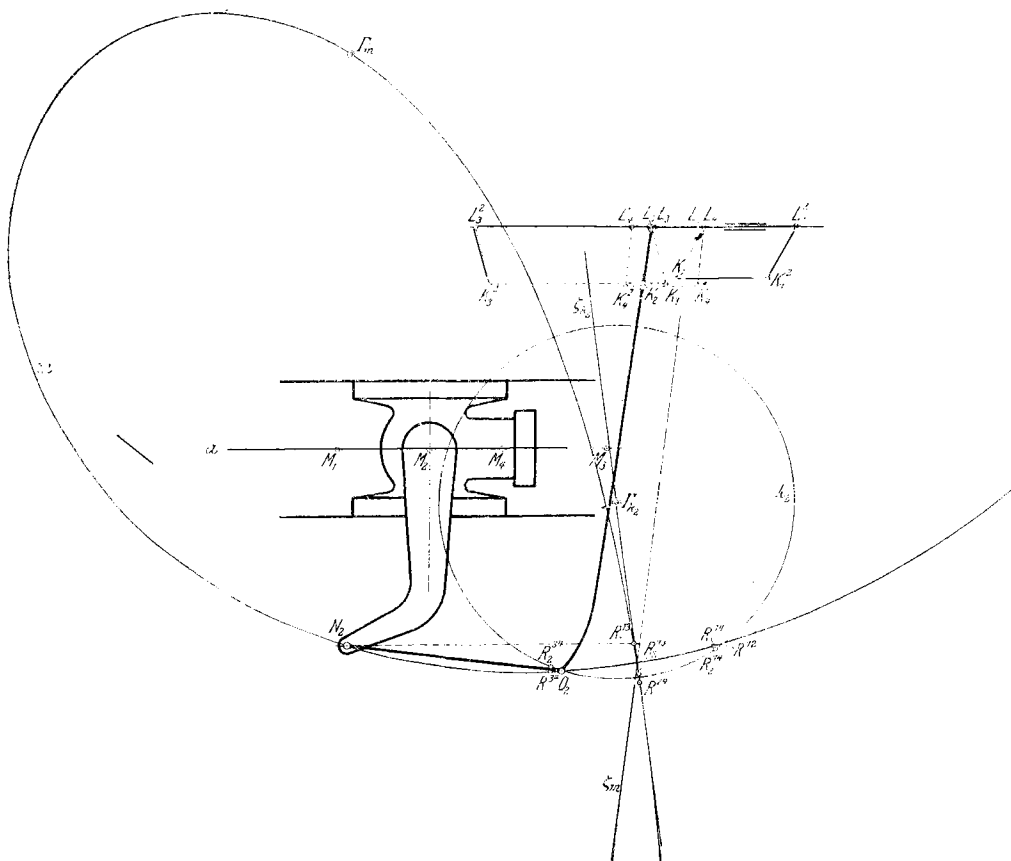


Abb. 25

in ihrer Zuordnung zu der gegebenen Kreuzkopfbewegung als bekannt angesehen werden darf. Die vier Lagen Voreinströmen (1), Expansion (2), Vorausströmen (3) und Kompression (4) der Stange KL und des Kreuzkopfes M seien für die geforderte Füllung bestimmt. Gesucht werden die durch die Kreuzkopfschwinge NO verbundenen Gelenkpunkte N und O .

Man ermittelt die relativen Lagen der Stange KL gegen eine bestimmte Lage des Kreuzkopfes. Die Konstruktion, die in Abb. 25 für die Lage 2 durchgeführt ist, wird hier besonders einfach, da der Kreuzkopf eine geradlinige Schiebung vollzieht. Infolgedessen ergeben sich die relativen Lagen L_1^2, L_3^2, L_4^2 bzw. K_1^2, K_3^2, K_4^2 der Punkte L bzw. K gegen die Kreuzkopflage M_2 durch Verschieben parallel der Geraden a um die Strecken $L_1L_1^2 = K_1K_1^2 = M_1M_2, L_3L_3^2 = K_3K_3^2 = M_3M_2, L_4L_4^2 = K_4K_4^2 = M_4M_2$. Für die gefundenen relativen Lagen $K_1^2L_1^2, K_2L_2, K_3^2L_3^2, K_4^2L_4^2$ der Stange KL konstruiert man nun die sechs Pole $R^{12}, R^{13}, R^{23}, R^{14}, R^{24}, R^{34}$ als Schnittpunkte von Mittelsenkrechten und zeichnet die Mittelpunktkurve m (Mittellinie ζ_m und Hauptbrennpunkt Γ_m), die in der Kreuzkopfebene den geometrischen Ort aller Punkte N_2 darstellt. Ferner konstruiert man in der Lage L_2K_2 der Stange LK die Kreispunktkurve k_2 (Mittellinie ζ_{k_2} und Hauptbrennpunkt Γ_{k_2}). In dem in Abb. 25 gezeichneten Falle zerfällt die Kreispunktkurve in ihre Mittellinie ζ_{k_2} und einen Kreis um Γ_{k_2} . Sie stellt in der Ebene der Stange K_2L_2 den geometrischen Ort aller Punkte O_2 dar. Jedem Punkte N_2 der Mittelpunktkurve m entspricht eindeutig ein Punkt O_2 der Kreispunktkurve k_2 , wobei gegenüber dem Poldreieck $R^{12}R^{13}R^{23}$ die Punkte N_2 und O_2 sich in der gleichen Weise entsprechen wie in Abb. 23 die Punkte B_{III} und D_{III}' . Wählt man also entweder auf m einen Punkt N_2 oder auf k_2 einen Punkt O_2 , so sind damit alle Abmessungen des Mechanismus bestimmt. Man kann demnach noch eine, aber auch nur eine willkürliche Annahme machen, wobei die Kurven m und k_2 die Grundlage für die weiteren Erörterungen bilden.

Es sei verlangt, daß der Punkt N_2 auf einer gegebenen Geraden, z. B. auf einer Vertikalen durch M_2 , liegen möge. Hier ergibt sich N_2 als Schnittpunkt dieser Geraden mit der Mittelpunktkurve m . Ist dagegen die Länge MN vorgeschrieben, so findet man N_2 als Schnittpunkt des um M_2 mit MN geschlagenen Kreises mit der Kurve m . Wenn bezüglich des Punktes O Bedingungen gestellt sind, so benutzt man statt der Mittelpunktkurve m die Kreispunktkurve k_2 . Soll z. B. O auf der Geraden LK liegen, so ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve k_2 der gesuchte Punkt O_2 . Wenn O von L oder von K eine gegebene Entfernung haben soll, so findet man O_2 als Schnittpunkt der entsprechenden Kreise um L_2 bzw. K_2 mit der Kurve k_2 .

Es werde gefordert, daß die Kreuzkopfschwinge in zwei Lagen, z. B. 1 und 3, nach oben bzw. unten den gleichen Ausschlagwinkel mit der Horizontalen einschließen soll. Hier hat man zu beachten, daß die Verbindungslinie des Poles R^{13} mit einem auf m beliebig gewählten Punkte N_2 die Mittelsenkrechte der zu N_2 gehörenden Punkte O_1^2 und O_3^2 ist, die auf einem Kreise um N_2 liegen. Hiernach erhält man den gesuchten Punkt N_2 als Schnittpunkt der Horizontalen durch R^{13} mit der Mittelpunktkurve m . Dieser Fall ist in Abb. 25 eingezeichnet.

Ist aus bestimmten Gründen die Länge l der Kreuzkopfschwinge NO vorgeschrieben, so konstruiert man für eins der vorhandenen Poldreiecke in der Lage 2, z. B. für $R^{12}R^{13}R^{23}$, die R_2 -Kurve für den Wert $r = l = NO$ (Abb. 26), welche die Kreispunktkurve k_2 in O_2 schneidet. Es ergeben sich hier insgesamt vier Schnittpunkte O_2, O_2', O_2'' und O_2''' , von denen man den am günstigsten gelegenen benutzt. Es kann ferner der Fall eintreten, daß noch eine beliebige fünfte Stellung des Schiebers und der Stange KL einer vorgeschriebenen Kreuzkopfstellung entsprechen soll. Hier zeichnet man die fünf relativen Lagen der Stange KL gegen eine der gegebenen Kreuzkopfstellungen und konstruiert dann zwei Mittelpunktkurven, z. B. für die Relativsysteme 1, 2, 3, 4 und 1, 2, 3, 5. Jeder der in Frage kommenden Schnittpunkte (im allgemeinen vier) beider Kurven kann als Gelenkpunkt N_2 der Kreuzkopfebene verwendet werden. Mitunter wird verlangt, daß der Schieber in einer der vier gegebenen Lagen sich möglichst schnell bewegen soll. Man bestimmt in diesem Falle zunächst auf den beiden Kurven m und k_2 eine Anzahl paarweise einander zugeordneter Punkte N_2 bzw. O_2 und konstruiert dann für jeden der hierdurch bestimmten Mechanismen die Schiebergeschwindigkeit. Innerhalb der durch konstruktive Rücksichten gegebenen Grenzen wählt man dann diejenigen Punkte N_2 und O_2 , bei denen sich die größte Schiebergeschwindigkeit ergibt.

8. Untersuchungen an einer Wälzhebelsteuerung. Es soll eine Wälzhebelsteuerung für den Einlaß nach dem in Abb. 27 a angegebenen Schema konstruiert werden, bei der die Wälzbank, die durch den Regler verstellt wird, bei einer bestimmten Füllung

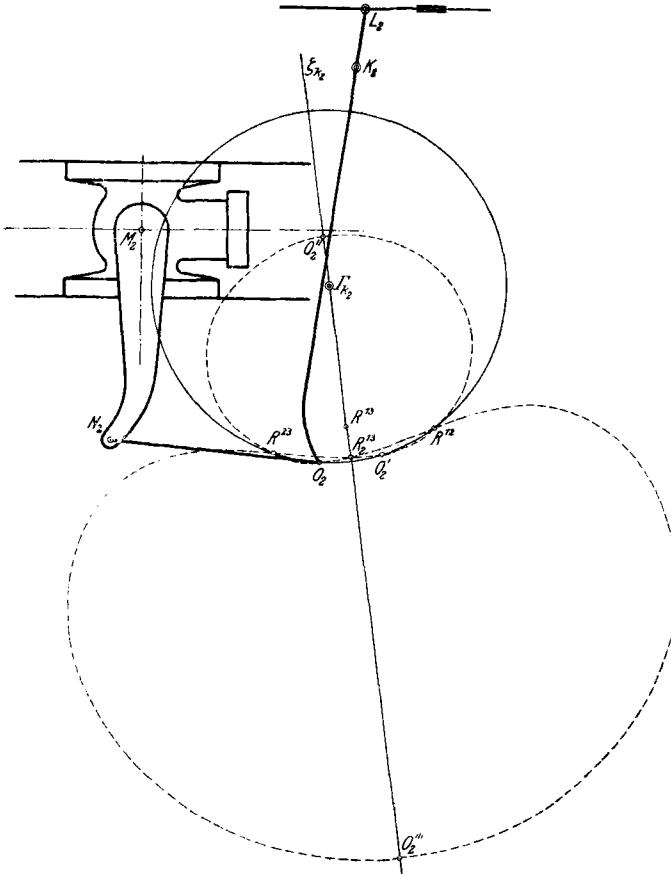


Abb. 26

aber in Ruhe bleibt, als Wälzkurve eine Gerade besitzt, die bei der gegebenen Füllung gegen die Ventilspindel unter dem gegebenen Winkel α geneigt ist. Ferner sei die Lage Q der Steuerwelle gegeben und auf Grund eines Müllerschen Diagrammes der der vorgeschriebenen Füllung entsprechende Drehwinkel ψ der Steuerwelle ermittelt. Die Konstruktion ist in Abb. 27 dargestellt.

Wenn reines Rollen erfolgen soll, so findet man bei geradliniger Wälzbankkurve für die Wälzhebelkurve eine logarithmische Spirale mit der Polargleichung

$$\rho = z_0 \tan \alpha e^{(\varphi - \pi) \tan \alpha},$$

wobei der asymptotische Punkt der Kurve ($\rho = 0$) der geradlinig geführte Punkt A und $z_0 \tan \alpha = a$ der nach konstruktiven Rücksichten zu wählende Abstand der Bahngeraden des Punktes A vom ersten Berührungspunkt beider Wälzkurven (bei aufgesetztem Ventil) ist. Für diese erste Stellung, in der der Ventilhubpunkt A sich in seiner tiefsten Lage A_1

befindet, konstruieren wir die Wälzhebelkurve h als logarithmische Spirale, durch die nun die Bewegung des Wälzhebels bestimmt ist. Ist für die vorgeschriebene Füllung der Ventilhub berechnet worden, so ist damit die oberste Lage A_3 des Punktes A gefunden. Bei Füllungsabschluß ist der Punkt A in die mit A_1 zusammenfallende Lage A_5 zurückgekehrt, wobei die beiden Strecken A_1A_3 und A_3A_5 in gleichen Zeiten durchlaufen werden mögen. Weiter verfährt man in der üblichen Weise, indem man das Geschwindigkeitzeitdiagramm des Punktes A annimmt, hieraus die entsprechenden Wegstrecken durch Integration ermittelt und dadurch das Wegzeitdiagramm für A findet, wobei dann der Zeichnungsmaßstab dadurch bestimmt ist, daß die Hälfte des gesamten von A zurückgelegten Weges gleich dem Ventilhub A_1A_3 ist. Um den angenommenen Geschwindigkeitsverlauf möglichst genau zu verwirklichen, wählen wir in dem gefundenen Wegzeitdiagramm zwischen A_1 und A_3 , sowie zwischen A_3 und A_5 noch je einen Punkt A_2 bzw. A_4 , und zwar so, daß diesen beiden Punkten, die zusammenfallen mögen, Exzenterstellungen entsprechen, welche die Exzenterdrehwinkel der Perioden A_1A_3 und A_3A_5 halbieren. Durch die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 haben wir fünf Lagen des Wälzhebels bestimmt, die fünf gegebenen Lagen der Exzenter Ebene zugeordnet sind. Es sind nun die Gelenkpunkte C bzw. E des Wälzhebels bzw. der Exzenterkurbel so zu bestimmen, daß die angegebene Zuordnung durch eine starre Verbindung der Punkte C und E erzielt wird.

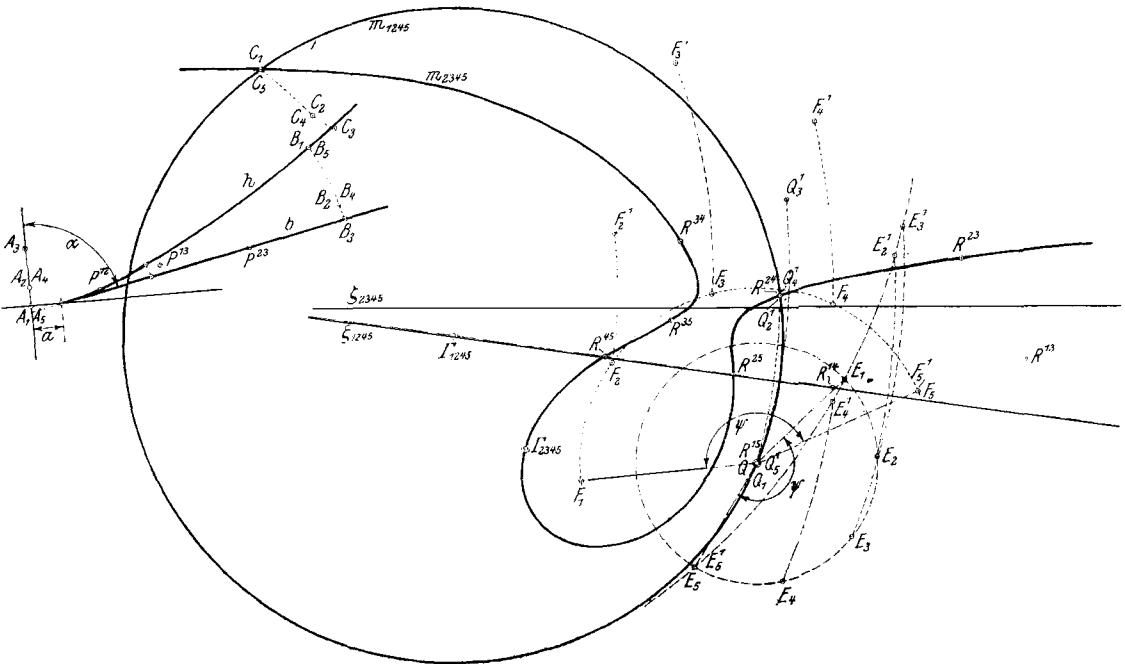


Abb. 27

Wir wählen auf dem Wälzhebel einen beliebigen Punkt B und ermitteln seine fünf Lagen B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 in den fünf angenommenen Stellungen des Wälzhebels. Dann bestimmen wir die Pole der fünf Lagen des Wälzhebels, wobei sich z. B. P^{35} als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu A_3A_5 und B_3B_5 ergibt. Da hier die Lagen 1 und 5 sowie 2 und 4 des Wälzhebels zusammenfallen, so sind die Pole P^{15} und P^{24} völlig unbestimmt, während die Pole $P^{12}, P^{14}, P^{25}, P^{45}$ bzw. P^{13}, P^{35} bzw. P^{23}, P^{34} in je einem Punkte zusammenfallen. In der Exzenterebene wählen wir einen beliebigen Punkt F und bestimmen seine fünf Lagen auf dem Kreise um Q so, daß den Punkten F_1 und F_5 der gegebene Exzenterwinkel ψ als Zentriwinkel entspricht und daß die Punkte F_2, F_3, F_4 den Kreisbogen F_1F_5 in vier gleiche Teile teilen. Nun sind die relativen Lagen der Exzenterebene gegen die Lage 1 des Wälzhebels zu ermitteln. Hierbei ist zu beachten, daß im Punkte Q fünf Lagen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 des Punktes Q der Exzenterebene zusammenfallen. Wir drehen die Ebene F_2Q_2 mit dem Pol F^{12} als Drehpunkt um den Winkel $A_2P^{12}A_1$ in die Lage $F_2^1Q_2^1$ und finden dadurch die Punkte F_2^1 und Q_2^1 , welche die relative Lage der Exzenterebene 2 gegen die Wälzhebelstellung 1 bestimmen. In gleicher Weise ergeben sich die Punkte F_3^1 und Q_3^1 , indem man die Ebene F_3Q_3 um den Pol P^{13} mit dem Drehwinkel $A_3P^{13}A_1$ dreht, ferner die Punkte F_4^1 und Q_4^1 durch Drehung um den

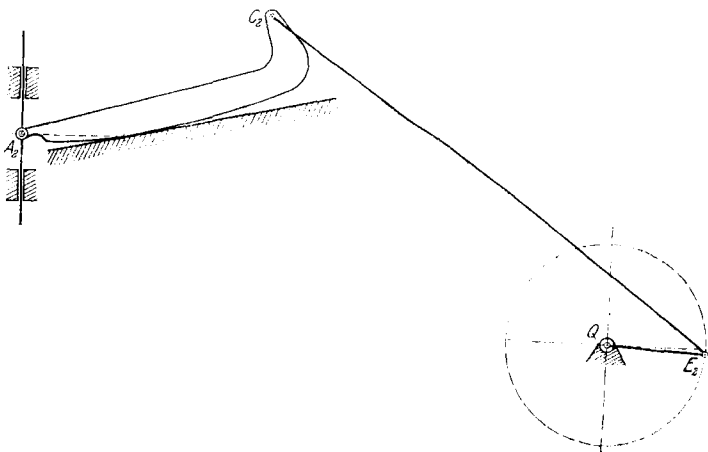


Abb. 27*

mit P^{12} zusammenfallenden Pol P^{14} . Die Punkte Q_5^1 und F_5^1 fallen mit Q bzw. F_5 zusammen. Für die nunmehr bestimmten fünf Relativlagen der Exzenter-ebene 2 gegen die Lage 1 des Wälzhebels suchen wir die zehn Pole R^{12}, \dots, R^{45} auf; z. B. findet man R^{23} als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu $Q_2^1 Q_3^1$ und $F_2^1 F_3^1$. Der gesuchte Exzentergelenkpunkt E muß nun die Eigenschaft haben, daß seine Relativlagen $E_1, E_2^1, E_3^1, E_4^1, E_5^1$ auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt die Lage C_1 des gesuchten Wälzhebelgelenkpunktes ist. Wir zeichnen zwei Mittelpunktkurven für die fünf relativen Lagen der Exzenterebene. In Abb. 27 sind die Mittelpunktkurven m_{2345} für die Pole $R^{23}, R^{24}, R^{35}, R^{15}$ und m_{1245} für die Pole $R^{12}, R^{14}, R^{25}, R^{15}$ gezeichnet. Da diese letzten vier Pole hier in einer Geraden liegen, so zerfällt die Mittelpunktkurve m_{1245} in einen Kreis und seinen durch $R^{12}, R^{14}, R^{25}, R^{15}$ gehenden Durchmesser ζ_{1245} . Die beiden Mittelpunktkurven schneiden sich außer in den Polen R^{24}, R^{25}, R^{45} nur in zwei reellen Punkten, von denen der eine außerhalb des Zeichnungsraums liegt und nicht brauchbar ist, während der zweite der gesuchte Gelenkpunkt C_1 in der Wälzhebellage 1 ist. Für ein beliebiges Poldreieck, z. B. $R^{12} R^{13} R^{23}$, bestimmen wir diejenigen drei entsprechenden Punkte E_1, E_2^1, E_3^1 , die auf einem Kreise um C_1 liegen. Dann ist E_1 der gesuchte Exzentergelenkpunkt in der Exzenterstellung 1, QE_1 ist die Länge der Exzenterkurbel und der Radius $C_1 E_1$ die Länge der Exzenterstange. Bestimmt man noch die Punkte E_4^1 und E_5^1 , z. B. aus dem Poldreieck $R^{34} R^{35} R^{45}$, so liegen auch diese Punkte auf dem um C_1 mit $C_1 E_1$ geschlagenen Kreise. Durch Drehung des Punktes E_3^1 mit P^{12} als Drehpunkt um den Winkel $A_1 P^{12} A_2$ erhält man den Punkt E_2 ; ebenso findet man E_3 , indem man E_3^1 um P^{13} um den Winkel $A_1 P^{13} A_3$ dreht, und E_4 durch Drehung von E_4^1 um P^{14} , während E_5 mit E_5^1 zusammenfällt. Die Punkte E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 liegen auf einem Kreise um Q und erfüllen die Forderung, daß $\sphericalangle E_1 Q E_5 = \psi$ ist und daß durch E_2, E_3, E_4 der Kreisbogen $E_1 E_5$ in vier gleiche Teile geteilt wird. In Abb. 27 a ist die Steuerung schematisch für die Stellung 2 gezeichnet. 36

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Unstetige und mehrdeutige Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen.¹⁾

Von G. JAFFÉ in Leipzig.

Es ist schon lange bekannt, daß die klassischen Gleichungen für die Bewegung reibungsloser Flüssigkeiten zu Folgerungen führen, die mit der Erfahrung nicht vereinbar sind. In voller Allgemeinheit läßt sich der folgende Satz beweisen²⁾: ein fester Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit durch eine unbegrenzte, im Unendlichen ruhende, reibungslose Flüssigkeit bewegt, erfährt vonseiten der Flüssigkeit keinen Widerstand in seiner Bewegungsrichtung. Dieser Satz, der häufig als d'Alembertsches Paradoxon bezeichnet wird, ist ebensowenig mit der Erfahrung in Einklang, wie das Auftreten negativer Drucke, das die Theorie ergibt. In einer strömenden Flüssigkeit ist der Druck mit der Geschwindigkeit durch die Bernoullische Gleichung verknüpft, und überall dort, wo die Geschwindigkeit einen gewissen kritischen Wert übersteigt, also insbesondere in der Nachbarschaft von vorspringenden scharfen Ecken und Kanten, an denen die Geschwindigkeit über alle Grenzen wachsen muß, wird der Druck negativ.

Einen Weg, auf dem man beiden Schwierigkeiten entgeht, hat Helmholtz³⁾ gewiesen. In seiner grundlegenden Arbeit über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen zeigt Helmholtz, daß man bei der Integration der hydrodynamischen Gleichungen stets

¹⁾ Dieser Bericht wurde in gekürzter Form am 20. September 1921 auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Jena vorgetragen.

²⁾ In der ausgesprochenen Form ist der Satz von U. Cisotti, Atti R. Ist. Veneto (8) 8 1905/06, 1291 bis 1295, bewiesen. D'Alembert selbst hatte sein Paradoxon für Körper von gewisser Symmetrie ausgesprochen. D'Alembert, Opusc. Math., Paris 1761 bis 1780, Bd. 5, S. 132 bis 138.

³⁾ H. v. Helmholtz, Monatsber. Akad. Berlin 1868, S. 215 bis 228. Wiss. Abh., Bd. 1, Leipzig 1882, S. 146 bis 157