Über die Darstellung einer beliebigen stetigen Funktion.

Von

JOHANNES MOLLERUP in Kopenhagen.

Die bekannten Annäherungen einer beliebigen stetigen Funktion sind schon in mannigfacher Weise begründet worden; die Beweise beruhen auf verschiedenen analytischen Hilfsmitteln: bestimmten Integralen, Fourierschen oder Taylorschen Entwicklungen usw. Es wird im folgenden eine axiomatische Herleitung dieser Darstellungen gegeben; genau wie wir eine gegebene reelle Zahl in mannigfacher Weise durch konvergente Folgen anderer reeller Zahlen, z. B. rationaler Zahlen bestimmen können, und zwar deshalb, weil diese Tatsache eine unmittelbare Folge der Definition der reellen Zahl ist, so können wir lediglich aus dem Fundamentalsatz, daß eine in einem Intervall gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen immer als Grenzfunktion eine stetige Funktion hat, herleiten, daß eine gegebene stetige Funktion in mannigfacher Weise durch gleichmäßig konvergente Folgen von anderen stetigen Funktionen, z. B. Polynomen oder trigonometrischen Summen, wie von Weierstraß gezeigt worden, darstellbar ist.

Es ist jedoch zu bemerken, daß die Hilfsmittel unseres Beweises wesentlich andere sind, als diejenigen, die bei dem entsprechenden Nachweise für die reellen Zahlen gewöhnlich benutzt werden (vergl. S. 512). In der Tat beruht unser ganzes Verfahren auf der Heranziehung der Zahlen der zweiten Zahlenklasse.

Wir beweisen zuerst zwei einfache mengentheoretische Hilfssätze.

Satz 1. Sind a und b zwei reelle Zahlen, $a < b$, und liegt zwischen a und b eine der Größe nach wohlgeordnete Menge reeller Zahlen, dann ist dieselbe immer abzählbar.

Betrachten wir nämlich die Intervalle von einem Element bis zum nächsten, so entsteht eine Intervallmenge, die nach einem bekannten Satze von G. Cantor (Acta Math. 2, 1883, S. 376) abzählbar ist.

Satz 2. Ist eine abzählbare Menge M auf irgend eine Weise geordnet, dann hat sie in dieser Ordnung entweder ein letztes Element oder sie enthält eine Untermenge vom Typus ω ohne nachfolgendes Element (jede solche Untermenge wollen wir eine letzte Untermenge vom Typus ω nennen).

Es sei die Menge

$$M \equiv \{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots\}$$

und dieselbe Menge in der gegebenen Ordnung M' ; wir greifen zuerst $a_{n_1} = a_1$ heraus, dann das erste Element a_{n_2} von M , das auch in M' nach a_1 folgt, dann wieder das erste Element a_{n_3} von M , das auch in M' nach a_{n_2} folgt usw.; wir nehmen an, daß die gegebene Ordnung M' kein letztes Element enthält. Sollte nun M' ein Element a_m enthalten, das nach der Untermenge $(a_{n_1} a_{n_2} \cdots)$ folgt, dann hätten wir z. B.

$$n_p < m < n_{p+1};$$

dann könnte aber $a_{n_{p+1}}$ gegen Voraussetzung nicht das erste Element von $\{a_1 a_2 a_3 \cdots\}$ sein, das in der gegebenen Ordnung nach a_{n_p} folgt.

Im folgenden wird dieser Satz nur in dem Falle gebraucht, daß M' wohlgeordnet ist.

Um den späteren Beweisgang übersichtlicher zu machen, möchte ich hier hervorheben, daß diese Sätze eine besondere Approximation einer gegebenen Zahl durch immer wachsende Zahlenfolgen liefern; es kommt hierbei nur die Anordnung der Zahlen in Betracht, nicht die Größe der zwischenliegenden Intervalle. Es sei die zu approximierende Zahl a und $b < a$; man bilde $b_1, b_2, b_3, \cdots$ wo

$$b < b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < a$$

mit der Grenze $b_\omega \leq a$. Ist $b_\omega < a$, dann bilden wir

$$b_\omega < b_{\omega+1} < b_{\omega+2} < \cdots < a.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so müssen wir nach den Sätzen 1 und 2 schließlich zu einer Folge gelangen, die a als Grenzpunkt hat.

Zur Basis der Darstellung aller in einem Intervall (ab) stetigen Funktionen gebrauchen wir eine abzählbare Menge von stetigen Funktionen

$$1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$$

und deren linearen Verbindungen mit rationalen Koeffizienten. An diese Funktionenmenge stellen wir die folgende wesentliche Forderung:

Wenn $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gegebene rationale Zahlen sind, dann enthält die Basis immer eine Funktion, die in $x_1, x_2, \cdots, x_n$ verschwindet und sonst durchweg positiv ist.

Diese Forderung ist jedenfalls erfüllt, wenn die φ Potenzen von x ($x, x^2, x^3, \dots$) oder trigonometrische Ausdrücke ($\sin mx, \cos mx$) sind.

Es sei die *Basis* R_x . Bilden wir mittels R_x gleichmäßig konvergente Funktionsfolgen und konvergente Zahlenfolgen, dann erzeugen wir neue stetige Funktionen und beliebige reelle Zahlen, die ein *Funktionskontinuum* C_x bilden, welches auch das Zahlenkontinuum enthält.

Satz 3. C_x ist abgeschlossen, d. h. jede von einer gleichmäßig konvergenten Funktionsfolge aus $C_x, \{c_1(x), c_2(x), \dots\}$, erzeugte Funktion $C(x)$ ist die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Funktionsfolge aus R_x .

Beweis einleuchtend.

Satz 4. Ist $f(x)$ stetig im Intervall (ab) , und $a(x)$ eine Funktion von C_x , die kleiner als $f(x)$ im ganzen Intervall ist, dann enthält C_x eine Funktion $b(x)$, so daß im ganzen Intervall

$$a(x) \leq b(x) < f(x),$$

indem das Gleichheitszeichen nie oder nur in einer endlichen Anzahl vorausgegebener rationaler Stellen, $x_1, x_2, \dots, x_n$, erfüllt ist; außerdem können wir, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben ist, $b(x) - a(x) < \varepsilon$ im ganzen Intervall annehmen.

Es sei $p(x)$ eine Basisfunktion, die in $x_1, x_2, \dots, x_n$ verschwindet und sonst im ganzen Intervall durchweg positiv ist. Wir bilden dann

$$\begin{aligned} a_0(x) &= a(x) + p(x), & a_1(x) &= \frac{a(x) + a_0(x)}{2} \\ a_2(x) &= \frac{a(x) + a_1(x)}{2} \\ &\vdots \\ a_m(x) &= \frac{a(x) + a_{m-1}(x)}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Folge $\{a_0(x), a_1(x), a_2(x), \dots\}$ nimmt dann gleichmäßig gegen $a(x)$ ab; alle Funktionen stimmen in $x_1, x_2, \dots, x_n$ überein. Von einer gewissen Zahl m ab erfüllen dann die $a_m(x)$ die im Satze für $b(x)$ aufgestellten Bedingungen.

Weil dieser Prozeß öfters zur Anwendung kommt, bezeichnen wir ihn mit dem besonderen Namen „Kombination von $a(x)$ mit $p(x)$ “.

Satz 5. Ist $f(x)$ eine beliebige im Intervall (ab) stetige Funktion, dann gibt es eine Folge von Basisfunktionen, die gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert.

Es sei im ganzen Intervall $a(x) < f(x)$, wo $a(x)$ eine stetige Funktion aus C_x ist, z. B. eine Basisfunktion; eine stetige Funktion $b(x)$ gehört dem Raum (af) an, wenn im ganzen Intervall

$$a(x) \leq b(x) \leq f(x).$$

Wir wollen jetzt den Raum (af) in der Weise ausfüllen, daß derselbe auch eine gegen $f(x)$ gleichmäßig konvergierende Folge enthält.

1. Der Raum (af) enthält eine Funktion $a_1(x)$ aus C_x ,

$$a(x) < a_1(x) < f(x) \quad (\text{Satz 4}),$$

sowie auch eine gleichmäßig konvergente immer wachsende Folge von Funktionen aus C_x .

Den maximalen Abstand zwischen a und f bezeichnen wir mit $\overline{af}$. Wir brauchen nur nach Satz 4 die Funktion $a_1(x)$

$$a(x) < a_1(x) < f(x)$$

und ebenso $a_2(x), a_3(x), \dots$ zu bestimmen, so daß

$$a(x) < a_1(x) < a_2(x) < a_3(x) < \dots < f(x)$$

und außerdem jedesmal

$$\overline{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \overline{a_{n-1} a_n}.$$

2. Der Raum (af) enthält Funktionen aus C_x , die in mindestens je einem Punkte von n gegebenen Teilintervallen $f(x)$ beliebig nahe kommen.

Der Gedanke des Beweisgangs ist der gleiche, der oben in der Bemerkung nach Satz 2 zum Ausdruck gekommen ist. Der Raum (af) wird durch fortgesetzte Kombination mit einer Funktion $p(x) > a(x)$ mit immer wachsenden Funktionsfolgen ausgefüllt. Sobald aber die gegebene Funktion durch eine Grenzfunktion in gewissen Punkten erreicht wird, dann muß dieselbe korrigiert werden, weil die weiteren durch die Konstruktion entstandenen Funktionen ja nicht dem Zwischenraum angehören würden. Diese Korrektur findet nun in der Weise statt, daß jedenfalls auf einer Ordinate eine immer wachsende Folge beschrieben wird.

Wir nehmen an, daß die gesuchte Approximation schon durch $b(x)$ in i der gegebenen Intervalle erreicht ist, so daß

$$a(x) < b(x) < f(x)$$

und $f(x) - b(x) < \varepsilon$ in einem (und also in unendlich vielen) rationalen Punkt jedes der i Intervalle. Es seien diese i Punkte $x_1, x_2, \dots, x_i$; wir erstreben die Approximation in einem neuen Intervall. Nach 1. bestimmen wir erstens $b_1(x)$, so daß

$$b(x) \leq b_1(x) < f(x).$$

und zwar soll hier wie im folgenden das Gleichheitszeichen in den Punkten $x_1, x_2, \dots, x_i$ gelten.

Weiter finden wir nach 1. $b_2(x), b_3(x), \dots$, wo

$$b_1(x) \leq b_2(x) \leq b_3(x) \dots$$

und immer

$$\overline{b_n b_{n+1}} < \frac{1}{2} \overline{b_{n-1} b_n}.$$

Es sei die Grenzfunktion $b_\omega(x)$.

a) Erreicht $b_\omega(x)$ in keinem Punkte $f(x)$, dann verdoppeln wir die Menge durch $b_{\omega+1}(x)$, $b_{\omega+2}(x)$, $\dots$; ist $b_{\omega \cdot 2}(x)$ die neue Grenzfunktion, dann verfügen wir so über die Abstände, daß

$$\overline{b_\omega b_{\omega \cdot 2}} < \frac{1}{2} \overline{b b_\omega}.$$

b) Erreicht dagegen $b_\omega(x)$ $f(x)$ in Punkten, die sämtlich den i Intervallen angehören, dann wird die Menge in folgender Weise geändert. Es sei $h(x)$ eine Basisfunktion, die in $x_1, x_2, \dots, x_i$ und einem rationalen Punkt x_{i+1} eines neuen Intervalls verschwindet, die aber sonst überall positiv ist. Wir bilden $h_1(x) = b_\omega(x) - h(x)$ und kombinieren $b_\omega(x)$ mit $h_1(x)$; hierdurch finden wir eine Funktion $h_n(x)$, die mit Ausnahme der Punkte $x_1, x_2, \dots, x_i$ größer als $b_1(x)$ ist und die außerdem für $x = x_{i+1}$ dieselbe Ordinate Y_{i+1} wie $b_\omega(x)$ besitzt. $h_n(x) = b'_\omega(x)$ soll dann $b_\omega(x)$ ersetzen; die Menge zwischen $b_1(x)$ und $b_\omega(x)$ wird durch eine Kombination von b_1 und $b'_\omega(x)$ ersetzt. Nun wird die Menge im Raum $(b_1 b'_\omega)$ verdoppelt wie oben die Menge im Raum $(b_1 b_\omega)$.

Wir können in dieser Weise von der Möglichkeit absehen, daß $f(x)$ innerhalb der i Intervalle erreicht wird, weil wir nötigenfalls das Korrektionsverfahren anwenden können. Es entsteht also eine gleichmäßig konvergente Folge

$$b_\omega(x), b_{\omega \cdot 2}(x), b_{\omega \cdot 3}(x), \dots,$$

wo

$$\overline{b_\omega b_{\omega \cdot 2}} < \frac{1}{2} \overline{b b_\omega}, \quad \overline{b_{\omega \cdot 2} b_{\omega \cdot 3}} < \frac{1}{2} \overline{b_\omega b_{\omega \cdot 2}} \dots$$

Die Grenzfunktion ist $b_{\omega^2}(x)$; sie läßt sich nötigenfalls wie früher korrigieren, wobei außer den Punkten $x_1, x_2, \dots, x_i$ immer der Punkt Y_{i+1} festgehalten wird. Entsteht durch Korrektion $b_{\omega^2}'(x)$, die überall $> b_\omega$, nur nicht in $x_1, x_2, \dots, x_i$, dann wird die Menge

$$\{b_{\omega \cdot 2}(x), b_{\omega \cdot 3}(x) \dots\}$$

durch eine Kombination von $b_{\omega^2}'(x)$ mit b_ω ersetzt, und in ähnlicher Weise können wir uns die entstehenden Zwischenräume ausgefüllt denken. In dieser Weise fahren wir nun fort; jede gefundene abzählbare Menge ohne letzte Funktion hat eine letzte Menge vom Typus ω ,

$$\{b_{\gamma_1}(x), b_{\gamma_2}(x), \dots\}$$

wo immer

$$\overline{b_{\gamma_\nu} b_{\gamma_{\nu+1}}} < \frac{1}{2} \overline{b_{\gamma_{\nu-1}} b_{\gamma_\nu}};$$

die Grenzfunktion b_{γ_ω} wird nötigenfalls korrigiert und bildet dann die Ausgangsfunktion einer Verdoppelung der vorhandenen Menge. Das Verfahren kann also nur dadurch abbrechen, daß eine Funktion gefunden wird, die in einem neuen Intervall Anschluß an die gegebene Funktion

erreicht; weil nun auf Y_{i+1} eine immer steigende Menge beschrieben wird, muß nach Satz 1 die ganze Menge abzählbar sein. Dieselbe hat also nach Satz 2 entweder eine letzte Funktion oder eine letzte Menge vom Typus ω mit einer Grenzfunktion. Die gefundene Funktion $c(x)$ liegt wie schon $b_1(x)$ oberhalb $b(x)$ im ganzen Intervall, und

$$f(x) - c(x) < \varepsilon$$

in $i + 1$ Teilintervallen.

Wir können nun mit einer Konstanten anfangen, die um ε kleiner als das Minimum von $f(x)$ ist, und erreichen dann immer steigend allmählich Anschluß in allen n Intervallen.

Nunmehr beweisen wir den Satz 5 wie folgt. Zuerst enthält die Basis eine Funktion $a(x) < f(x)$ in (ab) . (ab) wird halbiert; $a_1(x)$ soll dann eine Funktion aus C_x sein, die dem Raum (af) angehört, so daß in zwei Punkten der Teilintervalle

$$f(x) - a_1(x) < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ beliebig } > 0).$$

Dann halbieren wir beide Teilintervalle; $a_2(x)$ soll nun eine Funktion aus C_x sein, die dem Raum (a_1f) angehört, so daß in vier Punkten der vier Teilintervalle

$$f(x) - a_2(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, dann muß $f(x)$ die Grenze der Folge

$$a_1(x) < a_2(x) < a_3(x) \dots$$

sein; dieselbe konvergiert aber, weil sie immer wachsend ist, gleichmäßig, laut eines Satzes von Dini (Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali § 99; vergl. Erhard Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen, Math. Ann. Bd. 63, S. 471). Nach Satz 3 läßt sich schließlich die gefundene Folge durch eine Folge von Basisfunktionen ersetzen.

Es leuchtet ein daß alles Vorhergehende ungeändert für einen n -dimensionalen Raum gültig bleibt.