III. Versuch die Absorptions-Verhältnisse des Cordierites für rothes Licht zu bestimmen; von Beer in Bonn.

In der Absicht, für die mit der Polarisations-Richtung veränderlichen Absorptions-Kräfte des Cordierites numerische Verhältnisse zu gewinnen, habe ich eine Reihe photometrischer Bestimmungen an diesem Körper vorgenommen, deren Ergebnisse ich hier mittheile.

Der untersuchte Krystall hat die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds; wir wollen seine Flächen-Paare mit A , B , C bezeichnen. Die Flächen A sind mit den optischen Axen parallel. Die Normale des Paares B , welche hiernach in der Ebene der optischen Axen liegt, bildet mit der ersten Mittellinie (der Hauptaxe der Grundform) einen Winkel, der von 10° wenig verschieden ist. Einen gleichen Winkel schließt die Normale der Seiten C mit der zweiten Mittellinie ein. Das Sphärometer gab mir für die mittleren Dimensionen D_3 , D_1 und D_2 nach den Normalen auf A , B und C bezüglich 1630, 2220 und 2065 Theilstriche des Limbus, woraus sich, da 4845 dieser Striche auf ein Centimeter gehen, ergibt:

$$D_1 = 4^{\text{mm}},58 \dots, \quad D_2 = 4^{\text{mm}},26 \dots, \quad D_3 = 3^{\text{mm}},36 \dots$$

Das Photometer, welches ich mir einrichtete, besteht erstlich aus einer festen, den Körper bildenden Hülse H . Sie schließt einen Kalkspath K von $1^{\text{cm}},5$ Dicke ein, von dessen Spaltungsflächen ein Paar durch Politur eben gemacht worden ist und auf der Axe der Hülse senkrecht steht. In der letzteren steckt eine zweite drehbare Hülse, die einen zweiten mit K gleichbeschaffenen Kalkspath K' trägt. Ein Index, der an H ansitzt, und sich auf einem an H befestigten Theilkreis bewegt, gibt die Drehung der Hülse H' und somit den Winkel zwischen den Hauptschnitten beider Kalkspathe an. An dem äußeren Ende von H befindet sich ferner der Objectiv-Theil, an dem

von H' das Ocular. Jener besteht aus zwei Hülse h_1 und h_2 , die sowohl zumal um die Axe des Instrumentes gedreht werden können, als auch die äußerste h_2 noch eine Drehung in der anderen h_1 , die in H steckt, zulässt. Das Objectiv kann mittelst Marke und Theilung genau von 45° zu 45° in der Hülse H herumgedreht und eingestellt werden. Der Oculartheil setzt sich in ähnlicher Weise aus den Hülse k'_1 und k'_2 zusammen, von welchen jene, die in H' steckt, eine Linse einschließt, diese, die äußerste, ein gefärbtes Glas aufnehmen kann. Den Schluss bildet endlich am Objectiv eine ebene Platte mit axialer kreisförmiger Oeffnung von nahe 2^{mm} Durchmesser, am Ocular eine Platte mit Pupille.

Bei dem Gebrauch des Instrumentes wurde zuvörderst die Lupe auf die Oeffnung des Objectives gerichtet. Von dieser erblickt man alsdann, wenn die Hauptschnitte der Kalkspäthe gegeneinander geneigt sind, vier deutliche Bilder, von den Strahlen herrührend, deren durch zweimalige Doppelbrechung erlittene Modificationen gewöhnlich durch die Symbole oo , oe , eo , ee bezeichnet werden. Die Hülse H' wird hierauf gedreht, bis zwei der Bilder, nämlich oe und eo verschwinden, bis also die optischen Axen der beiden Kalkspäthe parallel laufen. Von der Lage, welche alsdann der Hauptschnitt von K' einnimmt, werden die Azimute nach rechts und nach links hin gerechnet. Mit einer Seitenfläche wird der Krystall vor die Oeffnung des Objectives durch kanadischen Balsam angekittet, die Hülse H' in das Azimut 45° gedreht, und, nachdem dies geschehen, wird die Hülse h_2 des Objectives mit dem darauf sitzenden Krystalle gedreht, bis alle vier Bilder, bei Anwendung von weißem Lichte, genau in derselben Nüance gefärbt erscheinen. Dies Einstellen kann mit großer Genauigkeit ausgeführt werden. Dreht man hierauf den Krystall mittelst der Hülse h_1 nach der einen oder andern Richtung um 45° , so kann man sicher seyn, daß von den Axen des mit der angekitteten Fläche parallelen Schnittes der Elasticitäts-Fläche eine in den Hauptschnitt des Kalk-

spathes K , also in das Azimut 0° fällt, die andere aber im Azimut 90° liegt.

Für eine bestimmte Farbe seyen a_1 und a_2 die Amplituden der Oscillationen, die in dem durch den Krystall gegangenen Lichtbündel parallel mit den Axen der angekitteten Fläche vor sich gehen. Die Amplituden (e) und (o) der beiden Bilder, welche der erste Kalkspath erzeugt, verhalten sich dann wie a_1 und a_2 , so daß wir setzen können $(e) = \lambda a_1$, $(o) = \lambda a_2$. Hiernach hat man, wenn der Hauptschnitt des zweiten Kalkspathes K' im Azimut α liegt, für die Amplituden (eo) und (ee) der beiden von e herrührenden Bilder, sowie für die Amplituden (oo) und (oe) der beiden von o herrührenden Bilder:

$$\begin{aligned}(eo) &= \lambda'(e) \sin \alpha, & (ee) &= \lambda'(e) \cos \alpha, \\ (oo) &= \lambda'(o) \cos \alpha, & (oe) &= \lambda'(o) \sin \alpha,\end{aligned}$$

also auch:

$$\begin{aligned}\frac{(eo)}{(oo)} &= \frac{(e)}{(o)} \tan \alpha = \frac{a_1}{a_2} \tan \alpha, \\ \frac{(ee)}{(oe)} &= \frac{(e)}{(o)} \cotang \alpha = \frac{a_1}{a_2} \cotang \alpha.\end{aligned}$$

Wird der Kalkspath K' nach der einen oder andern Seite hin in ein solches Azimut α , gedreht, daß die Bilder eo und oo gleich hell erscheinen, so ist:

$$\frac{a_2}{a_1} = \tan \alpha_1.$$

Und dreht man um α_2 , bis die Intensität von ee und oe gleich wird, so ist:

$$\frac{a_2}{a_1} = \cotang \alpha_2.$$

In der Tangente und Cotangente der beobachteten Winkel α_1 und α_2 , die sich zu 90° ergänzen müssen, erhalten wir sonach unmittelbar das Verhältniß der Amplituden a_1 und a_2 , welches uns weiter auf die Absorptions-Verhältnisse des Krystalles schließen läßt.

Bei der Bestimmung der Winkel α_1 und α_2 für die Flächen A , B und C des oben erwähnten Cordierit-Krystalles wandte ich rothes Licht an: vor das Schloch des Oculares schaltete ich, sobald der Krystall bei Anwendung

von weißem Lichte eingestellt war, eine Platte von rothem Ueberfangglase ein, die schon sehr homogenes Licht lieferte, dabei aber nicht allzu tief gefärbt war. Ich lasse jetzt die Ergebnisse meiner Messungen folgen.

Die Amplituden der Oscillationen, welche mit der ersten und zweiten Mittellinie und mit der Normalen der optischen Axen parallel sind, seyen, wenn die Amplitude der mit denselben Richtungen parallelen einfallenden Oscillationen der Einheit gleich genommen wird, bezüglich σ_1 , σ_2 und σ_3 . Die Amplituden der Oscillationen, welche auf B oder auf C senkrecht stehen und folglich gegen die erste oder die zweite Mittellinie um 10° geneigt sind, seyen σ'_1 und σ'_2 . Die Fläche A , welche die optischen Axen und ihre Mittellinien enthält, lieferte das Verhältniß $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. Es ist, wie ich bereits in meinem ersten Aufsatz, über Pleochroismus erwähnt habe, kleiner als die Einheit. Ich fand es näher bestimmt durch die Winkel $\alpha_1 = 17^\circ,43$, $\alpha_2 = 72^\circ,7$. Diese sind die Mittel aus den beiden folgenden Beobachtungsreihen.

Fläche A .			
Azimuth α_1 .	Fehler.	Azimuth. α_2 .	Fehler.
17°	+0,43	72°	+0,7
18	-0,57	72,5	+0,2
17	+0,43	71	+1,7
17,3	+0,13	73	-0,3
17,3	+0,13	72,3	+0,4
17,6	-0,17	73,6	-0,9
17,6	-0,17	73	-0,3
17,5	-0,07	73,3	-0,6
17	+0,43	72,5	+0,2
18	-0,57	73,8	-1,1
Mittel 17,43		72,7	

Nehmen wir das Mittel aus allen Beobachtungen, so ergibt sich:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \tan 17^\circ,365.$$

Die Fläche *B* lieferte die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Azimute.

Fläche *B*.

Azimut α_1 .	Fehler.	Azimut α_2 .	Fehler.
19°	+0,25	71° 3	— 1,07
20	— 0,74	69 ,1	+1,13
18,2	+1,05	71	— 0,77
19,5	— 0,25	71 ,3	— 1,07
19,6	— 0,34	70 ,1	+0,13
19,6	— 0,34	71 ,4	— 1,17
19	+0,25	70	+0,23
19,4	— 0,15	69 ,5	+0,73
20	— 0,75	68 ,6	+1,63
18,2	+1,05	70	+0,23
Mittel 19,25		70,23	

Der mittlere Werth 19°,51 des Azimutes α_1 aus allen Beobachtungen giebt also:

$$\frac{\sigma'_2}{\sigma_3} = \tan 19^\circ,51.$$

Für die letzte Fläche endlich fand ich folgende Azimute:

Fläche *C*.

Azimut α_1 .	Fehler.	Azimut α_2 .	Fehler.
36°,5	— 1,39	55° 3	+0,12
35 ,3	— 0,19	53 ,8	+1,62
35 ,4	— 0,29	54 ,3	+1,12
36	— 0,89	54 ,5	+0,92
33	+2,11	54 ,5	+0,92
36	— 0,89	56	— 0,58
34 ,5	+0,61	56 ,5	— 1,08
33 ,8	+1,31	57 ,3	— 1,88
36	— 0,89	56 ,5	— 1,08
34 ,6	+0,51	55 ,5	— 0,08
Mittel 35 ,11		55,42	

Hieraus bestimmt sich der Mittelwerth von α_1 aus allen Messungen zu 34°,847, und somit ist:

$$\frac{\sigma'_3}{\sigma_1} = \tan 34^\circ,847.$$

Die gefundenen Verhältnisse beziehen sich auf verschiedene Dicken des durchstrahlten Krystalles; um eine Ver-

gleichung anstellen zu können, müssen wir sie daher vor Allem auf gleiche Dicke zurückführen. Durch den Versuch ist es bis jetzt noch nicht festgestellt, in welchem Verhältnisse das Licht beim Durchsetzen von immer größeren Dicken ein und desselben Mittels durch Absorption geschwächt werde. Am natürlichsten scheint es jedoch anzunehmen, daß ein Lichtstrahl, indem er durch eine neue Schicht des Mittels von constanter Dicke geht, jedesmal einen und denselben Theil seiner Intensität einbüßt. Ist J die Intensität des auffallenden Lichtes, J' seine Intensität, nachdem es eine Schicht von der Dicke 1 durchstrahlt hat, so wird dieser Annahme zufolge seine Intensität J'' , nachdem es durch die Dicke D gegangen ist, durch folgende Gleichung abgeleitet:

$$J'' = \left(\frac{J'}{J}\right)^D \cdot J.$$

Es stimmt dieses Gesetz mit demjenigen überein, welches Cauchy für die Abnahme der Oscillations-Amplitude mit zunehmender Entfernung von der ursprünglichen Wellenebene statuirt. Bezeichnet man diese Entfernung, also die durchstrahlte Dicke, mit D , so ist nach Cauchy die Amplitude dargestellt durch den Ausdruck

$$a \cdot e^{-cD},$$

wo a die ursprüngliche Amplitude, e die Basis der natürlichen Logarithmen und c eine, von der Natur des Mittels abhängige positive Constante bedeutet. Es ist der letzten Formel gemäß:

$$J'' = a^2 \cdot e^{-2cD} = (e^{-2c})^D \cdot J.$$

Jene beiden Annahmen sind also identisch, und es wird das Verhältniß der geschwächten Intensität zu der ursprünglichen, wie auch das Verhältniß der geschwächten Amplitude zur ursprünglichen durch eine Potenz dargestellt, deren Dignand in einem und demselben isotropen Mittel oder für ein und dieselbe Oscillations-Richtung in einem heterotropen Mittel constant ist, und deren Exponent die durchstrahlte Dicke ist.

Für Oscillationen rothen Lichtes, die mit der ersten Mittellinie des Cordierites parallel sind, sey nun bei einer Dicke von 1^{mm} s_1 das Verhältniß der geschwächten Amplitude zur ursprünglichen; s_2 bedeute dasselbe für Oscillationen, die mit der zweiten Mittellinie parallel sind u. s. f. $\frac{s_2}{s_1}$ ist alsdann das, was aus dem Verhältniß $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ bei einer Dicke von 1^{mm} wird u. s. f. Man hat also:

$$\log \frac{s_2}{s_1} = \frac{\log \frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{D_3}, \quad \log \frac{s'_2}{s_3} = \frac{\log \frac{\sigma'_2}{\sigma_3}}{D_1}, \quad \log \frac{s_3}{s'_1} = \frac{\log \frac{\sigma_3}{\sigma'_1}}{D_2}.$$

Diese Formeln liefern nun:

$$\frac{s_2}{s_1} = 0,707 \dots, \quad \frac{s'_2}{s_3} = 0,797 \dots, \quad \frac{s_3}{s'_1} = 0,918 \dots$$

Um aus den Verhältnissen $\frac{s'_2}{s_3}$ und $\frac{s_3}{s'_1}$ angenäherte Werthe für $\frac{s_2}{s_3}$ und $\frac{s_3}{s_1}$ abzuleiten, denken wir uns eine Ellipse construirt, deren Axen s_1 und s_2 sind. Ziehen wir in dieser zwei Radien, die mit den Axen Winkel von 10° einschließen, so können wir ohne merklichen Fehler die Längen jener Radien als Maafs für s'_1 und s'_2 betrachten. Es ist also;

$$s'^2_1 = \frac{s_1^2}{\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 \sin^2 v + \cos^2 v}, \quad s'^2_2 = \frac{s_2^2}{\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 \sin^2 v + \cos^2 v},$$

wenn $v = 10^\circ$.

Hieraus und aus den beobachteten Werthen von $\frac{s'_2}{s_3}$ und $\frac{s_3}{s'_1}$ ergibt sich:

$$\frac{s_2}{s_3} = 0,791 \dots, \quad \frac{s_3}{s_1} = 0,905$$

Aus je zwei der Verhältnisse $\frac{s_2}{s_1}$ etc. berechnet sich das dritte, und die so berechneten Werthe müßten mit den beobachteten zusammenfallen. Führen wir diese Rechnung aus, so finden wir:

$$\frac{s_2}{s_1} = 0,716 \dots, \frac{s_2}{s_3} = 0,782 \dots, \frac{s_3}{s_1} = 0,894 \dots,$$

und von diesen weichen die beobachteten ab um:

$$+ 0,008, - 0,009, - 0,011.$$

Dem so eben erwähnten Postulat und gleichzeitig den Beobachtungen genügen befriedigend die folgenden Verhältnisse:

$$\frac{s_2}{s_1} = 0,710 \dots, \frac{s_2}{s_3} = 0,788 \dots, \frac{s_3}{s_1} = 0,902 \dots$$

Sie lassen die Fehler:

$$+ 0,003, - 0,003, - 0,003.$$

Die Controle der drei Beobachtungen unter einander läßt uns vermuthen, daß sich das folgende Resultat unserer Untersuchung nicht bedeutend von der Wirklichkeit entferne.

»Wird die Amplitude eines roth gefärbten Lichtbündels, dessen Oscillationen mit der ersten Mittellinie des oben erwähnten Cordierit-Krystalles parallel sind, nachdem es ein Millimeter in diesem Mittel zurückgelegt hat, durch 1000 bezeichnet, so ist die Amplitude eines eben solchen Bündels, dessen Oscillations-Richtung aber auf den optischen Axen senkrecht steht, 902, und die Amplitude eines Bündels, dessen Schwingungen parallel der zweiten Mittellinie vor sich gehen, wird durch die Zahl 710 ausgedrückt. Die Intensitäten der drei Bündel verhalten sich wie 1000:814:504.« Hiermit stimmt meine früher mitgetheilte Schätzung überein, daß die Differenz der Intensitäten O_1 und O_3 geringer als der Unterschied zwischen O_2 und O_3 sey.