**9. Zur Theorie der relativen Bewegung,
mit Bezug auf die Bemerkungen der Herren
M. P. Rudzki und L. Tesař;
von A. Denizot.**

§ 1. Die von den Herren Rudzki¹⁾ und Tesař²⁾ vorgebrachten Einwände gegen meine Arbeit³⁾ liefern zu der mit den beiden Herren bereits an anderer Stelle erfolgten Auseinandersetzung nichts Neues. Hrn. Rs. neue Angriffe beruhen auf einer merkwürdigen Anschauung von der Schwerkraft und Hr. T. baut seine Kritik auf der Auffindung von *Bewegungsgleichungen* eines sich *nicht bewegenden* Punktes auf.

Der Ausgangspunkt der Betrachtung von Hrn. T., welche die von mir begangenen „schwerwiegendsten Trugschlüsse“ nachweisen soll, ist das Beispiel der relativen Bewegung eines Massenpunktes längs einer, um eine feste z -Achse sich drehenden Kurve. Aus den hierfür aufgestellten Bewegungsgleichungen (3), auf deren Auffassung durch Hrn. T. ich weiter unten noch etwas spezieller eingehe, werden besondere Bewegungsgleichungen (3a), wie folgt, entwickelt:

„Die ganze von mir gegebene Ableitung (Gleichung (1) bis (5))⁴⁾ bleibt in naturgemäßer Geltung, wenn der Punkt bezüglich des beweglichen Systems ruht. Alsdann nehmen die Gleichungen (3) die Gestalt an:

$$(3a) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = X + n^2x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = Y + n^2y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = Z. \end{cases}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den für ein festes Koordinatensystem (mit der Achse Oz) gültigen nur dadurch, daß zu den äußeren Kräften noch die Zusatzkräfte n^2x nach der x -Achse und n^2y nach der y -Achse hinzukommen.“

Diese Gleichungen (3a) beziehen sich hiernach nicht auf

1) M. P. Rudzki, Ann. d. Phys. (4.) 18. p. 1070. 1905.

2) L. Tesař, Ann. d. Phys. 19. p. 613. 1906.

3) A. Denizot, Ann. d. Phys. (4.) 18. p. 299. 1905.

4) D. s. Gleichungen für relative Bewegung.

die absolute Bewegung des Punktes, bezogen auf ein festes Koordinatensystem $O(x, y, z)$, sondern diese „Bewegungsgleichungen“ gelten für ein bewegliches Koordinatensystem $O(x, y, z)$, in bezug auf welches der Punkt nach Voraussetzung ruhen soll!

Wir besitzen demnach Bewegungsgleichungen eines sich nicht bewegendem Körpers! Diese Erfindung des Hrn. T. bildet die Grundlage seines auf 20 Seiten erbrachten Nachweises der von mir begangenen „schwerwiegendsten Trugschlüsse“. —

§ 2. Damit könnte man eigentlich die Diskussion mit Hrn. T. für erledigt halten; indes will ich zur Erläuterung der in meiner Arbeit vorkommenden Gleichungen für relative Bewegung im folgenden einige Beispiele betrachten, welche über die von Hrn. T. so sonderbar aufgefaßten Glieder $(n^2 x, n^2 y)$ Aufschluß geben.

Wir denken uns einen im Raume in absoluter Ruhe schwebenden Körper. Für den, mit einem sich um die etwa vertikale z -Achse drehenden Koordinatensystem fest verbundenen Beobachter wird der im Raume *absolut ruhende* Körper eine scheinbare Drehung ausführen, und zwar im entgegengesetzten Sinne der absoluten Drehung des Koordinatensystems. — Wir können diesen Fall noch folgendermaßen formulieren: Statt der von Hrn. T. in seinem Beispiel gewählten Kurve denken wir uns die als reibungslos vorausgesetzte (xy) -Ebene um die z -Achse sich drehend. Zu irgend einer Zeit o befinde sich auf der glatten Ebene eine schwere Kugel; diese, zur Zeit o in absoluter Ruhe vorausgesetzt, wird bei der fortgesetzten Drehung der glatten Ebene in absoluter Ruhe bleiben. Für einen mit der Ebene sich drehenden Beobachter wird aber die Kugel mit der Winkelgeschwindigkeit n der Ebene, aber im entgegengesetzten Sinne ihrer absoluten Drehung sich drehen und die scheinbare Rotationsenergie $\frac{1}{2} J n^2$ erzeugen, wenn J das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf die z -Achse ist. Erteilen wir der Kugel zur Zeit o längs der Ebene noch eine Geschwindigkeit in (absolut) gerader Richtung, so wird die absolute Bewegung der Kugel in einer Geraden verlaufen; gegenüber dem Beobachter wird aber die Kugel bei ihrer Bewegung auf der glatten Ebene noch eine um die z -Achse drehende Bewegung ausführen, und zwar wiederum im entgegengesetzten Sinne der absoluten Drehung des Beobachters.

Auf eine solche relative (scheinbare) Drehung ist die in den allgemeinen Bewegungsgleichungen auftretende fingierte, von mir als *die instantane Zentrifugalkraft* bezeichnete Zusatzkraft zurückzuführen und nicht auf eine absolute (wirkliche) Drehung, zu welcher Ansicht Hr. T. auf Grund seiner merkwürdigen Bewegungsgleichungen für einen sich nicht bewegenden Punkt gelangt.

Bei einem Körper, dessen Bewegungsfreiheit durch den Zwang beschränkt ist, sich auf einer Kurve zu bewegen, bleibt in den Bewegungsgleichungen selbstverständlich diese scheinbare Drehung erhalten und tritt *formell* als die, durch die absolute Rotation der Kurve erzeugte Zentrifugalkraft auf. Wegen der Beschränkung der relativen Bewegungsfreiheit des Punktes ist es aber auch ganz verfehlt, dieses Beispiel zur Erklärung einer sichtbaren scheinbaren Drehung eines sich bewegenden Körpers zu wählen. Beim Foucaultschen Pendel bewegt sich auch der Körper nicht auf einer mit der Erde fest verbundenen Kurve, sondern auf einer glatten Kugelfläche, wodurch auch die Möglichkeit gegeben ist, die scheinbare Drehung des Körpers zu sehen.

Im übrigen möchte ich noch zu dem von Hrn. T. nicht richtig verstandenen Beispiel bemerken, daß die Coriolissche Kraft in diesem Falle auf die relative Bahn des Punktes doch gar keinen Einfluß ausüben kann; sie beeinflusst nur die normale Reaktion der Kurve. Wenn daher Hr. T. in § 6 auf Grund dieses Beispiels die Wichtigkeit der Coriolisschen Kraft für die relative Bahn beim Foucaultschen Pendelversuch hervorhebt, so steht dies im Widerspruch mit seinen eigenen Voraussetzungen.

In meiner Abhandlung habe ich die instantane Zentrifugalkraft in Zusammenhang mit dem ersten Teil des Clairaut-Coriolisschen Theorems gebracht, indem ich die scheinbare Drehung im entgegengesetzten Sinne der absoluten Drehung des Koordinatensystems als eine Folge dieses Theorems dargestellt habe. Hr. T. zitiert aus meiner Abhandlung zwar verschiedenes, was sich hierauf bezieht, nur nicht den Passus, wo ich ausdrücklich sage, daß der Sinn der scheinbaren Drehung des Massenpunktes eine Folge der *Definition* der Coriolisschen „force d'entraînement“ ist. Wenn Hr. T. daher „gezwungen ist, diese Schlußweise als die Vorwegnahme von Erfahrungstatsachen (nämlich die scheinbare Drehung der Schwingungsebene beim Pendel) zu bezeichnen, deren mathe-

matische Begründung später erfolgen soll“, so liegt es daran, daß er den Inhalt des Coriolisschen Theorems nicht erfaßt hat.

§ 3. Nachdem Hr. T. die Bewegungsgleichungen für einen sich nicht bewegendenden Punkt aufgestellt hat, nimmt er sich im weiteren Verlauf der aus einer solchen Auffindung gezogenen Konsequenzen auch Hrn. Rudzkis Erfindung *eines nicht schwingenden* Pendels an. Die „fehlerhaften“ Gleichungen scheint er auch auf denselben Umstand zurückführen zu wollen wie Hr. R., nämlich auf den „nicht passenden“ Ausdruck für die Schwerkraft.

In meinen Arbeiten erscheint die Schwerkraft in folgendem Zusammenhange: Sowohl die absolute als auch die relative Bewegung des Körpers an der Erdoberfläche geschieht unter dem Einfluß der Erdattraktion; durch die Koordinatentransformation treten zu dieser von außen „wirklich“ wirkenden Kraft noch gewisse „fingierte“ Kräfte hinzu. Von diesen hat nun eine (nämlich *die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft*) einen konstanten Wert und ist, abgesehen vom Vorzeichen, numerisch gleich der Zentrifugalkraft, die durch die Rotation der Erde des mit ihr *fest* verbundenen Koordinatenanfangs erzeugt wird. Die Summe der Erdattraktion und der erwähnten konstanten fingierten Kraft wird von mir als die an dem betreffenden Ort herrschende „Schwere“ bezeichnet. Diese kann auch als die Bewegungsursache des Körpers angesehen werden, die durch die Erdattraktion und die Geschwindigkeit bestimmt ist, welche der Körper infolge der Erdrotation im Anfang seiner Bewegung mitnimmt, wenn er vorher mit der Erde starr verbunden gedacht wird. Für die Komponenten dieser wirklichen Bewegungsursache habe ich der Einfachheit halber o, o, g gesetzt.

Hierin erblickt Hr. R. den von mir fortwährend begangenen Fehler. Er gibt jedoch zu, daß die letzte Festsetzung über die Schwere für den Koordinatenanfang „streng richtig ist“! Wenn wir aber zu einem ganz beliebigen Punkt x, y, z übergehen, dann — meint Hr. R. — erfahre die erwähnte Zentrifugalkraft einen Zuwachs um die fingierte instantane Zentrifugalkraft (X_f, Y_f, Z_f) , der zur Schwerkraft hinzugefügt werden müsse, während ich mir „einbilde“, „daß die Kräfte X_f etc. . . nicht zur Schwerkraft gehören“. —

Hierauf ist folgendes zu erwidern: Die Kräfte X_f, Y_f, Z_f können nur dann als eine Vermehrung der durch die Rotation

der Erde um ihre Achse erzeugten Zentrifugalkraft angesehen werden, wenn der Punkt x, y, z *fest* mit der Erde verbunden ist und somit an der Rotation der Erde teilnehmen kann. Bei einem von der Erde *isolierten* Punkt kann aber, da doch die Erde einen solchen Punkt nicht mitnehmen kann, von einer durch die Drehung der Erde erzeugten Zentrifugalkraft überhaupt nicht die Rede sein. Die mit X_f, Y_f, Z_f bezeichneten Glieder haben eine selbständige, mit der Schwere überhaupt nicht zusammenhängende Bedeutung und dürfen daher auch nicht zur Schwere hinzugefügt werden.

§ 4. Um aber zu zeigen, zu welchen Konsequenzen die Ansicht des Hrn. R. über die Schwerkraft führt, sei hier in Kürze folgende Betrachtung eingeschaltet: Indem die Schwerkraft eines von der Erde *isolierten* Punktes nach Hrn. R. die Differenz aus der Newtonschen Gravitation A und einer „Zentrifugalkraft“ (gleich der Entfernung R des Punktes von der Erdachse mal dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit w der Erde) ist, erhält man hiernach für einen isolierten Punkt in der Nähe der Erdoberfläche am Äquator:

$$g_o = A - R w^2$$

und in der Höhe h über der Erdoberfläche:

$$g_h = A_h - (R + h) w^2.$$

Da nun

$$\frac{A_h}{A} = \frac{R^2}{(R + h)^2}$$

ist, so erhält man aus den drei Gleichungen die Beziehung:

$$g_h = (g_o + R w^2) \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} - \left(1 + \frac{h}{R}\right) R w^2.$$

Auf Grund dieser nach der Anschauung von Hrn. R. durchgeführten Betrachtung erhalten wir u. a. die astronomische Neuheit, daß bereits in der Entfernung von etwa 4800 Meilen von der Erdoberfläche (am Äquator) die Schwerkraft verschwindet; nur merkwürdig ist es, daß der sich außerhalb dieser Entfernung bewegendende Mond dieses noch „nicht eingesehen“ hat und trotz der „neuen Abhandlung“ von Hrn. R. „leider wieder in den *alten* Fehler verfallen ist“, sich ohne Rücksicht auf die Kräfte X_f, Y_f, Z_f um die Erde weiter zu drehen.

§ 5. Ganz allgemein möchte ich zu dem Kapitel der

Schwerkraft noch folgendes sagen: Wie der theoretische Ausdruck für die Schwerkraft in Wirklichkeit aussieht, ist für das von mir behandelte Problem ganz gleichgültig; denn in dem von mir betrachteten Fall ist die Erscheinung ganz und gar von der Schwerkraft unabhängig; aus demselben Grunde ist es belanglos, ob man bei der Betrachtung die Erde als eine Kugel oder als ein Ellipsoid voraussetzt. Ich habe für die Komponenten der in meiner Arbeit vorkommenden „Schwere“ einfach o, o, g gesetzt; von dieser Annahme bleiben aber die Kräfte X_f, Y_f, Z_f ganz unberührt, da sie eben zur Schwerkraft nicht gehören. Wenn daher Hr. R. meint, daß die Komponenten der „Schwere“ $X - w^2 h \sin \varphi, Y$ nicht „vernachlässigt werden können, wenn die X_f etc. . . beibehalten werden“, so vergleicht er zwei ganz verschiedene, miteinander gar nicht zusammenhängende Größen.

Aus den Darlegungen von Hrn. R. muß man schließen, daß Hr. de Sparre¹⁾, dessen Arbeit er zitiert, die scheinbare instantane Zentrifugalkraft zur Schwere hinzufügt. Daß dieses nicht zutrifft, davon kann sich jeder überzeugen, der auch nur einen flüchtigen Blick in die Arbeit hineinwirft.

§ 6. Wie bereits eingangs erwähnt, bildet die vorliegende Diskussion eine Fortsetzung früherer polemischen Erörterungen mit den beiden Herren. In ihren letzten Bemerkungen versuchen sie nicht etwa meine gegen ihre frühere Schlußweise erhobenen Einwände zu beseitigen, sondern bringen nur neue Argumente vor, die zu einem Absurdum führen und somit überflüssig sind. Hrn. T. konnte „bislang“ keiner der von mir vorgebrachten Einwände von seiner „Ansicht auch nur einen Schritt weit verdrängen“. Hr. R., nachdem er mich angegriffen, mir „verschiedene andere Mißverständnisse“ vorgeworfen hat, erklärt, auf meine „eventuelle Antwort nicht weiter reagieren zu wollen“.

Es liegt mir fern, die beiden Herren ihrer Ideen berauben zu wollen; — der Zweck der vorliegenden Erörterung ist nur, ein wenig zur Klärung des behandelten Problems beizutragen.

Charlottenburg, Februar 1906.

1) M. de Sparre, Bull. de la Soc. math. de France 33. p. 65. 1905.

(Eingegangen 6. Februar 1906.)