Die Schraubenbewegung, das Nullsystem und der lineare Complex.

Von C. Küpper in Prag.

Die nachstehende Entwicklung dürfte sich besonders für den Vortrag an technischen Hochschulen empfehlen; ihre Grundzüge habe ich in einer Abhandlung über die Ortsveränderung starrer Systeme im 6. Bande der „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ von Schlömilch mitgeteilt.

1. Eine Schraubenbewegung ist gegeben durch ihre Achse C , die Translation $d\sigma$ in der Richtung von C , und die Rotation $d\tau$ um C . Von einem beliebigen Punkte a des Raumes sei auf C die Senkrechte $ac = x$ gefällt; a beschreibt eine Schraubenlinie in bestimmtem Sinne, deren Tangente A in a mit C einen Winkel φ bildet, so dass:

$$x = \frac{d\sigma}{d\tau} \cdot \text{tang } \varphi.$$

Die von Null verschiedene Constante $\frac{d\sigma}{d\tau} = k$ heißt Parameter der Bewegung. A ist senkrecht auf ca , und heißt Translationsstrahl des Punktes a .

Betrachtet man die Translationsstrahlen aller Punkte von ca , so sieht man, dass sie eine Regelschar des gleichseitigen Paraboloids T_0 bilden, welches zu Scheitelgeraden C , ac hat, und k zum Distributionsparameter. T_0 ist die Translationsfläche der Geraden ac .

Wird a mit einem Translationsstrahl A der endlichen Schraubenbewegung unterworfen, so bleibt der deplacierte Strahl A Translationsstrahl für den deplacierten Punkt a .

Wir legen nun durch a eine Ebene E senkrecht zu A , und nennen sie die Nullebene von a , dem wir die Bezeichnung e geben. Auf diese Weise ist also jedem Punkte e des Raumes eine durch ihn gehende Ebene E zugewiesen, welche die Senkrechte ec enthält, die von e auf C möglich ist. Umgekehrt ist eine beliebige Ebene E , welche C schneidet, etwa in c , Nullebene eines einzigen ihrer Punkte e ; denn in E gibt es eine durch c gehende, auf C senkrechte Gerade ca ; auf dieser müsste

nach dem eben Gesagten sich e befinden. Denkt man die Translationsfläche T_0 , welche zu ca gehört, so kommt unter ihren auf ca senkrechten Geraden eine und nur eine vor, welche auch auf E senkrecht steht, sie trifft E alsdann in dem Punkte e , für welchen E Nullebene ist, oder in ihrem Nullpunkte. Unterliegt E mit e der Schraubenbewegung, so bleibt stets der deplacierte Punkt e Nullpunkt der deplacierten Ebene E . Das Nullsystem besteht aus den Punkten des Raumes und ihren Nullebenen.

Es ist offenbar bestimmt, wenn die Schraubenachse C bekannt ist, und die Translation irgend eines Punktes a . Wäre nur der Translationsstrahl von a gegeben, so ist zwar die Schraubenlinie bekannt, welche a beschreibt, der Sinn aber, in welchem sie von a durchlaufen wird, noch zweideutig. Welchen man nehmen will, ist für die Bestimmung des Nullsystems gleichgiltig.

2. Conjugierte Gerade G , G' im Nullsystem.

Die auf C senkrechten Ebenen werden von C in ihren Nullpunkten geschnitten. Irgend eine solche wählen wir als

horizontale Projectionsebene, und stellen die Aufgabe: Für alle durch eine gegen C windschiefe Gerade G gehenden Ebenen E die Nullpunkte e zu finden! $e_0 c_0$ sei die kürzeste Transversale von G , C , und durch diese sei die Horizontalebene gelegt, während die Verticalebene senkrecht auf $e_0 c_0$ ist; G' sei horizontale, G'' verticale Projection von G . E_0 ist die Ebene, welche $e_0 c_0$ zur Horizontaltrace hat, und unter dem Winkel w_0 gegen die Horizontalebene geneigt ist. Ihr Nullpunkt e_0 muss auf $e_0 c_0$ liegen und kann hier beliebig

angenommen werden, worauf alsdann das Nullsystem dadurch bestimmt sein wird, dass die Translation von e_0 senkrecht zu E_0 ist. Durch G werde E gelegt, ihre Trace sei E' , w der Winkel, den sie mit der Horizontalebene bildet; ihr Nullpunkt e be-

findet sich auf einer C rechtwinklig schneidenden Geraden, deren horizontale Projection somit durch c_0 geht und parallel E' sein muss. Der Punkt e , wo diese Gerade G trifft, liefert sofort ihre Verticalprojection $e''c''$. Es handelt sich nur noch um die Lage der Horizontalprojection e' des fraglichen Nullpunktes e . Nun zeigt sich, dass e' in die Gerade $\mathfrak{G}'$ fällt, welche durch c_0 parallel G' gezogen wird. Bezeichnet x die unbekannte Länge c_0e' , x_0 die bekannte $c_0e'_0$, so müsste demnach:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{\tan w}{\tan w_0}.$$

Offenbar erfüllt c_0e' diese Bedingung, wenn e' auf G' gedacht wird, wie man erkennt, wenn man w mittelst des Perpendikels es ermittelt, das von e auf E' gefällt wird.

Dass jetzt der Ort von e eine Gerade $\mathfrak{G}$ ist, erhellt leicht, wenn man beachtet, dass ec ein gleichseitiges Paraboloid beschreibt, wenn e variabel auf G vorausgesetzt wird: Dieses Paraboloid hat mit der in $\mathfrak{G}'$ errichteten verticalen Ebene eine zur nämlichen Schar wie C, G gehörende Gerade $\mathfrak{G}$ gemein, und diese ist der gesuchte Ort. Heißt w_0 der Neigungswinkel der $\mathfrak{G}$ zur Horizontalebene, so sieht man, dass

$$\frac{\tan w_0}{\tan w_0} = \frac{c''e''}{c'e'} = \frac{x_0}{x}.$$

Und hieraus folgt: Die Ebene $\mathfrak{E}_0$, die durch $\mathfrak{G}$ und c_0e_0 geht, hat in e_0 ihren Nullpunkt. Legt man daher der eben durchgeführten Betrachtung statt der Geraden G die aufgefundenene $\mathfrak{G}$ zugrunde, so muss sich als Ort für die Nullpunkte e der durch $\mathfrak{G}$ möglichen Ebenen $\mathfrak{E}$ die G ergeben, von der wir ausgegangen sind. $G, \mathfrak{G}$ heißen conjugierte Gerade, weil jede Achse eines Büschels von Ebenen ist, die ihre Nullpunkte in der anderen haben.

Hier ist aber der besondere Fall zu beachten, dass $\angle w_0 = 0$, weil dann das zum Beweise dienende Paraboloid nicht mehr existiert. Auch hat jetzt E_0 als Horizontalebene in c_0 ihren Nullpunkt, so dass das Nullsystem erst dann bestimmt ist, wenn man einer zweiten durch G gehenden Ebene E_1 ihren Nullpunkt e_1 zuweist.

Trifft E_1 die Achse C in c_1 , und ist c_1e_1 parallel G , so muss der Nullpunkt von E_1 irgendwo auf der Geraden c_1e_1 liegen, ist auch willkürlich, sobald das Nullsystem nicht schon als gegebenes vorliegt. Wenn E eine dritte Ebene durch G be-

Fig. 2.

zeichnet, e ihren Nullpunkt, w ihren Neigungswinkel gegen den Horizont, so hat man:

$$\frac{\tan w}{\tan w_1} = \frac{c e}{c_1 e_1}.$$

Demnach folgt $\frac{c e}{c_1 e_1} = \frac{c_0 c}{c_0 c_1}$; d. h. der Ort von e ist eine durch c_0 gehende, auf $c_0 e_0$ senkrechte Gerade. §. Für dieselbe ist $\tan w_0 = \frac{c_0 c}{c e}$, und weil $\tan w = \frac{c_0 c}{c_0 c_0}$, so hat man $\frac{\tan w}{\tan w_0} = \frac{c_1 e_1}{c e}$.

Man ersieht hieraus, dass e_0 Nullpunkt der Ebene $\mathfrak{E}_0$ ist, welche $\mathfrak{G}$, c_0 , e_0 enthält. Ist endlich $\mathfrak{E}$ beliebig durch $\mathfrak{G}$ gelegt, w ihr Winkel mit der Horizontalebene, so wird wie oben: $\frac{\tan w}{\tan w_0} = \frac{c_0 e}{c_1 e_1}$, wenn e den Schnittpunkt von G , $\mathfrak{E}$ bedeutet. Aber e_0 ist Nullpunkt von $\mathfrak{E}_0$, mithin e derjenige von $\mathfrak{E}$.

3. Aus der vorhergehenden Erörterung ergeben sich unmittelbar diese Folgerungen:

a) Zwei Conjugierte G , $\mathfrak{G}$ sind windschief.

b) Wenn der Winkel G , C von $\frac{\pi}{2}$ verschieden ist, so gilt Gleiches vom $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{G}$, C , und es bestimmen G , $\mathfrak{G}$, C ein gleichseitiges Paraboloid, das zu Scheitelgeraden hat C , und die kürzeste Transversale $e_0 e_0$ von G , $\mathfrak{G}$.

c) Wenn hingegen $\mathfrak{A}$ G , $C = \frac{\pi}{2}$, so scheiden sich $\mathfrak{G}$, C , und umgekehrt, wenn G die Achse C trifft, muss $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{G}$ $C = \frac{\pi}{2}$.

d) Wäre $\mathfrak{A}$ G , $\mathfrak{G} = \frac{\pi}{2}$, so müssten G , $\mathfrak{G}$ die Translationsstrahlen der Punkte e_0 , e_0 sein, da die durch $\mathfrak{G}$ gehende Nullebene von e_0 senkrecht auf G wäre. Und umgekehrt, wenn G der Translationsstrahl von e_0 ist, muss $\mathfrak{G}$ rechtwinklig zu G sein, weil $\mathfrak{G}$ in der Nullebene von e_0 liegt. Die Translationsstrahlen sind folglich gepaart als rechtwinklige conjugierte Geraden.

e) Ist G parallel C , so sind die Translationsstrahlen der Punkte von G parallel, mithin auch deren Nullebenen; $\mathfrak{G}$ fällt ins Unendliche. Auch leuchtet ein, dass die Nullpunkte paralleler Ebenen sich auf einer zu C parallelen Geraden befinden. Wenn somit zwei Punkte parallele Translationen haben, so muss ihre Verbindungslinie C parallel sein.

f) E sei eine beliebige C schneidende Ebene, so dass ihr Nullpunkt e im Endlichen liegt. Irgendeine in E gedachte, aber nicht durch e gehende Gerade G hat eine durch e gehende, nicht in E fallende Conjugierte G . Folglich werden die Nullebenen aller Punkte von E durch e gehen, und alle durch e möglichen Ebenen ihre Nullpunkte in E haben.

Wenn jetzt G durch e gezogen wird, so müssen die Nullebenen ihrer Punkte sämtlich G enthalten, oder G fällt mit ihrer Conjugierten zusammen. Der in E vorkommende Strahlenbüschel (e) besteht aus solchen sich selbst conjugierten Geraden, den sogenannten Complexstrahlen, und irgend ein Punkt des Raumes wird Centrum eines solchen Strahlenbüschels sein.

g) Wenn E parallel C ist, so ziehe man in E eine G rechtwinklig zu C , und denke ihre Conjugierte $\mathfrak{G}$. Jeder Punkt e auf G hat eine durch $\mathfrak{G}$ gehende Nullebene $\mathfrak{E}$. Zieht man daher durch e eine Parallele zu C , die in E fallen wird, so muss jeder Punkt derselben eine zu $\mathfrak{G}$ parallele Nullebene besitzen. Also wird eine willkürliche Gerade der Ebene E eine zu $\mathfrak{G}$ parallele Conjugierte haben, die mithin auch mit E parallel läuft. Kurz, der Nullpunkt von E ist in unendlicher Ferne in der durch $\mathfrak{G}$ angegebenen Richtung zu denken, oder die in E befindlichen Complexstrahlen haben sämtlich diese Richtung.

4. Die Translationsflächen für die Geraden G des Raumes.

a) G sei parallel C ; die parallelen Translationen der Punkte von G erfüllen eine Ebene.

b) G sei Translationsstrahl des Punktes e_0 ; alsdann ist ihre Conjugierte $\mathfrak{G}$ ebenfalls Translationsstrahl für den Punkt e_0 , und die Ebene e_0 G wird Translationsfläche von G sein. Da die Translation eines auf G angenommenen Punktes e senkrecht auf der Ebene steht, die $\mathfrak{G}$ mit e verbindet, so umhüllen die in der Ebene e_0 G vorkommenden Translationsstrahlen eine Parabel, deren Brennpunkt e_0 ist. Soll überhaupt in einer Ebene E mit dem Nullpunkte e eine Translation sein, etwa des Punktes e , so muss die Nullebene von e offenbar den Translationsstrahl von e aufnehmen.

c) G sei weder parallel C , noch Translations- noch Complexstrahl, $\mathfrak{G}$ ihre Conjugierte.

Der Winkel $G, \mathfrak{G}$ ist weder 0, noch $= \frac{\pi}{2}$. Nach einem bekannten Satze sind die Translationsstrahlen der auf G befindlichen Punkte e , da sie senkrecht zu den Ebenen $\mathfrak{E}_e$ stehen, die Geraden eines gemeinen — nicht gleichseitigen — Paraboloids, dessen Scheitelgeraden sind G , und der Translationsstrahl ihres der Achse C am nächsten liegenden Punktes e_0 . Diese beiden Geraden können deshalb keinen rechten Winkel bilden, weil sonst $G, \mathfrak{G}$ parallel sein müssten.

d) G sei Complexstrahl; ihre Translationsfläche ist stets ein gleichseitiges Paraboloid. Denn fällt man von jedem Punkte e das Perpendikel ec auf C , so wird Gc die Nullebene

zeugt ihre Schnittlinie A einen Kegel zweiten Grades mit den Kanten A_1, C_1 .

Endlich denke man noch durch a die Gerade $\mathfrak{C} \parallel C$, so werden in ihr sich die Ebenen $C\mathfrak{C}, C_1\mathfrak{C}$ rechtwinklig schneiden, folglich bleibt $\mathfrak{C}$ auf einem Rotationscylinder mit den Kanten CC_1 . Cylinder und Kegel durchdringen sich in einer Raumcurve 3. Ordnung, dem Orte von a . Man gewahrt auch sofort, dass diese Raumcurve sich auf dem zum Complexstrahl $a_1 c_1$ gehörigen Translationsparaboloid befindet.

6. Die fundamentalen Bestimmungsweisen des Nullsystems (oder des linearen Complexes).

Als erste Bestimmungsart dient die von uns gebrauchte, bei welcher die Achse C gegeben ist, ferner ein Punkt a mit seinem Translationsstrahle A .

Zweitens. Gegeben sind zwei conjugierte Gerade $G, \mathfrak{G}$, und von irgend einem Punkte a_1 ihrer kürzesten Transversale $e_0 e_0$ der Translationsstrahl A_1 . Nämlich hiernach sind von den drei Punkten e_0, e_0, a_1 die Translationsstrahlen bekannt; durch sie bestimmt sich ein gleichzeitiges Paraboloid, dessen eine Scheitelgerade in $e_0 e_0$ vorliegt, die zweite muss alsdann die Achse C werden. Wenn umgekehrt dies vorausgesetzt wird, so ist der Complex festgelegt durch a_1, A_1 allein.

Drittens. Als Bestimmungsstücke können genommen werden zwei Conjugierte $G, \mathfrak{G}$, und von irgend einem Punkte a des Raumes der Translationsstrahl A , vorausgesetzt, dass A auf der Transversalen t senkrecht steht, die aus a über $G, \mathfrak{G}$ möglich ist.

Dass die zugefügte Bedingung erfüllt werden muss, folgt daraus, dass die in Rede stehende Transversale $\mathfrak{G}$ im Nullpunkte der Ebene $G a$ trifft, also Complexstrahl wird. Nunmehr kommt die Annahme von a, A auf dasselbe hinaus, als wenn man einer beliebigen Ebene E einen Nullpunkt zuwiese, der irgendwo — hier in a — auf der in E enthaltenen Transversalen t von $G, \mathfrak{G}$ sich findet. Wenn dann E die kürzeste Transversale von $G, \mathfrak{G}$ in a_1 schneidet, so würde a_1 Nullpunkt der Ebene E_1 sein, welche diese kürzeste Transversale mit a verbindet. Bestimmt man deshalb (nach 2) den Complex derart, dass die Translation von a_1 senkrecht zu E_1 ist, so bekommt E den Nullpunkt a , weil a als Schnittpunkt zweier in E befindlichen Complexstrahlen $a_1 a, t$ auftritt.

Viertens. Gegeben $G, \mathfrak{G}$ als Conjugierte, und ein Complexstrahl l , der $G, \mathfrak{G}$ nicht schneidet: Eine beliebig durch l gedachte Ebene E enthält eine Transversale t über $G, \mathfrak{G}$. In dem etwa möglichen Complex wäre der Schnittpunkt $t l$ Nullpunkt von E , und dies darf man (nach 3.) voraussetzen.

Fünftens. Drei windschiefe Complexstrahlen a, b, c , ferner eine Ebene E mit ihrem Nullpunkt e , wenn E das Hyperboloid abc nicht berührt. Es gibt eine Transversale über a, b , welche in E fällt, sie heiße G , eine zweite $\mathfrak{G}$ enthält den Punkt e . Beachtet man, dass jeder Complexstrahl, der eine beliebige Gerade trifft, auch deren Conjugierte treffen muss, so sieht man, dass in dem etwa möglichen Complexe $G, \mathfrak{G}$ conjugiert sein werden; nach 4. ist derselbe durch den Strahl c bestimmt. Da jetzt jede Transversale von $G, \mathfrak{G}$ Complexstrahl ist, so gehört die ganze Regelschar abc zu den Complexstrahlen, während die Leitschar aus paarweise conjugierten Geraden besteht.

Wir schließen ferner, dass, wenn 4 Windschiefe a, b, c, d zwei, und nur zwei Transversalen zulassen, diese in allen Complexen conjugiert sind, welche als Strahlen jene vier enthalten. Zur Bestimmung eines dieser Complexe reicht irgend ein 5. Strahl e hin, der $G, \mathfrak{G}$ nicht schneidet.

Wenn nun 5 windschiefe Gerade a, b, c, d, e vorliegen, und keine Gerade existiert, die vier derselben schneidet, so gibt es auch dann im allgemeinen einen einzigen Complex, der die fünf zu Strahlen hat: Durch H_1, H_2 seien die Hyperboloide abc, cde bezeichnet; eine durch c gedachte Ebene enthält eine Transversale G von a, b, c eine Γ von c, d, e . G, Γ schneiden sich in einem Punkte 1, der sowohl auf H_1 , als H_2 liegt. Durch 1 geht eine Gerade δ der Schar cde . Entweder ist δ auch zur Schar abc gehörig, oder nicht. Im ersten Falle kann man G mit irgend einer anderen Transversale von $abc\delta$ als Conjugierte nehmen, und durch d einen Complex bestimmen, der offenbar auch e als Strahl enthalten wird, da er von der Schar cde drei Gerade $c\delta d$ enthält. Im zweiten Falle schneidet δ das Hyperboloid H_1 außer 1 noch etwa im Punkte 2. Die durch 2 über abc gehende Transversale sei $\mathfrak{G}$. In dem unserer Forderung entsprechenden Complexe müsste der Strahl δ vorkommen, somit müssen $G, \mathfrak{G}$ in ihm conjugiert sein. Wenn man dies voraussetzt, so ist er dadurch bestimmt, dass er noch den Strahl d besitzt. Alsdann aber kommen in demselben beide Scharen abc, cde vor.

Es ist durchaus nicht überflüssig, auch die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, dass δ die Fläche H_1 im Punkte 1 berührt. Wir werden dadurch von selbst dahin geführt, den Complexstrahl von einem neuen Gesichtspunkt zu betrachten.

7. Der Complexstrahl als Vereinigung zweier unendlich nahen — benachbarten — Conjugierten.

G sei eine beliebige Gerade, $\mathfrak{G}$ ihre Conjugierte, wobei die kürzeste Transversale beider eine endliche Länge habe. Bedeuten dann a, b, c, d irgend 4 zu je 2 windschiefe Complexstrahlen, welche $G, \mathfrak{G}$ treffen, und nicht hyperboloidisch liegen,

so wird das Hyperboloid abc von d auf G und $\mathfrak{G}$ geschnitten. Wenn dagegen G Complexstrahl ist, so muss offenbar d jenes Hyperboloid in dem Schnittpunkte d , G tangieren, d. h. $\mathfrak{G}$ wird jetzt die Gerade des Hyperboloid sein, welche zu G windschief und ihr unendlich nahe liegt. Hieraus ist zu entnehmen, was man unter benachbarten windschiefen Geraden G , $\mathfrak{G}$ zu verstehen hat: Man denke durch G irgend ein Hyperboloid H , so heisst die Gerade desselben, welche mit G derselben Schar angehört, ihre benachbarte. Jeder Punkt e von G ist das Centrum eines Strahlenbüschels, in dessen Ebene $\mathfrak{G}$ zu denken ist; diese Ebene ist nämlich die Tangentialebene von H in e . Wenn demnach ein Hyperboloid längs G sich dem Gedachten H anschmiegt, so enthält dieses ebenfalls die benachbarte $\mathfrak{G}$. Da es hierzu genügt, wenn die Hyperboloide in drei verschiedenen Punkten von G einerlei Tangentialebenen besitzen, so folgt leicht, dass durch G und eine bestimmte benachbarte $\mathfrak{G}$ noch ∞^3 Hyperboloide möglich sind. Denn es seien 1, 2, 3 drei Punkte des Raumes, so bestimmen sie drei Ebenen G_1 , G_2 , G_3 , welche H in e_1 , e_2 , e_3 auf G berühren. Die Geraden $e_1 1$, $e_2 2$, $e_3 3$ bestimmen sodann ein neues Hyperboloid H_1 , das zufolge der Definition dieselbe Nachbargerade von G enthält wie H .

Es entsteht nun die Frage, ob die Bestimmung eines Complexes durch 2 Conjugierte und eine Ebene mit ihrem Nullpunkte noch giltig ist, wenn die Conjugierten G , $\mathfrak{G}$ benachbart sind?

Nehmen wir an, G sei Complexstrahl, und die unendlich nahe Conjugierte $\mathfrak{G}$ bekannt; mit anderen Worten, man habe von 3 durch G gehenden Ebenen die Nullpunkte oder auch es seien 3, in verschiedenen Punkten auf G stehende Complexstrahlen a , b , c gegeben. Nach dem eben Gesagten sind die Nullebenen aller Punkte von G die zugehörigen Tangentialebenen des Hyperboloid abc .

Wenn jetzt die beliebige Ebene E im Punkte e die G schneidet, $\mathfrak{G}$ die Nullebene von e ist, so muss der Nullpunkt e von E offenbar auf die Schnittlinie $E\mathfrak{G}$ fallen. Wird er hier willkürlich gewählt und mit dem Punkte Ga durch die Gerade G_1 verbunden, so muss zu G_1 die Schnittlinie $\mathfrak{G}_1$ der Ebenen E , Ga als conjugierte gehören. Nimmt man dies an und weist der Ebene Gb den Nullpunkt Gb zu, so ist ein Complex bestimmt (nach 3.), welcher allein den aufgestellten Forderungen genügt. Es ist klar, dass man zu seiner Festlegung auch einen Complexstrahl annehmen kann, der mit G windschief ist.

Ein Complex ist mithin gegeben durch 4 windschiefe Strahlen a , b , c , d , und einen fünften G , der von jenen drei schneidet.

Wenn G nur zweien a , b begegnet, so ist ebenfalls der Complex bestimmt. Um dies einzusehen, fasse man das Hyper-

boloid Gcd auf, die Ebene Ga hat mit ihm noch die Gerade G_1 gemein, und es müsste ihre Conjugierte die durch den Punkt Ga gehende, von G verschiedene Gerade $\mathfrak{G}_1$ sein. Wird dies vorausgesetzt, so kann man noch der Ebene Gb als Nullpunkt den Schnittpunkt G, b entsprechen lassen, wodurch sodann der fragliche Complex gefunden ist.

Endlich wird a allein von G geschnitten, so ist nach 5. der Complex durch die Strahlen b, c, d und die Ebene Ga mit ihrem Nullpunkte Ga festgesetzt. Durch unsere Ausführung findet auch der unter 6 angezeigte Fall, dass die Hilfsgerade δ im Punkte 1 Tangente des Hyperboloids H_1 ist, seine Erledigung.