Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern. *)

Von

F. G. MEHLER in Elbing.

In der wissenschaftlichen Beilage des zu Ostern 1870 ausgegebenen Jahresberichts des hiesigen Königlichen Gymnasiums habe ich das elektrostatische Problem für einen unendlichen geraden Kegel unter der Voraussetzung gelöst, dass der Sitz der äusseren elektrischen Kräfte sich auf der Rotationsaxe befindet. Auch habe ich dort die allgemeine Lösung des Problems für den Kegel und das zweifache Rotationshyperboloid so weit vorbereitet, dass die weitere Bearbeitung im Wesentlichen nach der von Herrn Heine für das Rotationsellipsoid gegebenen Methode hätte geschehen können. Da indessen das Interesse an der Sache durch die Beschäftigung mit einem verwandten, aber schwierigeren Probleme zurückgedrängt wurde, und da überdies auch eines der für die Weiterführung der Untersuchung wichtigsten Hilfsmittel, das Additionstheorem für die Kegelfunctionen, nicht neu ist (indem Herr Heine schon früher die Gültigkeit des Theorems für Kugelfunctionen mit beliebigen nicht ganzzahligen Indices, also auch für solche mit imaginären Indices, zu denen die Kegelfunctionen gehören, nachgewiesen hat), so unterliess ich die damals beabsichtigte weitere Ausführung und habe auch jetzt nicht die Absicht, dieselbe wieder aufzunehmen. Die in den letzten Jahren gemachten Versuche, auf anderem Wege in verwandte Gebiete tiefer einzudringen, als es mir früher gelungen war, haben zwar nur einen theilweisen Erfolg gehabt; sie haben mich indessen zu der Aufstellung einiger die Vertheilung der Elektricität in Rotationskörpern betreffenden Sätze geführt, die mir bemerkenswerth erscheinen und vielleicht einer weiteren Ausbildung und Anwendung fähig sind. Ich will im Folgenden zunächst (in § 1.) die einfachsten dieser Sätze mittheilen und sie dann auf die Lösung des elektrostatischen Problems für zwei kugelförmige Leiter

*) Aus dem Jahresberichte des Gymnasiums zu Elbing, Ostern 1879.

anwenden. Ich würde es nicht unternehmen, den zahlreichen vorhandenen Bearbeitungen dieses (für den Fall, dass keine äusseren Kräfte wirken) zuerst von Poisson gelösten Problems*) eine andere hinzuzufügen, wenn dieselbe nicht, nach meiner Ueberzeugung wenigstens, eine wesentlich neue wäre, nicht nur was den Ausgangspunkt der Untersuchung betrifft, sondern auch hinsichtlich der Form der erhaltenen Resultate. Während nämlich alle mir bekannten Lösungen die Form von Reihenentwicklungen, wenn auch sehr verschiedener Art, haben, und nur in speciellen Fällen einzelne der in Betracht kommenden Grössen durch elliptische Functionen**) oder durch bestimmte Integrale ausgedrückt worden sind, erhalte ich das allgemeine Resultat von vornherein in Form von bestimmten Integralen. Ich stelle nämlich das Potential zunächst durch ein Integral dar, welches eine noch unbekannte Function einer complexen Variablen enthält; es zeigt sich dann, dass diese Function, wenn allen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen genügt werden soll, eine doppelt periodische Function sein muss, und es ist leicht, dieselbe anzugeben. Uebrigens behandle ich, um die Methode in ihrer einfachsten Form anwenden zu können, zunächst den Fall zweier concentrischen Kugeln und führe den allgemeinen durch die Methode der reciproken Radienvectoren darauf zurück. Wenn ich die Anwendung der letzteren Methode hätte vermeiden wollen, so würde ich mich (jedoch nur in dem Falle, dass der später durch P_0 zu bezeichnende Punkt ausserhalb der durch die beiden Kugelmittelpunkte gehenden Geraden liegt), genöthigt gesehen haben, diejenige Transformation der Differentialgleichung des Potentials zu benutzen, welche Herr C. Neumann in seiner zweiten Lösung des entsprechenden Wärmeproblems***) zu Grunde legt. Die von mir erhaltenen Resultate sind in der Form sehr ähnlich denjenigen, welche ich für einen von zwei Kugelcalotten begrenzten Körper durch Umformung der anfangs unter wesentlich anderer Form erscheinenden Ausdrücke schliesslich gefunden habe. (Borchardt's Journal, Bd. 68, S. 144.) Ich kann diesen Fall jetzt zwar auch direct behandeln; doch bedürfen die in § 1. angegebenen Sätze zu diesem Zwecke einer Erweiterung, die anzugeben ich unterlassen habe, weil sie mit einer

*) In Betreff der Litteratur des Problems verweise ich auf S. 214 des Werkes: „Schwere, Elektrizität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von Bernhard Riemann bearbeitet von Karl Hattendorff. Hannover, 1876.“

**) Man vergl. hierüber die Abhandlung von Herrn G. Kirchhoff: „Ueber die Vertheilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln.“ (Borchardt's Journal, Bd. 59.)

***) „Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Halle. 1862.“

anderen, noch nicht gehörig untersuchten Frage in Verbindung steht. Schon bei der Anwendung auf das Rotationsellipsoid gestalten sich die Bedingungen, welchen die Function der complexen Variablen zu genügen hat, nicht so einfach, dass es mir gelungen wäre, die Function ohne Hülfe von Reihenentwicklungen zu bestimmen, und es dürfte auch in der Sache selbst begründet sein, dass für die Vertheilung der statischen Elektricität auf Rotationskörpern nicht so einfache und allgemeingültige Resultate gewonnen werden können, wie sie Herr Heine für ein in mancher Beziehung ähnliches elektrodynamisches Problem*) erhalten hat.

§ 1.

Bemerkungen allgemeineren Inhalts zur Theorie der Vertheilung der statischen Elektricität auf Rotationskörpern.

Durch x, y, z mögen die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes im Raume bezeichnet werden, in welchem man sich die Einheit der negativen Elektricität concentrirt denkt, und welcher der Einwirkung einer auf einer Rotationsfläche vertheilten elektrischen Massenschicht unterworfen ist. Die X -Axe sei die Rotationsaxe und die positiv zu wählende Grösse $\eta (= \sqrt{y^2 + z^2})$ bezeichne den Abstand des Punktes von der Rotationsaxe. Alle Punkte, für welche x und η constant sind, liegen also auf der Peripherie eines bestimmten Kreises. Irgend eine Meridianebene diene nun gleichzeitig als Ebene der complexen Zahlen, und zwar sei die X -Axe zugleich Axe des Reellen, und die beiden Punkte, in welchen die Ebene durch die erwähnte Kreisl Linie geschnitten wird, seien Träger der conjugirten complexen Zahlen $x + i\eta$ und $x - i\eta$. Jeder Linie in der Zahlenebene entspricht in Folge dessen eine Rotationsfläche, jedem begrenzten Theile der Ebene ein von einer Rotationsfläche begrenzter körperlicher Raum, und die im Folgenden in der Zahlenebene vorzunehmenden analytischen Operationen führen zu Resultaten, die ihre geometrische Bedeutung durch die entsprechenden räumlichen Gebilde erhalten. Es werden nun Integrale betrachtet werden, welche sich über geschlossene Linien erstrecken, und zwar ist jede derselben (auch in dem Falle, wo zwei Linien die vollständige Begrenzung eines ringförmigen Flächenstückes bilden), in solchem Sinne zu durchlaufen, dass die im Punkte $\xi_1 = x_1 + i\eta_1$ in der Richtung der Bewegung gezogene Tangente zu der Normale, welche nach dem Innern des von der Linie *allein* begrenzten *endlichen* Flächenstückes gerichtet ist, dieselbe Lage hat wie die positive X -Axe

*) „Ueber die constante elektrische Strömung in ebenen Platten.“ (Borchardt's Journal, Bd. 79.)

zur positiven H -Axe. Für die Untersuchung macht es nun einen wesentlichen Unterschied, ob die Linien (oder die ihnen entsprechenden Rotationsflächen) die Rotationsaxe schneiden oder nicht.

Wir werden nur den ersten Fall in Betracht ziehen, und hierbei stets voraussetzen, dass die den Integrationsweg bestimmende Curve durch die Rotationsaxe in zwei symmetrische Theile getheilt wird. Auch mag der Einfachheit wegen angenommen werden, dass der eine Schnittpunkt auf dem positiven, der andere auf dem negativen Theile der X -Axe liege. Ersetzt man z. B. $x_1 + i\eta_1$ durch einen der vier Ausdrücke

$$e^{\varrho_1 + i\vartheta_1}, \quad \cos(\vartheta_1 - i\varrho_1), \quad i \sin(\vartheta_1 - i\varrho_1), \quad e^{iam(\vartheta_1 - i\varrho_1)},$$

und bestimmt durch Trennung des Reellen und Imaginären x_1 und η_1 als Functionen von ϱ_1 und ϑ_1 , oder umgekehrt, diese als Functionen von jenen, so erfüllen die constanten Werthen von ϱ_1 entsprechenden Curven die gemachte Voraussetzung, und die Integration ist nach ϑ_1 zwischen den Grenzen 0 und p (allgemeiner: τ und $\tau + p$) auszuführen, wenn p in den drei ersten Fällen den Werth 2π , im vierten den Werth $4K$ besitzt. In Betreff der in den Integralen vorkommenden Wurzelgrösse

$$R = \sqrt{(\xi_1 - x - i\eta)(\xi_1 - x + i\eta)} = \sqrt{(\xi_1 - x)^2 + y^2 + z^2}$$

wird festgesetzt, dass sie in dem auf der positiven X -Axe liegenden Punkte der Integrationscurve einen positiven Werth habe. Bewegt sich der Punkt ξ_1 auf der Curve, so ändert sich R stetig und erhält nach einem ganzen Umlaufe stets wieder denselben Werth, mögen nun die Punkte $x + i\eta$ und $x - i\eta$ beide ausserhalb oder beide innerhalb des von der Curve begrenzten Flächenstückes liegen. Aber während im ersten Falle R auch in dem auf der negativen X -Axe liegenden Punkte einen positiven reellen Werth hat, erhält es im zweiten Falle dort einen negativen Werth. Wenn die Punkte $x \pm i\eta$ auf der Integrationscurve liegen, so bleibt das Vorzeichen von R beim Ueberschreiten dieser Punkte willkürlich, und das Integral verliert dann seine bestimmte Bedeutung. Von besonderer Wichtigkeit ist aber der Fall, dass jene Punkte der Curve unendlich nahe rücken. Das Integral zerfällt dann in zwei Theilintegrale, von denen das eine vom Punkte $x - i\eta$ über die positive X -Axe hinweg bis zum Punkte $x + i\eta$, das andere von $x + i\eta$ über die negative X -Axe hinweg bis $x - i\eta$ zu nehmen ist. Der Werth von R möge in dem ersten dieser Theilintegrale durch P , in dem zweiten durch Q bezeichnet werden, vorausgesetzt, dass die Annäherung der Punkte von aussen her stattfindet. Geschieht sie dagegen von innen, so hat zwar zufolge der früheren Festsetzungen in dem ersten Theilintegrale R den Werth P , aber in dem zweiten den Werth $Q' = -Q$. Es wird also zu beachten sein,

dass das Vorzeichen der mit P und Q bezeichneten Grössen so gewählt ist, dass diese Grössen für $\eta_1 = 0$ (also für $\xi_1 = x_1$) einen positiven reellen Werth erhalten. Bemerkte muss jedoch werden, dass die soeben besprochene Zerlegung des Integrales in dem Falle ihre Bedeutung verliert, dass die Punkte $x \pm i\eta$ in einen einzigen zusammenfallen. Da aber das unzerlegte Integral (wie aus der Form desselben unmittelbar ersichtlich sein wird) für $\eta = 0$, d. h. auf der X -Axe, keine Stetigkeitsunterbrechung erleidet, so können die für $\eta = 0$ geltenden Resultate aus den für ein beliebig kleines η geltenden durch Uebergang zur Grenze gefunden werden.

Nach diesen Vorbemerkungen schreiten wir nun zur Aufstellung und Begründung der folgenden Sätze:

α) Wenn $f(\xi_1)$ auf der Curve C_1 , und auch an der inneren und äusseren Seite derselben innerhalb eines Streifens von endlicher Breite, eine eindeutige, stetige und endliche Function der complexen Variablen ξ_1 ist und für conjugirte Werthe ($x_1 \pm i\eta_1$) von ξ_1 ebenfalls conjugirte Werthe annimmt, so kann das über C_1 erstreckte Integral

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi_1) d\xi_1}{R}$$

angesehen werden als das Potential einer elektrischen Belegung, welche auf der der Curve C_1 entsprechenden Rotationsfläche F_1 ausgebreitet ist, in Bezug auf irgend einen Punkt (x, y, z) des ausserhalb F_1 liegenden Raumes.

Denn zunächst ist mit Rücksicht darauf, dass der Integrationsweg symmetrisch zur Axe des Reellen liegt, und dass ebenso wie $f(\xi_1)$ auch R für conjugirte Werthe von ξ_1 conjugirte Werthe annimmt, leicht einzusehen, dass v nur reelle Werthe besitzt. Ferner sind, so lange der Punkt (x, y, z) in endlicher Entfernung von F_1 bleibt, R und die Derivirten von R nach x, y, z stetige Functionen der Coordinaten, woraus leicht die nämliche Eigenschaft für die Function v und ihre Derivirten sich ergibt. Aber auch wenn (x, y, z) der Fläche F_1 unendlich nahe rückt, behalten $v, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots$ endliche Werthe. Denn zufolge der ersten der über $f(\xi_1)$ gemachten Voraussetzungen kann man, ohne dass das Integral dadurch eine Aenderung seines Werthes erleidet, die Curve C_1 durch eine an ihrer inneren Seite innerhalb des erwähnten Streifens verlaufende Curve C'_1 ersetzen, welche in endlicher Entfernung von den Punkten $x \pm i\eta$ bleibt. Es genügt ferner v der Differentialgleichung $\Delta^2 v = 0$, d. h. der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

weil dem reciproken Werthe von R , also jedem Elemente des Integrales,

diese Eigenschaft zukommt, und endlich ist auch die letzte der Bedingungen erfüllt, welche das Potential einer Flächenbelegung im äusseren Raume erfüllen muss, nämlich dass die Producte

$$r \cdot v, \quad r^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad r^2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad r^2 \frac{\partial v}{\partial z}$$

endliche Werthe behalten, wenn $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ unendlich gross wird. Der Grenzwert von $r \cdot v$ ist

$$m = \frac{1}{2\pi i} \int f(\xi_1) d\xi_1$$

und stellt die Gesamtmenge der auf der Fläche F_1 verbreiteten Elektrizität dar.

β) Besitzt $f(\xi_1)$ in dem ganzen ausserhalb C_1 liegenden Theile der Zahlenebene keinen Verzweigungs- oder Unstetigkeitspunkt (und nimmt man an, dass $\xi_1 f(\xi_1)$ für $\xi_1 = \infty$ nicht ebenfalls unendlich wird), so kann man die Curve C_1 , ohne dass das Integral seinen Werth ändert, so erweitern, dass sie unendlich nahe an die Punkte $x \pm i\eta$ herantritt, und es ergibt sich dann durch die oben angedeutete Zerlegung des Integrales:

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\eta}^{x+i\eta} \frac{f(\xi_1) d\xi_1}{P} + \frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\eta}^{x-i\eta} \frac{f(\xi_1) d\xi_1}{Q},$$

oder wenn man sich ξ_1 durch $\varrho_1 + i\vartheta_1$ und x und η durch ϱ und ϑ ausgedrückt denkt, und dann, wegen der unendlichen Annäherung der Curve C_1 an die einem constanten Werthe von ϱ entsprechende Curve C , $\varrho_1 = \varrho$ setzt*):

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{f(\xi_1)}{P} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\vartheta}^{\vartheta-\vartheta} \frac{f(\xi_1)}{Q} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1.$$

Wenn die Punkte $x \pm i\eta$ von der äusseren Seite auf der Normale nach der inneren übertreten, so besitzt die Function $f(\xi_1) : R$ in der

*) Man kann die Curve C_1 so umformen, dass sie in ihrer ganzen Ausdehnung mit der Curve C geradezu zusammenfällt, ausser in unmittelbarer Nähe der Punkte $x \pm i\eta$, welche durch unendlich kleine, z. B. halbkreisförmige, Bogen zu umgehen sind. Die über diese Bogen genommenen Theile des Integrales werden verschwindend klein, und jedes der Integrale über die diese Bogen verbindenden Linien nähert sich einem endlichen Grenzwerthe. Daher ist es erlaubt geradezu $\varrho_1 = \varrho$, und in den Grenzen $\vartheta_1 = \vartheta$ zu setzen. Die Ausdrücke für die Derivirten von v aber lassen, weil sie die $(-\frac{3}{2})$ te Potenz von R enthalten, sich nicht in der angegebenen Weise transformiren. Ihre Umformungen sind aber durch andere Hilfsmittel leicht herzustellen.

äusseren Fläche keinen Verzweigungspunkt mehr, und da sie mit ξ_1^2 multiplicirt im Unendlichen endlich bleibt, so hat das über den ganzen Umfang der Curve erstreckte Integral den Werth Null. Unter Beachtung des über den Zeichenwechsel von Q Gesagten erhält man also:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{f(\xi_1)}{P} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\vartheta}^{\vartheta-\vartheta} \frac{f(\xi_1)}{Q} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1.$$

Daher gilt im äusseren Raume für v der Doppelausdruck:

$$v = \frac{1}{\pi i} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{f(\xi_1)}{P} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 = \frac{1}{\pi i} \int_{\vartheta}^{\vartheta-\vartheta} \frac{f(\xi_1)}{Q} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1.$$

$\gamma)$ Das erste dieser beiden Integrale erscheint für $\vartheta = 0$, also auf der positiven X -Axe, das zweite für $\vartheta = \frac{1}{2}p$, also auf der negativen X -Axe, unter unbestimmter Form, indem dann die Integrationsgrenzen einander gleich werden, die Function unter dem Integralzeichen aber unendlich gross. Man findet jedoch, indem man beachtet, dass hier $x_1 = x$, $\xi_1 = x + i\eta_1$ gesetzt werden darf, leicht die Grenzwerte:

Für $x > 0$:

$$\lim v = \lim_{-\eta} \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{f(x + i\eta_1) d\eta_1}{V\eta^2 - \eta_1^2} = \lim_{\eta} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x + i\eta \cos \alpha) d\alpha = f(x),$$

und für $x < 0$ oder $\vartheta = \frac{1}{2}p$:

$$\lim v = \lim_{\eta} \frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{-\eta} \frac{f(x + i\eta_1) d\eta_1}{V\eta^2 - \eta_1^2} = -f(x).$$

Es besitzt also das Potential der in $\alpha)$ betrachteten elektrischen Belegung der Fläche F_1 , wenn $f(\xi_1)$ auch die unter $\beta)$ gestellten Bedingungen erfüllt, im äusseren Raume auf dem positiven Theile der X -Axe den Werth $f(x)$ und auf dem negativen Theile derselben den Werth $-f(x)$.

$\delta)$ Bezeichnet man durch x_0 die Abscisse eines auf der X -Axe gelegenen festen Punktes X_0 , so ist, falls über eine den Punkt X_0 umschliessende Curve integrirt wird:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\xi_1}{(\xi_1 - x_0)R} = \frac{1}{r} = \frac{1}{V(x - x_0)^2 + \eta^2}, \quad \text{oder} = 0,$$

je nachdem die Curve die Punkte $x \pm i\eta$ ausschliesst oder ebenfalls umschliesst. Man erhält also aus dem in $\beta)$ gewonnenen Resultate, indem man dort $f(\xi_1) = 1 : (\xi_1 - x_0)$ setzt, für $1 : r$ die beiden Darstellungen;

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\xi_1}^{\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{(\xi_1 - x_0)P} = \frac{1}{\pi i} \int_{\xi_1}^{p-\vartheta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{(\xi_1 - x_0)Q},$$

und die Gültigkeit derselben ist zunächst an die Bedingung $\xi_2 < x_0 < \xi_1$ geknüpft, wenn ξ_1 und ξ_2 die Abscissen der Punkte sind, in denen der Integrationsweg des ersten und der des zweiten Integrales die X -Axe schneidet. Da man aber, bei festgehaltenen Werthen von x_0 und ξ_1 durch Erweiterung der Integrationscurve den Punkt mit der Abscisse ξ_2 beliebig weit auf der negativen X -Axe fortrücken lassen kann, so ist die erste der beiden Darstellungen gültig unter der Bedingung $-\infty < x_0 < \xi_1$; und ebenso ist es die zweite unter der Bedingung $\xi_2 < x_0 < \infty$.

α') Erfüllt $\varphi(\xi_1)$ die in α) in Bezug auf $f(\xi_1)$ gemachten Voraussetzungen, so kann man das Integral

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\xi_1) d\xi_1}{R}$$

ansetzen als das Potential einer elektrischen Belegung der Fläche F_1 in Bezug auf einen beliebigen Punkt (x, y, z) des inneren Raumes. Aber wenn diese Belegung dieselbe sein soll, wie diejenige, deren Potential im äusseren Raume in α) durch v bezeichnet wurde, so darf $\varphi(\xi_1)$ nicht $= f(\xi_1)$ sein; die Lösung des elektrostatischen Problems für die Fläche F_1 erfordert vielmehr die Lösung der Aufgabe: wenn von den Functionen $f(\xi_1)$ und $\varphi(\xi_1)$ die eine gegeben ist, die andere so zu bestimmen, dass auf der Fläche F_1 die Functionen v und v dieselben Werthe annehmen.

β') Ist $\varphi(\xi_1)$ im ganzen inneren Raume endlich und einädrig, so gilt in diesem Raume für v der Doppelausdruck:

$$v = \frac{1}{\pi i} \int_{-\xi_1}^{\xi_1} \frac{\varphi(\xi_1)}{P} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 = - \frac{1}{\pi i} \int_{\xi_1}^{p-\vartheta} \frac{\varphi(\xi_1)}{Q} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1.$$

γ') Auf dem Theile der Abscissenaxe, welcher innerhalb des von F_1 begrenzten Raumes liegt, besitzt das Potential v den Werth $\varphi(x)$.

δ') Wenn über eine Curve integrirt wird, welche den festen Punkt X_0 mit der Abscisse x_0 ausschliesst, so ist, vorausgesetzt, dass x_0 positiv ist:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\xi_1}{(\xi_1 - x_0)R} = - \frac{1}{r} = - \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + \eta^2}}, \quad \text{oder} = 0,$$

je nachdem die Curve die Punkte $x \pm i\eta$ umschliesst oder ebenfalls ausschliesst. Es gelten daher für $-1 : r$ die beiden Darstellungen:

$$-\frac{1}{r} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{(\xi_1 - x_0) P} = -\frac{1}{\pi i} \int_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{(\xi_1 - x_0) Q},$$

die erste gültig für $\xi_1 < x_0 < \infty$, die zweite identisch mit der zweiten in δ). Wenn aber x_0 negativ ist, so muss in der letzten Formel $\frac{1}{r}$ an Stelle von $-\frac{1}{r}$ gesetzt werden, und die erste Darstellung von $\frac{1}{r}$ wird identisch mit der in δ), die zweite ist gültig für $-\infty < x_0 < \xi_2$. Denn obgleich in beiden Fällen das Integral über die die Punkte $x \pm i\eta$ umschliessende Linie gleich ist dem mit -1 multiplicirten Werthe des Integrales längs eines mit unendlich kleinem Radius um X_0 in derselben Richtung beschriebenen Kreises, so findet doch der Unterschied statt, dass im Punkte X_0

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + \eta^2} = r, \quad \text{oder} \quad -\sqrt{(x - x_0)^2 + \eta^2} = -r$$

wird, je nachdem $x_0 >$ oder < 0 .

δ'') Durch Verbindung von δ) und $\delta')$ ergeben sich die Resultate:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{(\xi_1 - x_0) P} = \frac{e}{r} (e = \pm 1, \text{ je nachdem } \xi_1 \geq x_0),$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\vartheta}^{p-\vartheta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{(\xi_1 - x_0) Q} = \frac{e'}{r} (e' = \pm 1, \text{ je nachdem } \xi_2 \leq x_0).$$

ε) Es mögen jetzt zwei Curven C_a und C_b betrachtet werden, von denen die erste von der zweiten umschlossen wird, und die Potentiale

$$v_a = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi_a) d\xi_a}{R_a}, \quad v_b = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi_b) d\xi_b}{R_b}$$

$$(R_a = \sqrt{(\xi_a - x)^2 + \eta^2}, \quad R_b = \sqrt{(\xi_b - x)^2 + \eta^2})$$

zweier elektrischen Belegungen der Flächen F_a und F_b , beide bezogen auf irgend einen zwischen F_a und F_b liegenden Punkt (x, y, z) . Die Function $f(\xi_1)$ sei eindeutig, stetig und endlich zwischen C_a und C_b (und auch innerhalb eines Streifens von endlicher Breite an der inneren Seite von C_a und eines anderen an der äusseren Seite von C_b). Es ergiebt sich dann, wenn man C_a so erweitert und C_b so zusammenzieht, dass zwischen beiden ein unendlich schmales die Punkte $x \pm i\eta$ enthaltendes Flächenstück übrig bleibt:

$$v_a = \frac{1}{2\pi i} \int_{-g}^g \frac{f(\xi_1)}{P} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_g^{p-g} \frac{f(\xi_1)}{Q} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1,$$

$$v_b = \frac{1}{2\pi i} \int_{-g}^g \frac{f(\xi_1)}{P} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_g^{p-g} \frac{f(\xi_1)}{Q} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1.$$

Daher ist das Gesamtpotential beider Belegungen im Punkte (x, y, z) :

$$v_a + v_b = \frac{1}{\pi i} \int_{-g}^g \frac{f(\xi_1)}{P} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1,$$

und auf dem Theile der positiven X-Axe zwischen F_a und F_b besitzt es den Werth $f(x)$.

ε') Wenn aber die Potentiale der Belegungen die Formen

$$v_a = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\xi_a) d\xi_a}{R_a}, \quad v_b = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\xi_b) d\xi_b}{R_b}$$

haben, und $\varphi(\xi_1)$, wie $f(\xi_1)$, zwischen C_a und C_b stetig ist, dann ist:

$$v_a = \frac{1}{2\pi i} \int_{-g}^g \frac{\varphi(\xi_1)}{P} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_g^{p-g} \frac{\varphi(\xi_1)}{Q} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1,$$

$$v_b = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-g}^g \frac{\varphi(\xi_1)}{P} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_g^{p-g} \frac{\varphi(\xi_1)}{Q} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1.$$

Daher gilt in diesem Falle für das Gesamtpotential der Belegungen in dem Punkte (x, y, z) zwischen F_a und F_b der Ausdruck

$$v_a + v_b = \frac{1}{\pi i} \int_g^{p-g} \frac{\varphi(\xi_1)}{Q} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1,$$

und auf dem Theile der negativen X-Axe zwischen F_a und F_b besitzt es den Werth $-\varphi(x)$.

§ 2.

Erste Aufgabe

über die Vertheilung der Elektrizität auf zwei concentrischen Kugelflächen.

Der Raum zwischen den concentrischen Kugelflächen F_a und F_b wird als die Elektrizität nicht leitend, der ganze übrige Raum wird als sie leitend angesehen. Im nichtleitenden Raume befindet sich auf dem positiven Theile der X-Axe der Punkt X_0 mit der Abscisse x_0 .

Es sollen die Potentiale v_a und v_b zweier solchen Belegungen der Flächen F_a und F_b für den nichtleitenden Raum bestimmt werden, dass das Gesammtpotential $v_a + v_b$ auf F_a und F_b resp. die Werthe annimmt:

$$-\frac{1}{r_a} = -\frac{1}{\sqrt{(x_a - x_0)^2 + y_a^2 + z_a^2}} \quad \text{und} \quad +\frac{1}{r_b} = +\frac{1}{\sqrt{(x_b - x_0)^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

Die hier anzuwendenden Coordinaten werden durch die Gleichungen gegeben

$$x + i\eta = c \cdot e^{\varrho + i\vartheta}, \quad x_1 + i\eta_1 = c \cdot e^{\varrho_1 + i\vartheta_1},$$

wobei für die Constante c nur wegen der in § 8. zu machenden Anwendung nicht die Einheit gewählt ist. Die Grössen ϱ und ϱ_1 können alle Werthe von $-\infty$ bis ∞ annehmen, ϑ liegt zwischen 0 und π , während für ϑ_1 alle zwischen $-\pi$ und 2π enthaltenen Werthe in Anwendung kommen werden. Die Radien a und b der Kugeln und die Abscisse von X_0 werden ausgedrückt durch

$$a = c \cdot e^{\varrho a}, \quad b = c \cdot e^{\varrho b}, \quad x_0 = c \cdot e^{\varrho_0},$$

und es ist $\varrho_a < \varrho_0 < \varrho_b$. Man erhält nun

$$R = c \sqrt{e^{2\varrho_1 + 2i\vartheta_1} - 2e^{\varrho_1 + i\vartheta_1} e^{\varrho} \cos \vartheta + e^{2\varrho}},$$

und in dem Falle, dass $\varrho_1 = \varrho$ wird:

$$R = c e^{\varrho} e^{\frac{1}{2}i\vartheta_1} \sqrt{2} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta).$$

Aus diesem Ausdrucke aber ergibt sich für die oben mit P und Q bezeichneten Grössen:

$$P = c e^{\varrho} e^{\frac{1}{2}i\vartheta_1} \sqrt{2} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta), \quad (-\vartheta < \vartheta_1 < \vartheta),$$

$$Q = -i c e^{\varrho} e^{\frac{1}{2}i\vartheta_1} \sqrt{2} (\cos \vartheta - \cos \vartheta_1), \quad (\vartheta < \vartheta_1 < 2\pi - \vartheta),$$

wobei die beiden Quadratwurzeln, jede in dem für sie allein in Betracht kommenden Intervalle, nur reelle und positive Werthe besitzen. Auf der X -Achse, also für $\vartheta_1 = 0$, resp. $\vartheta_1 = \pi$, sind P und Q selbst positiv reell, wie es den gemachten Festsetzungen entspricht. Beachtet man ferner, dass für $\varrho_1 = \varrho$:

$$\frac{d\xi_1}{\xi_1 - x_0} = \frac{i e^{\varrho + i\vartheta_1} d\vartheta_1}{e^{\varrho + i\vartheta_1} - e^{\varrho_0}} = \frac{e^{\frac{1}{2}(\varrho - \varrho_0)} e^{\frac{1}{2}i\vartheta_1} d\vartheta_1}{2 \sin \frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\varrho + i\varrho_0)},$$

so ergibt sich durch Anwendung von δ'' :

$$(1) \quad \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)}}{2\pi c} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{d\vartheta_1}{i \sin \frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\varrho + i\varrho_0) \sqrt{2} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta)} = \frac{i}{r},$$

wenn $c = -1$ für $\varrho < \varrho_0$, und $c = +1$ für $\varrho > \varrho_0$. Dieses Integral nimmt also auf F_a und F_b die für das Gesammtpotential vorgeschriebenen Werthe an, und es stellt das Gesammtpotential dar sowohl in dem

Raume innerhalb F_a als auch in dem Raume ausserhalb F_b . In dem nichtleitenden Raume aber mögen die Potentiale der einzelnen Belegungen unter den Formen dargestellt werden, welche unter ε) angegeben sind, und welche, wenn man die Function f als unmittelbar von $q_1 + i\vartheta_1$ (statt von $e^{i\vartheta_1}$) abhängig betrachtet, auch so geschrieben werden können:

$$(2) \quad v_a = \frac{ce^{q_a}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta_a} f(q_a + i\vartheta_a) \frac{d\vartheta_a}{R_a}, \quad v_b = \frac{ce^{q_b}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta_b} f(q_b + i\vartheta_b) \frac{d\vartheta_b}{R_b}.$$

Es muss nun die Function $f(q_1 + i\vartheta_1)$ für gleiche aber entgegengesetzte ϑ_1 conjugirte complexe Werthe annehmen, und sie darf ihren Werth nicht ändern, wenn ϑ_1 um 2π wächst, muss also der Gleichung $f(q_1 + i\vartheta_1) = f(q_1 + i\vartheta_1 + 2i\pi)$ genügen. Setzt man jedoch

$$(3) \quad f(q_1 + i\vartheta_1) = \frac{1}{2c} e^{-\frac{1}{2}q_0} e^{-\frac{1}{2}(q_1 + i\vartheta_1)} F(q_1 + i\vartheta_1),$$

so muss, da die vor F stehende Exponentialgrösse bei einer Zunahme von ϑ_1 um 2π das (-1) fache ihres ursprünglichen Werthes erhält, die neue Function F der Gleichung

$$(4) \quad F(q_1 + i\vartheta_1) = -F(q_1 + i\vartheta_1 + 2i\pi)$$

Genüge leisten. Aus ε) ergibt sich nun unter Benutzung der angegebenen Werthe von P und Q :

$$(5) \quad \begin{cases} v_a = \frac{e^{-\frac{1}{2}(q_1 + q_0)}}{4\pi c} \left\{ \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{F(q + i\vartheta_1) d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta)}} + \int_{\vartheta}^{2\pi - \vartheta} \frac{i F(q + i\vartheta_1) d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \vartheta_1)}} \right\} \\ v_b = \frac{e^{-\frac{1}{2}(q_1 + q_0)}}{4\pi c} \left\{ \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{F(q + i\vartheta_1) d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta)}} - \int_{\vartheta}^{2\pi - \vartheta} \frac{i F(q + i\vartheta_1) d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \vartheta_1)}} \right\}, \end{cases}$$

also für die Summe der beiden Potentiale:

$$(6) \quad v_a + v_b = \frac{e^{-\frac{1}{2}(q_1 + q_0)}}{2\pi c} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{F(q + i\vartheta_1) d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta)}}.$$

Für $q = q_a$ und $q = q_b$ muss nun dieser Ausdruck die in (1) angegebenen Werthe haben. Wir versuchen dies zu erreichen, indem wir zunächst setzen:

$$F(q + i\vartheta_1) = \frac{1}{i \sin \frac{1}{2}(\vartheta_1 - i q + i q_0)} - G(q + i\vartheta_1 - q_0) - G(q + i\vartheta_1 + q_0 - 2q_a).$$

Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung wird unendlich, wenn $q = q_0$ und $\vartheta_1 = 0$ oder $= 2\pi$. Da aber F für diese Werthe

(d. h. im Punkte X_0) endlich bleiben muss, so soll über G so verfügt werden, dass in diesem Punkte die beiden ersten Glieder zusammen keinen unendlich grossen, sondern den Werth Null geben. Es müssen ferner nach Einsetzung des Werthes von F in (6) von den drei so erhaltenen Integralen die beiden letzten für $\varrho = \varrho_a$ und $\varrho = \varrho_b$ einander aufheben. Verwandelt man aber in dem zweiten den Integrationsbuchstaben ϑ_1 in $-\vartheta_1$ und vereinigt es mit dem dritten, so erhält man, wenn G der Bedingung $G(-t) = -G(t)$ genügt, das Integral:

$$\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{+G(-\varrho + i\vartheta_1 + \varrho_0) - G(\varrho + i\vartheta_1 + \varrho_0 - 2\varrho_a)}{\sqrt{2}(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta)} d\vartheta_1.$$

Dieses verschwindet in der That für $\varrho = \varrho_a$. Damit dasselbe für $\varrho = \varrho_b$ geschehe, soll G der Bedingung unterworfen werden

$$G(-\varrho_b + i\vartheta_1 + \varrho_0) = G(\varrho_b + i\vartheta_1 + \varrho_0 - 2\varrho_a),$$

welche erfüllt ist, wenn für jedes t die Function $G(t) = G(t + 2\varrho_b - 2\varrho_a)$ ist. Da nach (4) ausserdem $G(t) = -G(t + 2i\pi)$, so ist für $G(t)$ eine doppelt periodische Function zu wählen, deren reelle Periode $= 2\varrho_b - 2\varrho_a$, und deren imaginäre Periode $= 4i\pi$, und zwar genügt allen bisher erörterten Bedingungen offenbar:

$$G(t) = \frac{2K'}{\pi} \cdot \cot \operatorname{am} \frac{K't}{\pi},$$

wenn der Modul k des elliptischen Integrales so gewählt ist, dass:

$$(7) \quad \varrho_b - \varrho_a = \frac{\pi K}{K'}, \quad \text{also } q = e^{-\frac{\pi^2}{\varrho_b - \varrho_a}} \quad \text{und } q' = e^{-(\varrho_b - \varrho_a)}.$$

Daher ergibt sich, wenn man den Werth von G in den Ausdruck von F einsetzt und ϱ_1 an Stelle von ϱ schreibt:

$$(8) \quad F(\varrho_1 + i\vartheta_1) = \frac{1}{i \sin \frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\varrho_1 + i\varrho_0)} - \frac{2K'}{\pi} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_1 + i\vartheta_1 - \varrho_0) \\ - \frac{2K'}{\pi} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi}(\varrho_1 + i\vartheta_1 + \varrho_0 - 2\varrho_a),$$

und um einzusehen, dass dieser Ausdruck *keine* der nothwendigen Bedingungen unerfüllt lässt, darf man sich nur noch überzeugen, dass F keine Unstetigkeitspunkte im nichtleitenden Raume besitzt. Nun wird F nur auf der X -Axe unendlich, und zwar in den Punkten, welche den Werthen

$$\varrho_1 = \varrho_0 + 2m(\varrho_b - \varrho_a) \quad \text{und} \quad \varrho_1 = 2\varrho_a - \varrho_0 + 2n(\varrho_b - \varrho_a)$$

entsprechen, worin m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten, für m jedoch der Werth 0 ausgeschlossen ist. Aber alle diese Werthe von ϱ_1 sind theils kleiner als ϱ_a , theils grösser als ϱ_b , keiner der entsprechenden Punkte liegt also in dem Raume zwischen den beiden Kugelflächen.

Es sind jetzt also F und f bestimmt durch (8) und (3), und folglich v_a und v_b für Punkte des nichtleitenden Raumes durch (5) oder auch (2). Die Ausdrücke in (2) gelten übrigens noch in weiterem Umfange, nämlich, wie aus α) und α') in § 1. hervorgeht, der erste noch in dem Raume ausserhalb F_b , der zweite noch in dem Raume innerhalb F_a .

§ 3.

Zweite Aufgabe

über die Vertheilung der Elektrizität auf zwei concentrischen Kugelflächen.

Es sollen die Potentiale v_a und v_b zweier solchen elektrischen Belegungen der Flächen F_a und F_b für den nichtleitenden Raum bestimmt werden, dass das Gesammtpotential $v_a + v_b$ auf F_a und F_b resp. die Werthe annimmt:

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{\sqrt{(x_a - x_0)^2 + y_a^2 + z_a^2}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r_b} = \frac{1}{\sqrt{(x_b - x_0)^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

Diese Aufgabe lässt sich, indem man von ε') in § 1. ausgeht, in fast ganz gleicher Weise wie die vorhergehende behandeln, und ihre Lösung ist in den folgenden Formeln enthalten:

$$(1') \quad \frac{1}{r} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)}}{2\pi c} \int_{\vartheta}^{2\pi - \vartheta} \frac{d\vartheta_1}{\sin \frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\varrho + i\varrho_0) \sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \vartheta_1)}}.$$

$$(2') \quad v_a = \frac{ce^{\varrho a}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta a} \varphi(\varrho_a + i\vartheta_a) \frac{d\vartheta_a}{R_a}, \quad v_b = -\frac{ce^{\varrho b}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta b} \varphi(\varrho_b + i\vartheta_b) \frac{d\vartheta_b}{R_b}.$$

$$(3') \quad \varphi(\varrho_1 + i\vartheta_1) = \frac{1}{2c} e^{-\frac{1}{2}\varrho_0} e^{-\frac{1}{2}(\varrho_1 + i\vartheta_1)} \Phi(\varrho_1 + i\vartheta_1).$$

$$(8') \quad \Phi(\varrho_1 + i\vartheta_1) = \frac{1}{i \sin \frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\varrho_1 + i\varrho_0)} - \frac{2K'}{\pi} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho_1 + i\vartheta_1 - \varrho_0) \\ + \frac{2K'}{\pi} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho_1 + i\vartheta_1 + \varrho_0 - 2\varrho_a).$$

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} v_a &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)}}{4\pi c} \left\{ \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\Phi(\varrho + i\vartheta_1) d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta)}} + \int_{\vartheta}^{2\pi - \vartheta} \frac{i\Phi(\varrho + i\vartheta_1) d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \vartheta_1)}} \right\} \\ v_b &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)}}{4\pi c} \left\{ - \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\Phi(\varrho + i\vartheta_1) d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta)}} + \int_{\vartheta}^{2\pi - \vartheta} \frac{i\Phi(\varrho + i\vartheta_1) d\vartheta_1}{\sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \vartheta_1)}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(6') \quad v_a + v_b = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)}}{2\pi c} \int_{\vartheta}^{2\pi - \vartheta} \frac{i\Phi(\varrho + i\vartheta_1) d\vartheta_1}{\sqrt{2}(\cos \vartheta - \cos \vartheta_1)}.$$

Zu erwähnen ist in Betreff der Ableitung nur, dass an Stelle der in § 2. vorkommenden Umformung eines bestimmten Integrales mit den Grenzen $-\vartheta$ und ϑ durch Verwandlung von ϑ_1 in $-\vartheta_1$ hier die Umformung eines Integrales mit den Grenzen ϑ und $2\pi - \vartheta$ durch Verwandlung von ϑ_1 in $2\pi - \vartheta_1$ tritt.

§ 4.

Verallgemeinerung der erhaltenen Resultate und Darstellung derselben in übersichtlicherer Form.

Um die weiter unten (§ 6.) auszuführende Uebertragung der gewonnenen Resultate auf zwei nicht concentrische Kugelflächen vorzubereiten, soll hier zunächst die specielle Voraussetzung, dass der Centralpunkt X_0 auf der positiven X -Axe liege, fallen gelassen und statt X_0 ein an beliebiger Stelle zwischen F_a und F_b gelegener Punkt P_0 gewählt werden, dessen Coordinaten durch die Gleichungen

$$x_0 = ce^0 \cos \vartheta_0, \quad y_0 = ce^0 \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0, \quad z_0 = ce^0 \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0$$

gegeben seien. Ebenso werden die Coordinaten des Punktes P zwischen F_a und F_b , auf welchen die Potentialfunctionen bezogen werden, ausgedrückt durch

$$x = ce^l \cos \vartheta, \quad y = ce^l \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = ce^l \sin \vartheta \sin \varphi,$$

worin φ den zwischen 0 und 2π zu wählenden Winkel bedeutet, den die durch die X -Axe und P gelegte Ebene mit der XY -Ebene bildet, während die Bedeutung von ϱ und ϑ dieselbe geblieben ist. Unter r ist jetzt also nicht die Entfernung PX_0 , sondern PP_0 zu verstehen, und dem entsprechend, wenn P_a und P_b Punkte auf F_a und F_b bezeichnen, unter r_a und r_b die Entfernungen P_aP_0 und P_bP_0 . Es gilt daher z. B. für r die Gleichung

$$(9) \quad r = ce^{\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_0)} \sqrt{2(\cos(i\vartheta - i\vartheta_0) - \cos \omega)},$$

wenn

$$\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0),$$

also ω der zwischen 0 und π zu wählende Winkel ist, den die vom Anfangspunkte A nach P und P_0 gezogenen Radienvectoren mit einander bilden. Da die vorgenommenen Abänderungen nur die Wirkung haben, dass die Dichtigkeiten der elektrischen Schichten constant werden für alle Punkte solcher Kreise, deren Ebenen auf der Axe AP_0 (statt auf AX_0) senkrecht stehen, so ergeben sich die Ausdrücke

für die Potentialfunctionen durch blosse Verwandlung von ϑ in ω . Wenn man nun in diese Ausdrücke die Werthe von F und Φ wirklich einsetzt, so zerfällt jedes der Integrale in drei Theile, von denen der erste nach (1) und (1') sich auf $\epsilon : 2r$, resp. $1 : 2r$ reducirt, wobei jedoch zu beachten ist, dass bei Anwendung dieser Zerlegung die Werthe der v für $q = q_0$, d. h. auf der durch den Centralpunkt P_0 gehenden concentrischen Kugelfläche unter unbestimmter Form erscheinen. Im Uebrigen treten nur die folgenden vier bestimmten Integrale auf, in denen der Integrationsbuchstabe ϑ_1 durch λ ersetzt worden ist:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} J_1 &= \frac{2K'}{\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q - q_0 + i\lambda) \cdot \frac{d\lambda}{M}, \\ J_2 &= \frac{2K'}{\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q + q_0 - 2q_a + i\lambda) \cdot \frac{d\lambda}{M}, \\ J_3 &= \frac{2iK'}{\pi} \int_{\omega}^{2\pi - \omega} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q - q_0 + i\lambda) \cdot \frac{d\lambda}{N}, \\ J_4 &= \frac{2iK'}{\pi} \int_{\omega}^{2\pi - \omega} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q + q_0 - 2q_a + i\lambda) \cdot \frac{d\lambda}{N}, \end{aligned} \right. \\ \text{wenn: } M = \sqrt{2(\cos \lambda - \cos \omega)}, \quad N = \sqrt{2(\cos \omega - \cos \lambda)}.$$

Aus den in § 1. angegebenen Gründen sind für $\omega = 0$ und $\omega = \pi$ diese Integrale durch die Grenzwerte zu ersetzen, die sie für $\omega = +0$ und $\omega = \pi - 0$ annehmen, und man findet zunächst, indem man $\sin \frac{1}{2} \lambda = \sin \frac{1}{2} \omega \cos \psi$, resp. $\cos \frac{1}{2} \lambda = \cos \frac{1}{2} \omega \cos \psi$, setzt, wodurch die Integrationsgrenzen in Bezug auf ψ die Werthe 0 und π erhalten:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Für } \omega = 0: J_1 &= 2K' \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q - q_0). \\ \text{Für } \omega = \pi: J_3 &= 2iK' \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q - q_0 + i\pi) \\ &= 2K' \Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q - q_0). \end{aligned} \right.$$

Die entsprechenden Grenzwerte von J_2 und J_4 erhält man hieraus, indem man $q_0 - 2q_a$ an Stelle von $-q_0$ schreibt. Die allgemeinen Werthe von J_1 und J_3 können auch unter den Formen dargestellt werden:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} J_1 &= \frac{2K'}{\pi} \int_0^{\omega} \left\{ \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q - q_0 + i\lambda) + \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q - q_0 - i\lambda) \right\} \frac{d\lambda}{M}, \\ J_3 &= \frac{2iK'}{\pi} \int_{\omega}^{\pi} \left\{ \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q - q_0 + i\lambda) - \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q - q_0 - i\lambda) \right\} \frac{d\lambda}{N}, \end{aligned} \right.$$

und hieraus ergeben sich die Grenzwerthe:

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \text{Für } \omega = \pi : J_1 \\ = \frac{K'}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \cotam \frac{K'}{\pi} (\varphi - \varphi_0 + i\lambda) + \cotam \frac{K'}{\pi} (\varphi - \varphi_0 - i\lambda) \right\} \frac{d\lambda}{\cos \frac{1}{2} \lambda} . \\ \text{Für } \omega = 0 : J_3 \\ = \frac{iK'}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \cotam \frac{K'}{\pi} (\varphi - \varphi_0 + i\lambda) - \cotam \frac{K'}{\pi} (\varphi - \varphi_0 - i\lambda) \right\} \frac{d\lambda}{\sin \frac{1}{2} \lambda} . \end{array} \right.$$

Wollte man übrigens in allen Integralen die elliptischen Functionen mit complexem Argumente durch solche mit reellem und solche mit rein imaginärem Argumente ersetzen, so würde dies durch Anwendung der Formeln

$$\begin{aligned} \cot am (u + iv) + \cot am (u - iv) &= \frac{2 \sin am u \cos am u \Delta am iv}{\sin^2 am u - \sin^2 am iv} \\ \cot am (u + iv) - \cot am (u - iv) &= \frac{-2 \sin am iv \cos am iv \Delta am u}{\sin^2 am u - \sin^2 am iv} \end{aligned}$$

ohne Weiteres geschehen können.

Die in § 2. und § 3. vorkommenden Potentialfunctionen, welche, wie wir vorhin gesehen, unmittelbar auf einen beliebigen Centralpunkt P_0 übertragen werden können, mögen fortan durch

$$v_a^{-1,1} \text{ und } v_b^{-1,1}, \text{ respective } v_a^{1,1} \text{ und } v_b^{1,1}$$

bezeichnet werden, wodurch angedeutet werden soll, dass das Gesammpotential an den Oberflächen die Werthe

$$-\frac{1}{r_a} \text{ und } \frac{1}{r_b}, \text{ respective } \frac{1}{r_a} \text{ und } \frac{1}{r_b}$$

besitzt. Man erhält dann z. B.

$$v_a^{-1,1} = \frac{e+1}{2r} - \frac{e^{-\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_0)}}{4\pi c} (J_1 + J_2 + J_3 + J_4).$$

Multiplicirt man diese Gleichung noch mit $2r$, substituirt auf der rechten Seite für r den in (9) angegebenen Werth und setzt zur Abkürzung

$$(14) \quad \frac{1}{2\pi} \sqrt{2 \cos (i\varphi - i\varphi_0) - 2 \cos \omega} = \sigma;$$

und nimmt man dieselben Umformungen in allen übrigen Fällen vor, so gelangt man zu den folgenden Formeln:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2rv_a^{-1,1} = e + 1 - \sigma(J_1 + J_2 + J_3 + J_4), \\ 2rv_b^{-1,1} = e - 1 - \sigma(J_1 + J_2 - J_3 - J_4), \\ r(v_a^{-1,1} + v_b^{-1,1}) = e - \sigma(J_1 + J_2). \end{array} \right.$$

$$(16) \quad \begin{cases} 2rv_{a^{1,1}} = 1 + e - \sigma(J_1 - J_2 + J_3 - J_4), \\ 2rv_{b^{1,1}} = 1 - e - \sigma(-J_1 + J_2 + J_3 - J_4), \\ r(v_{a^{1,1}} + v_{b^{1,1}}) = 1 - \sigma(J_3 - J_4). \end{cases}$$

Endlich kann man die Resultate noch dadurch verallgemeinern, dass man diejenigen Potentialfunctionen $v_a^{\alpha,\beta}$ und $v_b^{\alpha,\beta}$ sucht, deren Summe auf der Fläche F_a den Werth $\alpha : r_a = \alpha : P_a P_0$ und auf der Fläche F_b den Werth $\beta : r_b = \beta : P_b P_0$ annimmt, wo α und β irgend welche constante Werthe bedeuten. Es ergibt sich nun nach bekannten Sätzen

$$v_a^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) v^{-1,1} + \frac{1}{2}(\beta + \alpha) v^{1,1}$$

für jeden der beiden bei v hinzuzufügenden Indices α und β . Daher ist:

$$(17) \quad \begin{cases} 2rv_a^{\alpha,\beta} = \beta(1 + e) - \sigma(\beta J_1 - \alpha J_2 + \beta J_3 - \alpha J_4), \\ 2rv_b^{\alpha,\beta} = \alpha(1 - e) - \sigma(-\alpha J_1 + \beta J_2 + \alpha J_3 - \beta J_4), \\ r(v_a^{\alpha,\beta} + v_b^{\alpha,\beta}) = \gamma + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sigma(J_1 + J_2) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sigma(J_3 - J_4), \end{cases}$$

worin wiederum die J durch die Gleichungen (10) gegeben sind und γ die Bedeutung hat:

$$\gamma = \frac{1}{2}\alpha(1 - e) + \frac{1}{2}\beta(1 + e).$$

Da aber $e = -1$ oder $= 1$, je nachdem ϱ kleiner oder grösser als ϱ_0 , so hat γ den constanten Werth α für alle zwischen ϱ_a und ϱ_0 und den constanten Werth β für alle zwischen ϱ_0 und ϱ_b gelegenen Werthe der Variablen ϱ . Ueber den Fall $\varrho = \varrho_0$ ist schon weiter oben in diesem Paragraphen gesprochen worden.

§ 5.

Die Dichtigkeiten und Elektricitätsmengen der Belegungen der beiden concentrischen Kugelflächen.

Die Dichtigkeit $k_a^{\alpha,\beta}$ der auf der Fläche F_a befindlichen elektrischen Schicht ist durch die Formel

$$-4\pi k_a^{\alpha,\beta} = \frac{e^{-\varrho a}}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(v_a^{\alpha,\beta} + v_b^{\alpha,\beta} - \frac{\alpha}{r} \right) \right\} (\varrho = \varrho_a)$$

bestimmt. Benutzt man nun den in der dritten der Gleichungen (17) enthaltenen Werth und beachtet, dass für $\varrho = \varrho_a$:

$$J_2 = -J_1, \quad J_4 = J_3, \quad \frac{\partial J_2}{\partial \varrho} = -\frac{\partial J_1}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial J_4}{\partial \varrho} = -\frac{\partial J_3}{\partial \varrho}$$

wird, so erhält man:

$$-4\pi k_a^{\alpha,\beta} = \frac{e^{-\varrho a}}{c} \frac{\sigma_a}{r_a} \left\{ (\alpha - \beta) \frac{\partial J_1}{\partial \varrho} - (\alpha + \beta) \frac{\partial J_3}{\partial \varrho} \right\} (\varrho = \varrho_a),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) und (9):

$$-4\pi k_a^{\alpha,\beta} = \frac{e^{-\frac{1}{2}q_0 - \frac{3}{2}q_a}}{2\pi c^2} \left\{ (\alpha - \beta) \frac{\partial J_1}{\partial q} - (\alpha + \beta) \frac{\partial J_3}{\partial q} \right\} (q = q_a),$$

und da die Differentiation der Integrale J_1 und J_3 nach q unter dem Integralzeichen ausgeführt werden darf:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} k_a^{\alpha,\beta} &= \frac{K'^2 e^{-\frac{1}{2}q_0 - \frac{3}{2}q_a}}{4\pi c^2} \left\{ (\alpha - \beta) S_a + (\alpha + \beta) T_a \right\}, \text{ wenn:} \\ S_a &= \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q_a - q_0 + i\lambda)}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q_a - q_0 + i\lambda)} \frac{d\lambda}{M}, \\ T_a &= \int_{\omega}^{2\pi - \omega} \frac{-i\Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q_a - q_0 + i\lambda)}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q_a - q_0 + i\lambda)} \frac{d\lambda}{N}. \end{aligned} \right.$$

Das Integral S_a reducirt sich für $\omega = 0$, d. h. in dem dem Punkte P_0 am nächsten liegenden Punkte der Kugelfläche F_a auf den Werth

$$\frac{\pi \Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q_0 - q_a)}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q_0 - q_a)},$$

und das Integral T_a für $\omega = \pi$, d. h. in dem am weitesten von P_0 entfernten Punkte auf den Werth

$$-i\pi \Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q_a - q_0 + i\pi) \frac{K'}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q_a - q_0 + i\pi)} = \pi k^2 \sin \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q_0 - q_a) \cos \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q_0 - q_a).$$

Um die Dichtigkeit $k_a^{\alpha,\beta}$ in irgend einem Punkte P_b der Kugelfläche F_b zu erhalten, hat man nur nöthig in dem für $k_a^{\alpha,\beta}$ geltenden Ausdrücke a in b zu verwandeln und denselben ausserdem mit dem Factor -1 zu multipliciren.

Was die auf den concentrischen Kugelflächen ausgebreiteten Elektricitätsmengen $m_a^{\alpha,\beta}$ und $m_b^{\alpha,\beta}$ anbetrifft, so lassen sich dieselben zwar einzeln, die erste nach § 1. α), die zweite nach den Formeln für $v_b^{-1,1}$ und $v^{1,1}$ in in § 2. Nr. 2) und § 3. Nr. 2'), berechnen, man gelangt aber viel einfacher durch die Aufstellung der beiden folgenden Relationen zum Ziel. Da bekanntlich die Summe aller auf geschlossenen Flächen befindlichen Elektricitätsmengen gleich ist dem Grenzwerte des Productes aus dem Gesamtpotential in Bezug auf einen unendlich entfernten Punkt und der Entfernung des letzteren von einem im

Endlichen gelegenen Punkte (z. B. P_0), und da im vorliegenden Falle das Gesammtpotential in dem Raume ausserhalb F_b den Werth $\beta : r$ hat, so gilt die Gleichung

$$m_a^{\alpha, \beta} + m_b^{\alpha, \beta} = \beta.$$

Ferner ist, weil die Summe der Potentiale in dem Raume innerhalb $F_a = \alpha : r$ und folglich im Kugelmittelpunkte $= \alpha : AP_0 = \alpha : ce^{\varrho_0}$, und weil das Potential jeder einzelnen Kugelfläche in Bezug auf den Mittelpunkt gleich ist dem Quotienten ihrer Elektrizitätsmenge und ihres Radius:

$$e^{-\varrho_a} m_a^{\alpha, \beta} + e^{-\varrho_b} m_b^{\alpha, \beta} = \alpha e^{-\varrho_0}.$$

Daher hat man:

$$(19) \quad m_a^{\alpha, \beta} = \frac{\alpha e^{-\varrho_0} - \beta e^{-\varrho_b}}{e^{-\varrho_a} - e^{-\varrho_b}}; \quad m_b^{\alpha, \beta} = \frac{\beta e^{-\varrho_a} - \alpha e^{-\varrho_0}}{e^{-\varrho_a} - e^{-\varrho_b}}.$$

§ 6.

Die Vertheilung der Elektrizität auf zwei nicht concentrischen Kugelflächen.

Durch die von Herrn W. Thomson in die Potentialtheorie eingeführte Methode der reciproken Radienvectoren kann man von der Green'schen Belegung zweier concentrischen Kugelflächen (d. h. von der den Oberflächenwerthen $1:r_a$ und $1:r_b$ des Potentials entsprechenden Belegung) übergehen zu derjenigen Belegung zweier nicht concentrischen Kugeln, deren Potential an den Oberflächen den Werth 1 hat; und von dieser durch nochmalige Transformation (aus einem anderen Punkte) zu der Green'schen Belegung zweier nicht concentrischen Kugeln. Die von mir in Betreff der Oberflächenwerthe gemachten allgemeineren Annahmen ($\alpha : r_a$ und $\beta : r_b$) ändern in der Behandlung nichts. Das angedeutete Verfahren ist noch deshalb einer Vereinfachung fähig, weil bekanntlich wiederholte Transformationen durch reciproke Radienvectoren (von gleichzeitig eintretenden neben-sächlichen Veränderungen abgesehen) auch durch eine einzige ersetzt werden können. Besonders geeignet für die Anwendung erscheint die von Herrn C. Neumann*) gegebene Form des Fundamentalsatzes der Theorie. Um in der Darstellung keine Lücke zu lassen, und da ich den Satz doch dem vorliegenden speciellen Falle und den im Vorhergehenden angewandten Bezeichnungen anpassen müsste, will ich den (in etwas anderer Form geführten) Beweis des Satzes in die Darstellung aufnehmen.

*) Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Leipzig 1877. (S. 363 u. 364.)

Auf der positiven X-Axe werde in der Entfernung c vom Kugelmittelpunkte A ein Punkt B als Pol der Transformation angenommen, und zu jedem Punkte P der correspondirende P' construirt, d. h. derjenige, der mit P auf demselben durch B begrenzten Strahle und in solcher Entfernung liegt, dass

$$BP \cdot BP' = c^2, \text{ oder } BP : BA = BA : BP'.$$

Da hiernach $\triangle AP'B \sim PAB$, so ist, da nach dem Früheren $\angle PAB = \vartheta$ und $AP : AB = e^e$ ist:

$$\angle AP'B = \vartheta \text{ und } AP' : BP' = e^e.$$

Auf diese Weise haben sich zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume dieselben Coordinaten ergeben, welche Herr C. Neumann seiner Lösung des Problems für nicht concentrische Kugeln zu Grunde gelegt hat.

Zu den constanten Werthen $\varrho = \varrho_a$ und $\varrho = \varrho_b$ gehören die (einander nicht schneidenden) nicht concentrischen Kugelflächen F'_a und F'_b , welche die correspondirenden zu den bisher betrachteten F_a und F_b sind. Man kann, ohne die Allgemeinheit der Resultate zu beeinträchtigen, annehmen, dass ϱ_b positiv sei, also F'_b den Pol B umschliesse. Je nachdem dann ϱ_a (welches $< \varrho_b$) negativ oder positiv, umschliesst F'_a den Pol A oder ebenfalls den Pol B und zwar auch die Fläche F'_b . Für $\varrho_a = 0$ würde F'_a übergehen in die auf der Strecke AB in ihrem Halbirungspunkte senkrecht stehende Ebene, die gemeinschaftliche Potenzebene aller durch die Gleichung $\varrho = \text{Const.}$ dargestellten Kugelflächen. Drei Paare correspondirender Punkte von F_a und F'_a (und ebenso von F_b und F'_b) liegen, zufolge des constanten Werthes des Productes $BP_a \cdot BP'_a$ stets auf einer und derselben Kugelfläche. Daraus ergibt sich insbesondere, dass durch P_a und P'_b eine F_a und F'_a berührende Kugelfläche gelegt werden kann, dass also unendlich kleine correspondirende Flächenelemente von F_a und F'_a sich wie die Quadrate ihrer Abstände vom Punkte B verhalten.

Wir betrachten nun, zu dem Beweise des oben erwähnten Satzes übergehend, die Oberflächenpotentiale

$$v_a = \int \frac{dm_a}{PP_a}, \quad v'_a = \int \frac{dm'_a}{P'P'_a}, \quad v_b = \int \frac{dm_b}{PP_b}, \quad v'_b = \int \frac{dm'_b}{P'P'_b},$$

und setzen fest, dass für correspondirende Masselemente die Beziehungen gelten

$$dm'_a = \frac{BP'_a}{BP'_0} dm_a, \quad dm'_b = \frac{BP'_b}{BP'_0} dm_b,$$

worin P'_0 der dem Centralpunkte P_0 correspondirende Punkt ist. Da nun $\triangle BP'P'_a \sim BP_aP$, also $P'P'_a = \frac{BP'_a}{BP} \cdot PP_a$, so ist:

$$\frac{dm'_a}{P'P'_a} = \frac{BP}{BP'_0} \cdot \frac{dm_a}{PP'_a}, \text{ also } v'_a = \frac{BP}{BP'_0} v_a, \text{ oder } v'_a = \frac{PP_0}{P'P'_0} v_a.$$

Folglich stehen die Potentiale der einzelnen correspondirenden Belegungen zu einander in den Beziehungen:

$$P'P'_0 \cdot v'_a = PP_0 \cdot v_a, \quad P'P'_0 \cdot v'_b = PP_0 \cdot v_b,$$

und für die Summe der Potentiale gilt daher die Gleichung:

$$P'P'_0(v'_a + v'_b) = PP_0(v_a + v_b).$$

Nun sind durch die Gleichungen (17) v_a und v_b , für den Centralpunkt P_0 , in Bezug auf einen beliebigen Punkt P des nichtleitenden Raumes so bestimmt worden, dass $v_a + v_b$ auf den Oberflächen F_a und F_b resp. die Werthe $\alpha : P_a P_0$ und $\beta : P_b P_0$ annimmt. Mithin besitzen die durch dieselben Gleichungen zu berechnenden Potentiale v'_a und v'_b , für welche der Centralpunkt P'_0 zu Grunde gelegt ist, und welche sich auf den Punkt P' des correspondirenden (nichtleitenden) Raumes beziehen, die Eigenschaft, dass ihre Summe auf F'_a und F'_b resp. die Werthe $\alpha : P'_a P'_0$ und $\beta : P'_b P'_0$ erhält.

Es bleibt noch übrig die Dichtigkeiten der neuen Belegungen zu bestimmen. Nun nimmt die oben für die Massenelemente von F_a und F'_a aufgestellte Bedingung, wenn man diese Elemente durch die Flächenelemente ds_a und ds'_a und die Dichtigkeiten k_a und k'_a ausdrückt, die Form an

$$k'_a = k_a \cdot \frac{BP'_a}{BP'_0} \cdot \frac{ds_a}{ds'_a} = k_a \cdot \frac{BP'_a}{BP'_0} \cdot \frac{BP_a^2}{BP'^2_a} = k_a \cdot \frac{c^4}{BP'^3_a \cdot BP'_0},$$

und dem entsprechend ist der Werth von k'_b . Man findet nun aus den Gleichungen

$$AP'^2 + BP'^2 - 2AP' \cdot BP' \cos \vartheta = c^2, \quad AP' = BP' \cdot e^q,$$

dass:

$$BP' = \frac{c}{\tau} e^{-\frac{1}{2}q}, \quad \text{wenn } \tau = \sqrt{2 \cos iq - 2 \cos \vartheta},$$

$$BP'_a = \frac{c}{\tau_a} e^{-\frac{1}{2}q_a}, \quad \text{wenn } \tau_a = \sqrt{2 \cos iq_a - 2 \cos \vartheta},$$

und zwei eben solche Gleichungen gelten für die Indices b und 0 . Endlich stellt man noch leicht $P'P'_0$ (oder r') in der Form dar:

$$r' = r \cdot \frac{BP'_0}{BP} = \frac{rBP' \cdot BP'_0}{c^2} = \frac{c\sqrt{2 \cos (iq - iq_0) - 2 \cos \omega}}{\tau \cdot \tau_0} = \frac{2\pi c\sigma}{\tau \tau_0}.$$

Die für die Vertheilung der Elektricität auf zwei nicht concentrischen Kugelflächen erhaltenen Resultate sollen nun, unter Fortlassung der Accente, übersichtlich zusammengestellt werden:

Es sei c die Entfernung zweier festen Punkte A und B . Die Lage eines Punktes P im Raume werde bestimmt durch

$$\vartheta = \angle APB, \quad \varphi = \log (AP : BP)$$

und den Neigungswinkel φ der Ebene APB und einer festen durch die Gerade AB gelegten Ebene. Die dem constanten Werthe φ_a entsprechende Kugelfläche F_a und die dem grösseren und positiven constanten Werthe φ_b entsprechende Kugelfläche F_b mögen zusammen die Begrenzungen eines Nichtleiters, jede einzelne für sich die Begrenzung eines Leiters der Elektrizität bilden. Im nichtleitenden Raume sei der Centralpunkt $P_0(\varphi_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ gegeben, und durch $P_a(\varphi_a, \vartheta, \varphi)$ und $P_b(\varphi_b, \vartheta, \varphi)$ mögen solche Punkte bezeichnet werden, welche resp. auf F_a und F_b liegen. Dann sind die Dichtigkeiten k derjenigen elektrischen Belegungen von F_a und F_b , deren Gesamtpotential in P_a und P_b resp. die Werthe

$$\frac{\alpha}{P_0 P_a} \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{P_0 P_b}$$

besitzt, durch die Formeln bestimmt

$$(20) \quad \begin{cases} k_a^{\alpha, \beta} = \frac{K'^2 \tau_a \tau_a^3}{4 \pi^2 c^2} \{(\alpha - \beta) S_a + (\alpha + \beta) T_a\} \\ k_b^{\alpha, \beta} = - \frac{K'^2 \tau_b \tau_b^3}{4 \pi^2 c^2} \{(\alpha - \beta) S_b + (\alpha + \beta) T_b\}, \end{cases}$$

und die Potentiale v der einzelnen Belegungen in Bezug auf irgend einen Punkt $P(\varphi, \vartheta, \varphi)$ des nichtleitenden Raumes durch

$$(21) \quad \begin{cases} 2r \cdot v_a^{\alpha, \beta} = \beta(1 + \epsilon) - \sigma(\beta J_1 - \alpha J_2 + \beta J_3 - \alpha J_4) \\ 2r \cdot v_b^{\alpha, \beta} = \alpha(1 - \epsilon) - \sigma(-\alpha J_1 + \beta J_2 + \alpha J_3 - \beta J_4). \end{cases}$$

In diesen Formeln ist

$$\begin{aligned} \tau_a &= \sqrt{2 \cos i \varphi_a - 2 \cos \vartheta}, & \tau_b &= \sqrt{2 \cos i \varphi_b - 2 \cos \vartheta}, \\ \tau_0 &= \sqrt{2 \cos i \varphi_0 - 2 \cos \vartheta_0}, & \tau &= \sqrt{2 \cos i \varphi - 2 \cos \vartheta}, \\ \sigma &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2 \cos(i\varphi - i\varphi_0) - 2 \cos \omega}, & r &= \frac{2\pi c \sigma}{\tau \tau_0}, \end{aligned}$$

$$\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Die Grösse ϵ bedeutet den Werth -1 für $\varphi_a \leq \varphi < \varphi_0$, dagegen den Werth 1 für $\varphi_0 < \varphi \leq \varphi_b$; für $\varphi = \varphi_0$ ist in jeder der Gleichungen (21) die rechte Seite durch den Grenzwert zu ersetzen, den sie für $\varphi = \varphi_0 \pm 0$ annimmt. Unter S_a und S_b sind die in § 5., Nr. 18), unter S_b und T_b die durch Vertauschung der Indices a und b daraus hervorgehenden, und unter J_1, J_2, J_3, J_4 die in § 4., Nr. 10) an-

gegebenen Integrale zu verstehen. Die in den Integralen vorkommenden elliptischen Functionen beziehen sich auf einen solchen Modul, dass (nach den Bezeichnungen in Jacobi's Fundamenta nova):

$$\frac{\pi K}{K'} = q_b - q_a, \text{ also } q = e^{-\frac{\pi^2}{q_b - q_a}}, \quad q' = e^{-(q_b - q_a)}.$$

Beiläufig mag noch erwähnt werden, dass für die Radien a und b und die Centrale g der beiden Kugeln die Gleichungen gelten:

$$a = \pm \frac{c}{2} \frac{i}{\sin i q_a} (q_a \geq 0), \quad b = \frac{c}{2} \frac{i}{\sin i q_b},$$

$$g = \mp \frac{c}{2} (i \cot i q_b - i \cot i q_a), \quad (q_a \geq 0),$$

und dass die Constante c aus den Werthen von a , b , g durch die Formel

$$g \cdot c = \sqrt{(g + a + b)(g - a - b)(g + a - b)(g - a + b)}$$

berechnet werden kann.

§ 7.

Vertheilung gegebener Elektricitätsmengen, ohne Einwirkung äusserer Kräfte.

Nimmt man q_a negativ an, betrachtet also zwei volle kugelförmige Leiter, und verwandelt man α und β in $\alpha \cdot BP_0$ und $\beta \cdot BP_0$ und lässt dann den Centralpunkt P_0 in unendliche Ferne rücken, so nähert sich für einen endlich entfernten Punkt P das Verhältniss $r : BP_0$ der Einheit; die durch die Annahmen $q_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$ zu erhaltenen Grenzwerte der J mögen durch $\Im$, die von S und T durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$, die von k durch $\mathfrak{k}$, die von v durch $\mathfrak{v}$ bezeichnet werden. Man überzeugt sich dann leicht, dass das Product $\mathfrak{v} \cdot AP$, wenn man jetzt (wo die Coordinaten des Centralpunktes in den Formeln nicht mehr enthalten sind) den Punkt P sich unendlich weit entfernen lässt, einem endlichen Grenzwerte m zustrebt, dass also $\mathfrak{v}$ auch der im Unendlichen von einer Potentialfunction zu erfüllenden Bedingung Genüge leistet. Daher gelangt man zu den folgenden Resultaten:

Diejenigen elektrischen Belegungen der beiden kugelförmigen Leiter, deren Gesammtpotential im Innern des ersten Leiters den constanten Werth α und im Innern des zweiten den constanten Werth β besitzt, haben die Dichtigkeiten

$$(22) \quad \begin{cases} \mathfrak{r}_a^{\alpha, \beta} = -\frac{K'^2 \tau_a^3}{4\pi^4 c} \{(\alpha - \beta) \mathfrak{S}_a + (\alpha + \beta) \mathfrak{T}_a\} \\ \mathfrak{r}_b^{\alpha, \beta} = -\frac{K'^2 \tau_b^3}{4\pi^4 c} \{(\alpha - \beta) \mathfrak{S}_b + (\alpha + \beta) \mathfrak{T}_b\}, \end{cases}$$

und ihre Potentiale die Werthe

$$(23) \quad \begin{cases} v_a^{\alpha, \beta} = \frac{1}{2} \beta (1 + e) - \frac{\tau}{4\pi} (\beta \mathfrak{S}_1 - \alpha \mathfrak{S}_2 + \beta \mathfrak{S}_3 - \alpha \mathfrak{S}_4), \\ v_b^{\alpha, \beta} = \frac{1}{2} \alpha (1 - e) - \frac{\tau}{4\pi} (-\alpha \mathfrak{S}_1 + \beta \mathfrak{S}_2 + \alpha \mathfrak{S}_3 - \beta \mathfrak{S}_4). \end{cases}$$

Hierin ist (nach 12):

$$(24) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_1 = \frac{2K'}{\pi} \int_0^{\vartheta} \left\{ \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho + i\lambda) + \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho - i\lambda) \right\} \frac{d\lambda}{\sqrt{2 \cos \lambda - 2 \cos \vartheta}}, \\ \mathfrak{S}_3 = \frac{2iK'}{\pi} \int_0^{\vartheta} \left\{ \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho + i\lambda) - \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho - i\lambda) \right\} \frac{d\lambda}{\sqrt{2 \cos \lambda - 2 \cos \vartheta}}, \end{cases}$$

während $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_4$ aus $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_3$ durch Verwandlung von ϱ in $\varrho - 2\varrho_a$ entstehen, und $\mathfrak{E}_a, \mathfrak{I}_a, \mathfrak{E}_b, \mathfrak{I}_b$ aus

$$\mathfrak{E} = -\frac{\pi^2}{2K'^2} \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial \varrho} \quad \text{und} \quad \mathfrak{I} = \frac{\pi^2}{2K'^2} \frac{\partial \mathfrak{S}_3}{\partial \varrho}$$

durch Einsetzung der Werthe $\varrho = \varrho_a$ und $\varrho = \varrho_b$ gebildet werden können.

Drückt man in der ersten der Gleichungen (23) das erste Glied der rechten Seite nach (1) und (1') durch die Formel aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \beta (1 + e) &= \frac{\beta \tau}{4\pi} \int_0^{\vartheta} \left(\frac{1}{i \sin \frac{1}{2} (\lambda - i\varrho)} - \frac{1}{i \sin \frac{1}{2} (\lambda + i\varrho)} \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{2 \cos \lambda - 2 \cos \vartheta}} \\ &\quad + \frac{\beta \tau}{4\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2} (\lambda - i\varrho)} + \frac{1}{\sin \frac{1}{2} (\lambda + i\varrho)} \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{2 \cos \lambda - 2 \cos \vartheta}}, \end{aligned}$$

vereinigt das erste Integral mit $\mathfrak{S}_1$, das zweite mit $\mathfrak{S}_3$, multiplicirt dann die Gleichung mit $BP \left(= \frac{c}{\tau} e^{-\frac{1}{2}e} \right)$ und lässt schliesslich $BP = \infty$ d. h. $\varrho = 0$, $\vartheta = 0$ werden, so erhält man für die auf der Kugel, welche den Pol A umgiebt, befindliche Elektrizitätsmenge den Ausdruck:

$$(25) \quad m_a^{\alpha, \beta} = \alpha \frac{cK'}{2\pi} \cot \operatorname{am} \left(\frac{-2K'\varrho_a}{\pi} \right) + \beta \frac{c}{4\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2} \lambda} - \frac{2iK'}{\pi} \cot \operatorname{am} \frac{iK'\lambda}{\pi} \right) \frac{d\lambda}{\sin \frac{1}{2} \lambda} \\ + \alpha \frac{cK'}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \left\{ i \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (-2\varrho_a + i\lambda) - i \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (-2\varrho_a - i\lambda) \right\} \frac{d\lambda}{\sin \frac{1}{2} \lambda}.$$

Hieraus ergibt sich $m_b^{\alpha, \beta}$, indem man α mit β und $-\varrho_a$ mit ϱ_b vertauscht. Nach diesen Formeln lassen sich α und β berechnen, wenn die den Kugeln mitgetheilten Elektrizitätsmengen gegeben sind. Es

ist leicht zu sehen, dass die Functionen unter den Integralzeichen auch für $\lambda = 0$ endliche Werthe besitzen. Zur numerischen Berechnung der Integrale kann man sich im Allgemeinen mit Vortheil der Näherungsformel*) bedienen:

$$\int_0^\pi f(\cos \lambda) d\lambda = \frac{\pi}{n} \left\{ f\left(\cos \frac{\pi}{2n}\right) + f\left(\cos \frac{3\pi}{2n}\right) + \cdots + f\left(\cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \right\}.$$

Auch zu der Berechnung der Grössen v und t (und der allgemeineren v und k) kann dieselbe Formel angewendet werden. Denn jede dieser Grössen lässt sich durch zwei Integrale ausdrücken, welche resp. die Formen haben

$$\int_0^\vartheta f(\lambda) \frac{\cos \frac{1}{2} \lambda d\lambda}{\sqrt{2 \cos \lambda - 2 \cos \vartheta}} \quad \text{und} \quad \int_0^\pi f_1(\lambda) \frac{\sin \frac{1}{2} \lambda d\lambda}{\sqrt{2 \cos \vartheta - 2 \cos \lambda}},$$

und in denen die Functionen f und f_1 zwischen und auch noch an den Integrationsgrenzen endliche Werthe haben. Diese Integrale gehen aber in solche mit den Grenzen 0 und π über, wenn im ersten $\sin \frac{1}{2} \lambda = \sin \frac{1}{2} \vartheta \cos \frac{1}{2} \mu$ und im zweiten $\cos \frac{1}{2} \lambda = \cos \frac{1}{2} \vartheta \cos \frac{1}{2} \nu$, und in Folge dessen

$$\frac{-2 \cos \frac{1}{2} \lambda d\lambda}{\sqrt{2 \cos \lambda - 2 \cos \vartheta}} = d\mu \quad \text{und} \quad \frac{2 \sin \frac{1}{2} \lambda d\lambda}{\sqrt{2 \cos \vartheta - 2 \cos \lambda}} = d\nu$$

gesetzt wird.

§ 8.

Betrachtung des Falles zweier einander berührenden Kugeln.

Ganz ähnlich wie für zwei concentrische Kugeln kann das Problem der Elektricitätsvertheilung auch bei zwei parallelen Ebenen behandelt und durch die Methode der reciproken Radienvectoren die Lösung auf zwei einander berührende Kugeln übertragen werden. Man kann jedoch die für diesen Fall geltenden Resultate auch aus den in den beiden vorhergehenden §§ behandelten allgemeineren, wenn auch in weniger strenger Weise, durch einen Grenzübergang ableiten. Man verwandle $\vartheta, \varphi, \varphi_a \cdots$ in $c\vartheta, c\varphi, c\varphi_a \cdots$ und lasse dann c , d. h. den Abstand der Pole A und B und folglich auch den kürzesten Abstand der Kugeln unendlich klein werden. Da jetzt ϑ durch die Gleichung $AB \cdot \vartheta = \angle APB$, oder da $\angle APB$ unendlich klein, durch $AB \cdot \vartheta = \sin \angle APB$ defnirt ist, so bedeutet das neue ϑ den reciproken

*) Vergl. meine „Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen“ im 63. Bande von Borchardt's Journal (S. 157). — In dem in der letzten Zeile auf S. 156 angegebenen Werthe von α_m ist statt $2m + 1$ zu setzen $2m - 1$.

Werth des Durchmessers des um das Dreieck ABP beschriebenen Kreises, d. h. des Kreises, der durch P geht und die X -Axe im Punkte A berührt. Der Parameter ϱ ist jetzt definirt durch $AB \cdot \varrho = \log(AP:BP)$, oder, da die Differenz von AP und BP unendlich klein ist, durch $AB \cdot \varrho = (AP - BP) : AP$. Fällt man nun von B auf AP das Loth BQ und errichtet in P auf AP die Verlängerung von AB in R schneidende Loth AR , so verhält sich $AQ : AP = AB : AR$, und es darf $AP - BP = AQ$ gesetzt werden. Folglich ist $\varrho = 1:AR$ d. h. gleich dem reciproken Werthe des Durchmessers der Kugel, welche durch P und A geht und ihren Mittelpunkt auf der X -Axe hat. (Da in dem in der Einleitung angeführten Werke „Allgemeine Lösung des Problems etc.“ die den Grössen ϑ und ϱ entsprechenden Grössen gelegentlich, auf Seite 59, als die reciproken Werthe der Radien interpretirt worden sind, so sehe ich mich veranlasst zu bemerken, dass die dieser Interpretation zu Grunde gelegten und nur an dieser einen Stelle benutzten Gleichungen (65) einer aus (64) sich ergebenden Veränderung bedürfen.) Die Parameter ϑ und ϱ haben resp. alle Werthe von 0 bis ∞ und $-\infty$ bis ∞ zu durchlaufen. Die den constanten Werthen ϱ_b und ϱ_a entsprechenden Kugelflächen berühren einander im Punkte A , und zwar, wenn ϱ_b wiederum positiv und grösser als ϱ_a angenommen wird, von innen oder von aussen, je nachdem ϱ_a positiv oder negativ ist. Es sind nun auch τ, σ, ω in $c\tau, c\sigma, c\omega$ zu verwandeln, und die neu entstandenen Grössen und r werden dargestellt durch

$$\begin{aligned}
 (26) \quad \tau &= \sqrt{\varrho^2 + \vartheta^2}, \quad \tau_0 = \sqrt{\varrho_0^2 + \vartheta_0^2}, \quad \sigma = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(\varrho - \varrho_0)^2 + \omega^2}, \\
 r &= \frac{2\pi\sigma}{\tau\tau_0}, \quad \omega = \sqrt{\vartheta^2 + \vartheta_0^2 - 2\vartheta\vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}.
 \end{aligned}$$

Man hat ferner, indem man statt (10) die daraus abgeleiteten Gleichungen (12) zu Grunde legt, den Integrationsbuchstaben λ in $c\lambda$ zu verwandeln, wodurch die Integrationsgrenzen 0 und ω keine Veränderung erleiden, während an Stelle der Grenze π die unendlich grosse $\pi:c$ tritt. Ueberdies ist zu beachten, dass in den elliptischen Functionen $q=0$, also $k=0$, $K=\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{K'}{\pi} = \frac{\pi}{2c} : (\varrho_b - \varrho_a)$ wird. In Folge dieser Veränderungen tritt nun z. B. an Stelle der elliptischen Function $\cot \text{am} \frac{K'}{\pi} (\varphi - \varrho_0 + i\lambda)$ die Kreisfunction

$$\cot \frac{\pi(\varrho - \varrho_0 + i\lambda)}{2(\varrho_b - \varrho_a)} \quad \text{oder} \quad \cot \frac{1}{2} \varepsilon (\varphi - \varrho_0 + i\lambda),$$

wenn der Kürze halber gesetzt wird:

$$(27) \quad \frac{\pi}{\varrho_b - \varrho_a} = \varepsilon.$$

Versucht man hiernach die Grenzwerte der Producte cJ_1, cJ_2, cJ_3, cJ_4 zu bilden, so findet man, dass wohl die beiden ersten (abgesehen von der schon bei J_1 selbst für $\varrho = \varrho_0 \pm 0$ nothwendiger Weise auftretenden Discontinuität) völlig bestimmte Werthe L_1 und L_2 annehmen, dass dagegen die beiden letzten unendlich gross werden, jedoch ihre Differenz gegen einen bestimmten Werth convergirt, der durch $L_3 - L_4$ bezeichnet werden möge. Da aber im vorliegenden Falle die Constanten α und β einander gleich (z. B. beide $= 1$) zu setzen sind, weil sonst im Berührungspunkte der Kugelflächen eine Discontinuität in dem Werthe des Gesamtpotentials eintreten würde, so enthalten die Ausdrücke für die Potentialfunctionen J_3 und J_4 nur in der Verbindung $J_3 - J_4$, behalten also, wie es sein muss, endliche Werthe. Man gelangt somit für einen Leiter, dessen einer Theil durch die Kugelfläche vom Durchmesser $1 : \varrho_a$, und dessen anderer Theil durch die Kugelfläche vom Durchmesser $1 : \varrho_b$ begrenzt wird, zu den folgenden Resultaten:

I. Wenn die elektrische Vertheilung durch Influenz der im Punkte $(\varrho_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ des nichtleitenden Raumes concentrirt gedachten Elektrizitätsmenge -1 hervorgerufen wird, und der Leiter, falls er aus zwei vollen Kugeln besteht (ϱ_a negativ ist) durch einen dünnen Draht mit dem Erdboden verbunden ist, so sind die Potentiale v_a und v_b der beiden elektrischen Schichten zu bestimmen aus:

$$(28) \quad \begin{cases} r(v_a + v_b) = 1 - \sigma(L_3 - L_4), \\ r(v_a - v_b) = c - \sigma(L_1 - L_2), \end{cases}$$

worin:

$$(29) \quad \begin{cases} L_1 = 2\varepsilon \sin \varepsilon (\varrho - \varrho_0) \int_0^{\omega} \frac{1}{\cos i\varepsilon\lambda - \cos \varepsilon(\varrho - \varrho_0)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}, \\ L_2 = 2\varepsilon \sin \varepsilon (\varrho + \varrho_0 - 2\varrho_a) \int_0^{\omega} \frac{1}{\cos i\varepsilon\lambda - \cos \varepsilon(\varrho + \varrho_0 - 2\varrho_a)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}, \\ L_3 = 2\varepsilon \int_0^{\omega} \left(\frac{-i \sin i\varepsilon\lambda}{\cos i\varepsilon\lambda - \cos \varepsilon(\varrho - \varrho_0)} + i \operatorname{tg} i\lambda \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}, \\ L_4 = 2\varepsilon \int_0^{\omega} \left(\frac{-i \sin i\varepsilon\lambda}{\cos i\varepsilon\lambda - \cos \varepsilon(\varrho + \varrho_0 - 2\varrho_a)} + i \operatorname{tg} i\lambda \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}. \end{cases}$$

Die bei L_3 und L_4 in den Klammern hinzugefügten Grössen $+i \operatorname{tg} i\lambda$ bewirken nur, dass jedes der beiden Integrale für sich einen bestimmten Werth hat; sie heben sich auf, wenn die Differenz $L_3 - L_4$ durch ein einziges Integral dargestellt wird. Für die Dichtigkeiten ergiebt sich:

$$(30) \quad \begin{cases} k_a = \frac{\varepsilon^2 \tau_0 \tau_a^3 \sin \varepsilon (\varrho_0 - \varrho_a)}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{-i \sin i \varepsilon \lambda}{(\cos i \varepsilon \lambda - \cos \varepsilon (\varrho_0 - \varrho_a))^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}, \\ k_b = \frac{\varepsilon^2 \tau_0 \tau_b^3 \sin \varepsilon (\varrho_b - \varrho_0)}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{-i \sin i \varepsilon \lambda}{(\cos i \varepsilon \lambda - \cos \varepsilon (\varrho_b - \varrho_0))^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}. \end{cases}$$

II. Der aus zwei einander berührenden Kugeln bestehende Leiter sei isolirt und ihm die Elektrizitätsmenge $\mathfrak{M}$ mitgetheilt. Dann ist:

$$(31) \quad \begin{cases} v_a + v_b = \alpha - \frac{\alpha \tau}{2\pi} (\mathfrak{L}_3 - \mathfrak{L}_4), \\ v_a - v_b = \alpha \cdot \varepsilon - \frac{\alpha \tau}{2\pi} (\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2), \end{cases}$$

falls $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \dots$ die aus $I_1, I_2, \dots$ für $\varrho_0 = 0$ und $\omega = \vartheta$ hervorgehenden Ausdrücke bezeichnen. Ferner erhält man für die Dichtigkeiten:

$$(32) \quad \begin{cases} f_a = \frac{\alpha \varepsilon^2 \tau_a^3 \sin(-\varepsilon \varrho_a)}{2\pi^2} \int_{\vartheta}^\infty \frac{-i \sin i \varepsilon \lambda}{(\cos i \varepsilon \lambda - \cos \varepsilon \varrho_a)^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \vartheta^2}}, \\ f_b = \frac{\alpha \varepsilon^2 \tau_b^3 \sin(\varepsilon \varrho_b)}{2\pi^2} \int_{\vartheta}^\infty \frac{-i \sin i \varepsilon \lambda}{(\cos i \varepsilon \lambda - \cos \varepsilon \varrho_b)^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \vartheta^2}}. \end{cases}$$

Wenn man hierin $\lambda = \vartheta + t$ setzt, so findet man leicht, dass bis auf einen Factor, der für sehr grosse Werthe von ϑ sehr wenig von der Einheit verschieden ist:

$$\frac{f_a}{\sin(-\varepsilon \varrho_a)} = \frac{f_b}{\sin(\varepsilon \varrho_b)} = a \sqrt{\frac{\varepsilon^3}{2\pi^3}} \cdot \vartheta^{\frac{5}{2}} e^{-\varepsilon \vartheta}.$$

Hieraus ergibt sich nicht nur das bekannte Resultat, dass im Berührungspunkte (d. h. für $\vartheta = \infty$) die Dichtigkeiten gleich Null sind, sondern es ist auch der Grad der Kleinheit zu ersehen, den dieselben in Punkten haben, die dem Berührungspunkte sehr nahe liegen.

Endlich findet man durch Anwendung der Gleichung (25):

$$(33) \quad m_a = \frac{\alpha \varepsilon}{4} \cot(-\varepsilon \varrho_a) + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{2}{\lambda} - i \varepsilon \cot \frac{i \varepsilon \lambda}{2} - \frac{i \varepsilon \sin i \varepsilon \lambda}{\cos i \varepsilon \lambda - \cos 2 \varepsilon \varrho_a} \right) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Bei Vertauschung von $-\varrho_a$ mit ϱ_b ändert sich nur das Vorzeichen des ersten Gliedes, so dass

$$(33') \quad m_b = m_a - \frac{1}{2} \alpha \varepsilon \cot(-\varepsilon \varrho_a).$$

Verbindet man hiermit die Gleichung $m_a + m_b = M$, so hat man drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Grössen α , m_a , m_b .

Anmerkung. Wenn zwei mit den Elektrizitätsmengen m_a' und m_b' geladene Kugeln einander bis auf eine im Verhältniss zu ihren Radien sehr kleine Entfernung genähert werden, so ergibt sich, unter Vernachlässigung von Grössen, die für ein verschwindend kleines c ebenfalls verschwindend klein werden, für m_a' nach (25) der Ausdruck:

$$m_a' = m_a + \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{c}} \left(\frac{2}{\lambda} - i\varepsilon \cot \frac{i\varepsilon\lambda}{2} + \frac{\varepsilon}{i} \operatorname{tg} i\lambda \right) \frac{d\lambda}{\lambda} \\ + \frac{\alpha - \beta}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{c}} \frac{\varepsilon}{i} \operatorname{tg} i\lambda \cdot \frac{d\lambda}{\lambda},$$

worin m_a die in (33) angegebene Grösse bedeutet. Nun nähert sich das erste Integral bei unendlich abnehmendem c einer endlichen Grenze, während das zweite über jeden gegebenen Werth hinaus wächst. Da aber m_a' und m_a bestimmte endliche Werthe vorstellen, so muss $\alpha - \beta$, die Differenz der Werthe des Gesamtpotentials auf den beiden Kugeloberflächen, sehr klein sein, und in Folge dessen ist das zweite Glied in dem Ausdrücke für m_a' gegen die beiden anderen zu vernachlässigen. Man erhält aber durch theilweise Integration:

$$\int_0^{\frac{\pi}{c}} \frac{\varepsilon}{i} \operatorname{tg} i\lambda \frac{d\lambda}{\lambda} = \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{c}} (\log \frac{\pi}{c} - \log \lambda) \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{i} \operatorname{tg} i\lambda \right) d\lambda = \varepsilon \log \frac{1}{c} + G,$$

wenn G eine Grösse, die bei unendlich abnehmendem c endlich bleibt. Setzt man also

$$\alpha - \beta = \frac{2\pi \cdot b}{\varepsilon \log \frac{1}{c}},$$

so ergibt sich:

$$m_a' = m_a + b, \quad m_b' = m_b - b,$$

und wenn man hierin für m_a und m_b ihre Werthe aus (33) und (33') einsetzt, so kann man die Constanten α und b durch die gegebenen Elektrizitätsmengen m_a' und m_b' ausdrücken. — Während aber das Gesamtpotential auf beiden Kugeln nahezu dieselben Werthe besitzt (nämlich Werthe, deren Differenz bei fortgesetzter Annäherung der Kugeln in dem Grade abnimmt, wie der reciproke Werth des Logarithmus der reciproken Entfernung*) beider Kugeln), haben, wie sich

*) Man vergl. den Werth von c am Schlusse des § 6.

mittels der in § 7. entwickelten Formeln nachweisen lässt, die Potentiale der einzelnen Belegungen und ebenso die Dichtigkeiten in der Nähe der Punkte, in welchen die Centrale die Kugeloberflächen schneidet, sehr grosse Werthe, die Dichtigkeiten in beträchtlicherer Entfernung aber nahezu dieselben Werthe, welche bei der Berührung der Kugeln eintreten würden. Die überschüssigen, bei der Berührung sich ausgleichenden Elektrizitätsmengen ($+b$ und $-b$) würden also, wenn die Kugeln einander bis auf eine unendlich kleine Entfernung genähert werden könnten, ohne dass ein Uebergang von Elektrizität von der einen zur anderen stattfände, auf unendlich kleinen Flächenräumen concentrirt sein.

Wenn die eine Kugel zur Erde abgeleitet, der anderen die Elektrizitätsmenge m_a' mitgetheilt ist, so sind β , m_a , $m_b = 0$, also $b = m_a'$; die auf der nicht isolirten Kugel durch Influenz hervorgerufene Elektrizitätsmenge m_b' ist also bei sehr kleiner Entfernung der Kugeln nahezu $= -m_a'$, und die sehr kleine Grösse

$$\alpha = 2\pi m_a' : (\epsilon \log \frac{1}{c})$$

giebt den Werth des Gesamtpotentials in der isolirten Kugel an.

§ 9.

Reihenentwicklungen.

Wir kehren zu den in § 6. aufgestellten allgemeinen Formeln zurück, um kurz anzugeben, wie daraus theils neue, theils bekannte aber auf anderen Wegen gefundene Reihenentwicklungen abgeleitet werden können.

1.

Wendet man für $\cot amu$ die Formel an

$$\cot amu = \frac{\pi}{2K} \left\{ \cot \frac{\pi u}{2K} - \frac{4q^2}{1+q^2} \sin \frac{\pi u}{K} - \frac{4q^4}{1+q^4} \sin \frac{2\pi u}{K} - \dots \right\},$$

und bezeichnet durch δ die Constante

$$\delta = \frac{K'}{K} = \frac{\pi}{q_b - q_a} = -\frac{1}{\pi} \log q,$$

so ergeben sich für die Integrale J_1 und J_3 , unter Benutzung der in § 4. Nr. 12) angegebenen Formen, die Ausdrücke:

$$(34) \quad \begin{cases} J_1 = \int_0^\omega \frac{2\delta \sin \delta(\varphi - \varphi_0) \cdot d\lambda}{(\cos i\delta\lambda - \cos \delta(\varphi - \varphi_0)) \sqrt{2\cos\omega - 2\cos\lambda}} - \sum_1^\infty A_s \cdot \sin s\delta(\varphi - \varphi_0) \\ J_3 = \int_\omega^\pi \frac{-2i\delta \sin i\delta\lambda \cdot d\lambda}{(\cos i\delta\lambda - \cos \delta(\varphi - \varphi_0)) \sqrt{2\cos\omega - 2\cos\lambda}} + \sum_1^\infty B_s \cdot \cos s\delta(\varphi - \varphi_0). \end{cases}$$

worin die Coefficienten A_s und B_s die folgenden Functionen von ω vorstellen:

$$A_s = \frac{8\delta q^{2s}}{1+q^{2s}} \int_0^\omega \frac{\cos is \delta \lambda \cdot d\lambda}{V 2 \cos \lambda - 2 \cos \omega},$$

$$B_s = \frac{8\delta q^{2s}}{1+q^{2s}} \int_\omega^\pi \frac{-i \sin is \delta \lambda \cdot d\lambda}{V 2 \cos \omega - 2 \cos \lambda}.$$

Zu bemerken ist, dass die Reihe für J_1 für den Werth $\varrho = \varrho_0$ nicht anwendbar ist, und dass sie für $\omega = \pi$, welches auch der Werth von ϱ sei, aus lauter unendlich grossen Gliedern besteht, woraus indessen nur zu schliessen ist, dass in diesem speciellen Falle die Umkehrung der Reihenfolge der Summation und Integration unstatthaft war. Von diesen Ausnahmefällen abgesehen sind die Reihen anwendbar, und sie sind dann stark convergent, wenn der Abstand der Kugeln ein geringer ist. — Dass das vor dem Summenzeichen stehende Glied des Ausdrucks von J_3 dann $= \infty$ wird, wenn gleichzeitig $\varrho = \varrho_0$, $\omega = 0$, ist dadurch begründet, dass J_3 für diese Werthe unendlich werden muss. Die Ausdrücke für J_2 und J_4 ergeben sich durch Buchstabenvertauschung aus den für J_1 und J_3 aufgestellten. — Die Reihen dürfen nach ϱ unter dem Summenzeichen differentiirt werden.

2.

Setzt man in (12) $\lambda = \pi - \mu$, so ergibt sich:

$$J_1 = -\frac{2iK'}{\pi} \int_{\pi-\omega}^{\pi} \left\{ \Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho - \varrho_0 - i\mu) - \Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho - \varrho_0 + i\mu) \right\} \cdot \frac{d\mu}{V - 2 \cos \mu - 2 \cos \omega}$$

$$J_3 = \frac{2K'}{\pi} \int_0^{\pi-\omega} \left\{ \Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho - \varrho_0 - i\mu) + \Delta \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho - \varrho_0 + i\mu) \right\} \cdot \frac{d\mu}{V 2 \cos \omega + 2 \cos \mu},$$

und durch Anwendung der Formel

$$\Delta \operatorname{am} u = \frac{\pi}{2K} \left\{ 1 + \frac{4q}{1+q^2} \cos \frac{\pi u}{K} + \frac{4q^2}{1+q^4} \cos \frac{2\pi u}{K} + \dots \right\}$$

erhält man hieraus die trigonometrischen Reihen

$$(35) \quad \begin{cases} J_1 = \sum_1^\infty C_s \cdot \sin s\delta(\varrho - \varrho_0), \\ J_3 = \sum_0^\infty D_s \cdot \cos s\delta(\varrho - \varrho_0) \end{cases}$$

wenn die Coefficienten C_s und D_s die Werthe haben:

$$C_s = \frac{4\delta}{\cos is\delta\pi} \int_{\pi-\omega}^{\pi} \frac{-i \sin is\delta\mu \cdot d\mu}{\sqrt{-2 \cos \mu - 2 \cos \omega}},$$

$$D_s = \frac{4\delta}{\cos is\delta\pi} \int_0^{\pi-\omega} \frac{\cos is\delta\mu \cdot d\mu}{\sqrt{2 \cos \omega + 2 \cos \mu}},$$

und wenn in der Reihe für J_3 das dem Werthe $s = 0$ entsprechende Glied auf die Hälfte reducirt wird. Es muss erwähnt werden, dass beide Reihen für den speciellen Werth $\omega = 0$ divergent sind, und dass die erstere (welche eine für $\varrho = \varrho_0 \pm 0$ discontinuirliche Function darstellt) für jeden Werth von ϱ nur eine sehr schwache Convergenz besitzt und nach ϱ nicht unter dem Summenzeichen differentiirbar ist.

Dagegen ist es bei der zweiten Reihe erlaubt, den Werth von $\frac{\partial J_3}{\partial \varrho}$ durch Differentiation der einzelnen Reihenglieder abzuleiten und die so sich ergebende Reihe ist (ausser für nahe an 0 gelegene Werthe von ω) stark convergent, wenn der Abstand der Kugeln ein geringer ist. Von dieser Reihe allein hängen die Dichtigkeiten der elektrischen Belegungen in dem Falle ab, dass das Gesamtpotential auf beiden Kugeln denselben Werth hat.

3.

Benutzt man die Formeln

$$\cot \operatorname{am}(u, k) = \frac{1}{i \sin \operatorname{am}(-iu; k')},$$

$$\frac{1}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2K} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\pi u}{2K}} + \frac{4q}{1-q} \sin \frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^3}{1-q^3} \sin \frac{3\pi u}{2K} + \dots \right\},$$

so erhält man:

$$= \frac{2K'}{\pi} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho - \varrho_0 + i\lambda)$$

$$= \frac{1}{i \sin \frac{1}{2}(\lambda - i\varrho + i\varrho_0)} + \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4q_1^{2n+1}}{1-q_1^{2n+1}} \sin(n + \frac{1}{2})(\lambda - i\varrho + i\varrho_0),$$

worin:

$$q_1 = e^{-(\varrho_0 - \varrho_0)}.$$

Nun ist, wenn c , wie früher, die positive oder negative Einheit bezeichnet, je nachdem $\varrho - \varrho_0$ positiv oder negativ ist:

$$\frac{1}{i \sin \frac{1}{2}(\lambda - i\varrho + i\varrho_0)} = \frac{c}{i \sin \frac{1}{2}c(\lambda - i\varrho + i\varrho_0)} = 2c \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n + \frac{1}{2})c(\varrho - \varrho_0 + i\lambda)}.$$

Vereinigt man diese Summe mit der vorigen, so ergibt sich nach einigen leichten Umformungen:

$$\frac{2K'}{\pi} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (\varrho - \varrho_0 + i\lambda) \\ = 2 \sum_0^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \{ i(\varrho_b - \varrho_a - \varrho + \varrho_0) + \lambda \}}{\sin i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b - \varrho_a)}.$$

Aus (12) folgt nun:

$$J_1 = 2\pi \sum_0^{\infty} \frac{\sin i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b - \varrho_a - \varrho + \varrho_0)}{\sin i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b - \varrho_a)} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{\cos(n + \frac{1}{2}) \lambda d\lambda}{\sqrt{2 \cos \lambda - 2 \cos \omega}}, \\ J_3 = 2\pi \sum_0^{\infty} \frac{i \cos i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b - \varrho_a - \varrho + \varrho_0)}{\sin i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b - \varrho_a)} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{\omega}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \lambda d\lambda}{\sqrt{2 \cos \omega - 2 \cos \lambda}}.$$

Die Ausdrücke für J_2 und J_4 entstehen hieraus durch Verwandlung von $\varrho - \varrho_0$ in $\varrho + \varrho_0 - 2\varrho_a$; es ist jedoch gleichzeitig $\varepsilon = 1$ zu setzen, weil $\varrho + \varrho_0 - 2\varrho_a$ positiv ist. Beachtet man noch, dass

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{\cos(n + \frac{1}{2}) \lambda d\lambda}{\sqrt{2 \cos \lambda - 2 \cos \omega}} = \frac{2}{\pi} \int_{\omega}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \lambda d\lambda}{\sqrt{2 \cos \omega - 2 \cos \lambda}} = P^n(\cos \omega), *$$

so erhält man die folgenden in Bezug auf ω nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihenentwicklungen der vier Integrale J :

$$J_1 = 2\pi \sum_0^{\infty} \frac{\sin i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b - \varrho_a - \varrho + \varrho_0)}{\sin i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b - \varrho_a)} P^n(\cos \omega), \\ J_2 = 2\pi \sum_0^{\infty} \frac{\sin i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b + \varrho_a - \varrho - \varrho_0)}{\sin i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b - \varrho_a)} P^n(\cos \omega), \\ J_3 = 2\pi \sum_0^{\infty} \frac{i \cos i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b - \varrho_a - \varrho + \varrho_0)}{\sin i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b - \varrho_a)} P^n(\cos \omega), \\ J_4 = 2\pi \sum_0^{\infty} \frac{i \cos i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b + \varrho_a - \varrho - \varrho_0)}{\sin i(n + \frac{1}{2}) (\varrho_b - \varrho_a)} P^n(\cos \omega),$$

Die Dichtigkeiten k_a und k_b (§ 6.) können durch die Gleichungen

*) Diese Darstellungen der Kugelfunction $P^n(\cos \omega)$ habe ich in den „Mathematischen Annalen“ (Bd. V) aus den Dirichlet'schen Integralformen, und auf anderem Wege in dem Jahresberichte des hiesigen Gymnasiums, 1870, abgeleitet. (Letzterer Aufsatz ist in diesen Annalen, Bd. 18, pag. 161—194, abgedruckt.)

$$k_a^{\alpha, \beta} = -\frac{\tau_0 \tau_a^3}{8\pi^2 c^2} \left\{ (\alpha - \beta) \frac{\partial J_2}{\partial \varrho} + (\alpha + \beta) \frac{\partial J_4}{\partial \varrho} \right\} (\varrho = \varrho_a),$$

$$k_b^{\alpha, \beta} = \frac{\tau_0 \tau_b^3}{8\pi^2 c^2} \left\{ (\alpha - \beta) \frac{\partial J_2}{\partial \varrho} + (\alpha + \beta) \frac{\partial J_4}{\partial \varrho} \right\} (\varrho = \varrho_b),$$

gefunden werden. Daher ist:

$$k_a^{1,1} = \frac{\tau_0 \tau_a^3}{2\pi c^2} \sum_0^\infty \frac{\sin i(n + \frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)}{\sin i(n + \frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)} \cdot (n + \frac{1}{2}) P^n(\cos \omega),$$

$$k_b^{1,1} = \frac{\tau_0 \tau_b^3}{2\pi c^2} \sum_0^\infty \frac{\sin i(n + \frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)}{\sin i(n + \frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)} \cdot (n + \frac{1}{2}) P^n(\cos \omega).$$

Die Werthe von $4\pi k_a^{1,1}$ und $4\pi k_b^{1,1}$ erweisen sich als übereinstimmend mit den für die ihnen entsprechenden Grössen $H_\sigma^{(1)}$ und $H_s^{(1)}$ von Herrn C. Neumann aufgestellten Ausdrücken (l. c. pag. 109, Nr. 132).

Wenn α und β beliebige constante Werthe behalten, so findet man:

$$k_a^{\alpha, \beta} = \frac{\tau_0 \tau_a^3}{4\pi c^2} \sum_0^\infty i \cdot \frac{\alpha e^{(n+\frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)} - \beta e^{-(n+\frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)}}{\sin i(n + \frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)} \cdot (n + \frac{1}{2}) P^n(\cos \omega),$$

$$k_b^{\alpha, \beta} = \frac{\tau_0 \tau_b^3}{4\pi c^2} \sum_0^\infty i \cdot \frac{-\alpha e^{(n+\frac{1}{2})(\varrho_a - \varrho_b)} + \beta e^{-(n+\frac{1}{2})(\varrho_a - \varrho_b)}}{\sin i(n + \frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)} \cdot (n + \frac{1}{2}) P^n(\cos \omega),$$

und endlich ergibt sich für die Dichtigkeiten der Belegungen zweier Kugeln, die mit gegebenen Elektrizitätsmengen geladen aber der Einwirkung äusserer Kräfte nicht unterworfen sind:

$$f_a^{\alpha, \beta} = \frac{\tau_a^3}{4\pi c} \sum_0^\infty i \cdot \frac{\alpha e^{(n+\frac{1}{2})\varrho_b} - \beta e^{-(n+\frac{1}{2})\varrho_b}}{\sin i(n + \frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)} \cdot (n + \frac{1}{2}) P^n(\cos \vartheta),$$

$$f_b^{\alpha, \beta} = \frac{\tau_b^3}{4\pi c} \sum_0^\infty i \cdot \frac{-\alpha e^{(n+\frac{1}{2})\varrho_a} + \beta e^{-(n+\frac{1}{2})\varrho_a}}{\sin i(n + \frac{1}{2})(\varrho_b - \varrho_a)} \cdot (n + \frac{1}{2}) P^n(\cos \vartheta).$$

4.

Um zu einer anderen Form von Reihenentwicklungen zu gelangen lege ich die Gleichung*) zu Grunde:

*) Vergl. „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. Von K. H. Scheilbach. Berlin 1864,“ Seite 114 Nr. (3).

$$\frac{2K}{\pi} \frac{1}{\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sin(x + svi)} \quad (q = e^{-v}).$$

Da nun

$$\begin{aligned} & \frac{2K'}{\pi} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q - q_0 + i\lambda) \\ &= \frac{2K'}{\pi} \cdot \frac{1}{i \sin \operatorname{am} \left\{ \frac{K'}{\pi} (\lambda - iq + iq_0); k' \right\}} \end{aligned}$$

und im vorliegenden Falle $v' = q_b - q_a$ ist, so erhält man, wenn man noch s in $-s$ verwandelt:

$$\begin{aligned} & \frac{2K'}{\pi} \cot \operatorname{am} \frac{K'}{\pi} (q - q_0 + i\lambda) \\ &= \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sin \frac{1}{2} (\lambda - iq + iq_0 - 2is(q_b - q_a))}. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth in (10) ein und beachtet, dass nach (1) und (1'):

$$\begin{aligned} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{d\lambda}{i \sin \frac{1}{2} (\lambda - i\mu) \sqrt{2 \cos \lambda - 2 \cos \omega}} &= \frac{2\pi \varepsilon}{\sqrt{2 \cos i\mu - 2 \cos \omega}}, \\ \int_{\omega}^{2\pi - \omega} \frac{d\lambda}{\sin \frac{1}{2} (\lambda - i\mu) \sqrt{2 \cos \omega - 2 \cos \lambda}} &= \frac{2\pi}{\sqrt{2 \cos i\mu - 2 \cos \omega}}, \end{aligned}$$

wenn $\varepsilon = +1$ oder -1 , je nachdem μ positiv oder negativ ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} J_1 &= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_s (2 \cos i(q - q_0 + 2sq_b - 2sq_a) - 2 \cos \omega)^{-\frac{1}{2}}, \\ J_2 &= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_s (2 \cos i(q + q_0 - 2q_a + 2sq_b - 2sq_a) - 2 \cos \omega)^{-\frac{1}{2}}, \\ J_3 &= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} (2 \cos i(q - q_0 + 2sq_b - 2sq_a) - 2 \cos \omega)^{-\frac{1}{2}}, \\ J_4 &= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} (2 \cos i(q + q_0 - 2q_a + 2sq_b - 2sq_a) - 2 \cos \omega)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Hierin ist $\varepsilon_s = +1$ oder -1 , je nachdem s positiv oder negativ, und $\varepsilon_0 = \varepsilon$; ferner $\delta_s = +1$, wenn s positiv oder Null, dagegen $\delta_s = -1$, wenn s negativ. Bei Einsetzung der Werthe der J in die

Gleichungen (21) heben sich die Glieder $\beta(1 + \epsilon)$ und $\alpha(1 - \epsilon)$ fort, und in der ersten Gleichung ausserdem alle Glieder, welche negativen Werthen von s entsprechen, in der zweiten die zu nicht negativen Werthen von s gehörigen, so dass für die Potentialfunctionen v_a und v_b die Ausdrücke gelten:

$$\begin{aligned} v_a^{\alpha, \beta} &= -\beta \frac{\tau \tau_0}{c} \sum_1^{\infty} (2 \cos i(\varrho - \varrho_0 + 2s\varrho_b - 2s\varrho_a) - 2 \cos \omega)^{-\frac{1}{2}}, \\ &+ \alpha \frac{\tau \tau_0}{c} \sum_0^{\infty} (2 \cos i(\varrho + \varrho_0 - 2\varrho_a + 2s\varrho_b - 2s\varrho_a) - 2 \cos \omega)^{-\frac{1}{2}}, \\ v_b^{\alpha, \beta} &= -\alpha \frac{\tau \tau_0}{c} \sum_{-1}^{-\infty} (2 \cos i(\varrho - \varrho_0 + 2s\varrho_b - 2s\varrho_a) - 2 \cos \omega)^{-\frac{1}{2}}, \\ &+ \beta \frac{\tau \tau_0}{c} \sum_{-1}^{-\infty} (2 \cos i(\varrho + \varrho_0 - 2\varrho_a + 2s\varrho_b - 2s\varrho_a) - 2 \cos \omega)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Durch $\varrho, \vartheta, \varphi$ sind die Coordinaten des Punktes P , auf welchen die Potentialfunctionen sich beziehen, und durch $\varrho_0, \vartheta_0, \varphi_0$ diejenigen des Centralpunktes P_0 bezeichnet worden. Bezeichnet man durch P_s und Q_s solche Punkte, denen die Coordinaten

$$\varrho_0 - 2s\varrho_b + 2s\varrho_a, \vartheta_0, \varphi_0$$

und

$$-\varrho_0 + 2\varrho_a - 2s\varrho_b + 2s\varrho_a, \vartheta_0, \varphi_0$$

zukommen, so können die Ausdrücke für v_a und v_b unter folgenden Formen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} v_a^{\alpha, \beta} &= \beta \sum_1^{\infty} -\sqrt{\frac{AP_s \cdot BP_s}{AP_0 \cdot BP_0}} \cdot \frac{1}{PP_s} \\ &+ \alpha \sum_0^{\infty} +\sqrt{\frac{AQ_s \cdot BQ_s}{AP_0 \cdot BP_0}} \cdot \frac{1}{PQ_s}, \\ v_b^{\alpha, \beta} &= \alpha \sum_{-1}^{-\infty} -\sqrt{\frac{AP_s \cdot BP_s}{AP_0 \cdot BP_0}} \cdot \frac{1}{PP_s} \\ &+ \beta \sum_{-1}^{-\infty} +\sqrt{\frac{AQ_s \cdot BQ_s}{AP_0 \cdot BP_0}} \cdot \frac{1}{PQ_s}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin $\alpha = \beta = 1$, so erhält man die Green'sche Function für den Centralpunkt P_0 ; setzt man dagegen $\varrho_0 = 0, \vartheta_0 = 0$, d. h. lässt P_0 ins Unendliche rücken, und verwandelt α und β in $\alpha/\sqrt{AP_0 \cdot BP_0}$

und $\beta \sqrt{AP_0 \cdot BP_0}$ (wodurch die Nenner der Brüche unter den Wurzelzeichen fortfallen), so beziehen sich die Formeln auf den Fall, wo das Gesammtpotential auf den beiden Kugeloberflächen resp. die constanten Werthe α und β hat. In jedem Falle zeigen die Formeln, dass die Wirkung der elektrischen Belegung jeder einzelnen Kugel nach aussen hin äquivalent ist der Wirkung bestimmter in den innerhalb dieser Kugel gelegenen Punkten P , und Q , concentrirt gedachter Massen; ein Resultat, zu dem mehrere der früheren Bearbeitungen des Problems auf sehr verschiedenen Wegen geführt haben.

Elbing, Ostern 1879.