ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Band 211.

Nr. 5043.

3.

Die Erweiterung der *Lagrangeschen* Dreieckslösungen im allgemeinen Dreikörperproblem.

Von *P. Pedersen*.

(Mit einer Tafel.)

Die ersten periodischen Lösungen des Dreikörperproblems wurden im Jahre 1772 von *Lagrange* gegeben, indem er zeigte, daß es für ein willkürliches Massenverhältnis immer zwei verschiedene Klassen periodischer Bahnen gibt: Für die eine dieser Klassen gilt, daß die drei Massen beständig auf einer Geraden liegen bleiben, während in der anderen Klasse die drei Massen in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks gelegen sind. Seit *Lagranges* Zeiten liegen viele Untersuchungen über periodische Bahnen im Dreikörperproblem vor. Hier sollen nur die theoretischen Untersuchungen von *Hill* und *Poincaré* und die von *Darwin*, *Burrau*, *Strömgren* u. a. ausgeführten numerischen Untersuchungen erwähnt werden. Ein gemeinsamer Zug aller dieser Arbeiten ist aber, daß sie mit Rücksicht auf Massen oder Distanzen spezielle Fälle behandeln, besonders den wichtigen Fall, daß eine der drei Massen unendlich klein ist (problème restreint). Man darf überhaupt sagen, daß durch diese Untersuchungen keine neue periodische Lösungen des allgemeinen Falles, wo die drei Massen und die drei Distanzen derselben Größenordnung sind, gefunden wurden, sodaß die *Lagrangeschen* Lösungen die einzigen bekannten Lösungen des allgemeinen Falles blieben.

Es lag dann nahe, sich die Frage zu stellen, ob es überhaupt im allgemeinen Falle des Dreikörperproblems andere periodische Lösungen als die *Lagrangeschen* gibt. Für das Suchen nach solchen periodischen Lösungen war wohl im voraus von der numerischen Behandlung der Differentialgleichungen des Problems am meisten Erfolg zu erwarten.

Von solchen Betrachtungen ausgehend hat *Strömgren* für ein spezielles Massenverhältnis (1 : 2 : 1) versucht, durch numerische Integration der Differentialgleichungen und unter Variation der Anfangswerte der Koordinaten und Geschwindigkeiten periodische Lösungen zu finden. Diese umfassenden Untersuchungen blieben lange ohne positives Resultat, bis es endlich im Sommer 1919 gelang, für das angegebene Massenverhältnis eine periodische Lösung zu finden. In einer Abhandlung im Novemberheft der M. N.¹⁾ berichtet *Strömgren* über diese Untersuchung. Es wird u. a. in diesem Artikel gezeigt, daß die neue periodische Lösung als eine Erweiterung des einen *Lagrangeschen* Falles zu betrachten ist, indem nachgewiesen wird, daß diese Lösung als eine Libration um die Punkte auf einer beständig sich drehenden geraden Linie aufgefaßt werden kann, in denen die drei Massen in dem einen *Lagrangeschen* Falle beständig liegen bleiben.

Am Schluß der erwähnten Abhandlung gibt *Strömgren* als seine Absicht an, u. a. für die Erweiterung der infinite-

simalen Librationen auf ein willkürliches Massenverhältnis, und zwar für die beiden *Lagrangeschen* Fälle (den geradlinigen und den Dreiecksfall) zu sorgen. Auf Aufforderung von Herrn Professor *Strömgren* habe ich zunächst die Untersuchung der infinitesimalen Librationen für den Dreiecksfall übernommen. Die Resultate meiner Untersuchung sollen im folgenden mitgeteilt werden.

Wir nehmen an, daß die drei Massen m_1 , m_2 und m_3 sich in einer Ebene bewegen. In dieser Ebene wählen wir ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Koordinaten der drei Massen in diesem System seien X_1, Y_1 bzw. X_2, Y_2 und X_3, Y_3 ; die Distanzen werden mit ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 bezeichnet.

Fig. 1.

Wenn wir für die Gravitationskonstante den Wert 1 wählen, können die sechs Differentialgleichungen für die Bewegung der drei Massen in folgender Weise geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} X_1'' &= -m_2 (X_1 - X_2)/\varrho_2^3 - m_3 (X_1 - X_3)/\varrho_3^3 \\ Y_1'' &= -m_2 (Y_1 - Y_2)/\varrho_2^3 - m_3 (Y_1 - Y_3)/\varrho_3^3 \\ X_2'' &= -m_1 (X_2 - X_1)/\varrho_1^3 - m_3 (X_2 - X_3)/\varrho_3^3 \\ Y_2'' &= -m_1 (Y_2 - Y_1)/\varrho_1^3 - m_3 (Y_2 - Y_3)/\varrho_3^3 \\ X_3'' &= -m_1 (X_3 - X_1)/\varrho_1^3 - m_2 (X_3 - X_2)/\varrho_2^3 \\ Y_3'' &= -m_1 (Y_3 - Y_1)/\varrho_1^3 - m_2 (Y_3 - Y_2)/\varrho_2^3 \end{aligned} \right\} (1)$$

Wir führen jetzt ein bewegliches Koordinatensystem x, y ein, dessen Achsen mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit n rotieren. Die Transformationsgleichungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos nt - y \sin nt \\ Y &= x \sin nt + y \cos nt \end{aligned} \right\} (2)$$

¹⁾ Publikationer og mindre Meddelelser fra Københavns Observatorium No. 34.

Wenn wir diese Werte von X, Y in die Differentialgleichungen (1) einsetzen, erhalten wir das folgende neue System:

$$\left. \begin{aligned} x_1'' - 2n y_1' - n^2 x_1 &= -m_2 (x_1 - x_2)/\varrho_3^3 - m_3 (x_1 - x_3)/\varrho_2^3 \\ y_1'' + 2n x_1' - n^2 y_1 &= -m_2 (y_1 - y_2)/\varrho_3^3 - m_3 (y_1 - y_3)/\varrho_2^3 \\ x_2'' - 2n y_2' - n^2 x_2 &= -m_1 (x_2 - x_1)/\varrho_3^3 - m_3 (x_2 - x_3)/\varrho_1^3 \\ y_2'' + 2n x_2' - n^2 y_2 &= -m_1 (y_2 - y_1)/\varrho_3^3 - m_3 (y_2 - y_3)/\varrho_1^3 \\ x_3'' - 2n y_3' - n^2 x_3 &= -m_1 (x_3 - x_1)/\varrho_2^3 - m_2 (x_3 - x_2)/\varrho_1^3 \\ y_3'' + 2n x_3' - n^2 y_3 &= -m_1 (y_3 - y_1)/\varrho_2^3 - m_2 (y_3 - y_2)/\varrho_1^3 \end{aligned} \right\} (3)$$

Dies Gleichungssystem bildet den Ausgangspunkt der folgenden Untersuchung.

Von den von *Lagrange* gefundenen Lösungen wollen wir uns hier, wie oben angegeben, mit der sogenannten Dreiecks- lösung beschäftigen, und zwar nur mit dem Falle, wo die Distanzen der Massen während der ganzen Bewegung konstant bleiben. Diesen Fall nenne ich der Kürze wegen die Hauptlösung. Diese Lösung zeichnet sich durch eine sehr einfache Bewegung der drei Massen aus. Im festen Koordinatensystem werden sie sich in Kreisen bewegen, deren Zentrum im gemeinsamen Schwerpunkt der Massen liegt. In einem Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt in dem gemeinsamen Schwerpunkt und dessen Achsen mit der Winkelgeschwindigkeit der Massen rotieren, werden sie die Geschwindigkeit Null haben; in diesem Koordinatensystem werden die Massen deshalb in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks liegen bleiben, das in bezug auf Größe und Lage unverändert bleibt.

Der Beweis des *Lagrangeschen* Satzes kann in der folgenden Weise geführt werden.

Indem wir für die Koordinaten der Massen $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ konstante Werte annehmen, haben wir:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_2' = x_3' = 0 & y_1' &= y_2' = y_3' = 0 \\ x_1'' &= x_2'' = x_3'' = 0 & y_1'' &= y_2'' = y_3'' = 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

Ferner setzen wir:

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho. \quad (5)$$

Wenn wir (4) und (5) in (3) einsetzen, erhalten wir zur Bestimmung von x_1, x_2 und x_3 die drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} n^2 \varrho^3 x_1 &= m_2 (x_1 - x_2) + m_3 (x_1 - x_3) \\ n^2 \varrho^3 x_2 &= m_1 (x_2 - x_1) + m_3 (x_2 - x_3) \\ n^2 \varrho^3 x_3 &= m_1 (x_3 - x_1) + m_2 (x_3 - x_2) \end{aligned} \right\} (6)$$

und für die Bestimmung von y_1, y_2 und y_3 ein entsprechendes Gleichungssystem.

Wenn wir jetzt die Gleichungen (6) mit m_1 , bzw. m_2 und m_3 multiplizieren und addieren, erhalten wir die einfache Gleichung:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0. \quad (7)$$

Mit Hilfe von (7) können wir die Gleichungen (6) und in entsprechender Weise die Gleichungen für y_1, y_2 und y_3 reduzieren. Wir erhalten dann:

$$\left. \begin{aligned} (M - n^2 \varrho^3) x_1 &= 0 \\ (M - n^2 \varrho^3) x_2 &= 0 \\ (M - n^2 \varrho^3) x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (8) \quad \left. \begin{aligned} (M - n^2 \varrho^3) y_1 &= 0 \\ (M - n^2 \varrho^3) y_2 &= 0 \\ (M - n^2 \varrho^3) y_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

wo $M = m_1 + m_2 + m_3$.

Wenn nicht sämtliche sechs Koordinaten gleich Null sind, geben die Gleichungen (8) und (9) eine einzige Bedingungsgleichung:

$$M - n^2 \varrho^3 = 0. \quad (10)$$

Wir erhalten also im ganzen drei Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0 \\ M - n^2 \varrho^3 &= 0 \end{aligned} \right\} (11)$$

Die Gleichungen (4), (5) und (11) bestimmen dann die oben erwähnte Hauptlösung.

Wir wollen jetzt annehmen, daß die einer bestimmten Hauptlösung entsprechenden Massenkoordinaten die folgenden Werte besitzen:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3 \\ y_1 &= b_1, \quad y_2 = b_2, \quad y_3 = b_3 \end{aligned} \right\} (12)$$

Wir haben dann:

$$\left. \begin{aligned} m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 &= 0 \\ m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (13)$$

Wir wollen jetzt die Bewegung der drei Massen untersuchen, indem wir annehmen, daß diese sich in der Nähe der durch (12) definierten Punkte befinden. Wenn wir die Koordinaten der Massen in dem beweglichen Achsensystem und relativ zu den Dreieckspunkten mit $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \xi_3, \eta_3$ bezeichnen¹⁾, haben wir:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 + \xi_1, \quad x_2 = a_2 + \xi_2, \quad x_3 = a_3 + \xi_3 \\ y_1 &= b_1 + \eta_1, \quad y_2 = b_2 + \eta_2, \quad y_3 = b_3 + \eta_3 \end{aligned} \right\} (14)$$

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \xi_3, \eta_3$ unendlich kleine Größen erster Ordnung sind; in den vorzunehmenden Reihenentwicklungen wollen wir alle Glieder wegwerfen, die höher als erster Ordnung sind.

Wir wollen im folgenden nur die erste der Gleichungen (3) behandeln; die übrigen fünf Gleichungen können mit Leichtigkeit durch Vertauschung von Buchstaben und Indizes aus dieser erhalten werden.

Wenn wir zunächst (14) und dann (12) in die erste Gleichung (3) einsetzen, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1'' - 2n \eta_1' - n^2 (a_1 + \xi_1) &= \\ &= -m_2 (a_1 - a_2)/\varrho_3^3 - m_3 (a_1 - a_3)/\varrho_2^3 \\ &= -m_2 (\xi_1 - \xi_2)/\varrho_3^3 - m_3 (\xi_1 - \xi_3)/\varrho_2^3 \\ -n^2 a_1 &= -m_2 (a_1 - a_2)/\varrho^3 - m_3 (a_1 - a_3)/\varrho^3 \end{aligned} \right\} (15)$$

Wenn wir die zweite dieser Gleichungen von der ersten subtrahieren, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1'' - 2n \eta_1' - n^2 \xi_1 &= \\ &= -m_2 (a_1 - a_2) (1/\varrho_3^3 - 1/\varrho^3) - m_3 (a_1 - a_3) (1/\varrho_2^3 - 1/\varrho^3) + \\ &= -m_2 (\xi_1 - \xi_2)/\varrho_3^3 - m_3 (\xi_1 - \xi_3)/\varrho_2^3 \end{aligned} \right\} (16)$$

ϱ_2 und ϱ_3 werden durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_2^2 &= (a_1 - a_3 + \xi_1 - \xi_3)^2 + (b_1 - b_3 + \eta_1 - \eta_3)^2 \\ \varrho_3^2 &= (a_1 - a_2 + \xi_1 - \xi_2)^2 + (b_1 - b_2 + \eta_1 - \eta_2)^2 \end{aligned} \right\} (17)$$

bestimmt.

Hieraus erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} d\varrho_2 &= (a_1 - a_3) (\xi_1 - \xi_3)/\varrho + (b_1 - b_3) (\eta_1 - \eta_3)/\varrho \\ d\varrho_3 &= (a_1 - a_2) (\xi_1 - \xi_2)/\varrho + (b_1 - b_2) (\eta_1 - \eta_2)/\varrho \end{aligned} \right\} (18)$$

wo $\varrho^2 = \varrho + d\varrho_2, \varrho_3 = \varrho + d\varrho_3$.

Ferner haben wir:

$$\left. \begin{aligned} 1/\varrho_2^3 - 1/\varrho^3 &= -3d\varrho_2/\varrho^4 \\ 1/\varrho_3^3 - 1/\varrho^3 &= -3d\varrho_3/\varrho^4 \end{aligned} \right\} (19)$$

Aus (16), (18) und (19) ergibt sich die Differentialgleichung:

¹⁾ In der *Strömghenschen* Abhandlung werden die entsprechenden Größen mit $X, Y; X_1, Y_1; X_2, Y_2$ bezeichnet.

$$\left. \begin{aligned} \xi_1'' - 2n\eta_1' - [n^2 + 3m_2(a_1 - a_2)^2/q^5 - m_2/q^3 + 3m_3(a_1 - a_3)^2/q^5 - m_3/q^3] \xi_1 + [3m_2(a_1 - a_2)^2/q^5 - m_2/q^3] \xi_2 + \\ + [3m_3(a_1 - a_3)^2/q^5 - m_3/q^3] \xi_3 - [3m_2(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)/q^5 + 3m_3(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)/q^5] \eta_1 + \\ + [3m_2(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)/q^5] \eta_2 + [3m_3(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)/q^5] \eta_3 = 0. \end{aligned} \right\} (20)$$

Die entsprechende Differentialgleichung für η_1'' lautet:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1'' + 2n\xi_1' - [n^2 + 3m_2(b_1 - b_2)^2/q^5 - m_2/q^3 + 3m_3(b_1 - b_3)^2/q^5 - m_3/q^3] \eta_1 + [3m_2(b_1 - b_2)^2/q^5 - m_2/q^3] \eta_2 + \\ + [3m_3(b_1 - b_3)^2/q^5 - m_3/q^3] \eta_3 - [3m_2(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)/q^5 + 3m_3(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)/q^5] \xi_1 \\ + [3m_2(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)/q^5] \xi_2 + [3m_3(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)/q^5] \xi_3 = 0. \end{aligned} \right\} (21)$$

Der Kürze wegen führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= 3(a_2 - a_3)^2/q^5 - 1/q^3 & q_1 &= 3(b_2 - b_3)^2/q^5 - 1/q^3 & r_1 &= 3(a_2 - a_3)(b_2 - b_3)/q^5 \\ p_2 &= 3(a_1 - a_3)^2/q^5 - 1/q^3 & q_2 &= 3(b_1 - b_3)^2/q^5 - 1/q^3 & r_2 &= 3(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)/q^5 \\ p_3 &= 3(a_1 - a_2)^2/q^5 - 1/q^3 & q_3 &= 3(b_1 - b_2)^2/q^5 - 1/q^3 & r_3 &= 3(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)/q^5. \end{aligned} \right\} (22)$$

Die Gleichungen (20) und (21) und die entsprechenden Gleichungen für die Massen m_2 und m_3 erhalten dann die folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1'' - 2n\eta_1' - (n^2 + m_2 p_3 + m_3 p_2) \xi_1 + m_2 p_3 \xi_2 + m_3 p_2 \xi_3 - (m_2 r_3 + m_3 r_2) \eta_1 + m_2 r_3 \eta_2 + m_3 r_2 \eta_3 &= 0 \\ \eta_1'' + 2n\xi_1' - (n^2 + m_2 q_3 + m_3 q_2) \eta_1 + m_2 q_3 \eta_2 + m_3 q_2 \eta_3 - (m_2 r_3 + m_3 r_2) \xi_1 + m_2 r_3 \xi_2 + m_3 r_2 \xi_3 &= 0 \\ \xi_2'' - 2n\eta_2' - (n^2 + m_3 p_1 + m_1 p_3) \xi_2 + m_3 p_1 \xi_3 + m_1 p_3 \xi_1 - (m_3 r_1 + m_1 r_3) \eta_2 + m_3 r_1 \eta_3 + m_1 r_3 \eta_1 &= 0 \\ \eta_2'' + 2n\xi_2' - (n^2 + m_3 q_1 + m_1 q_3) \eta_2 + m_3 q_1 \eta_3 + m_1 q_3 \eta_1 - (m_3 r_1 + m_1 r_3) \xi_2 + m_3 r_1 \xi_3 + m_1 r_3 \xi_1 &= 0 \\ \xi_3'' - 2n\eta_3' - (n^2 + m_1 p_2 + m_2 p_1) \xi_3 + m_1 p_2 \xi_1 + m_2 p_1 \xi_2 - (m_1 r_2 + m_2 r_1) \eta_3 + m_1 r_2 \eta_1 + m_2 r_1 \eta_2 &= 0 \\ \eta_3'' + 2n\xi_3' - (n^2 + m_1 q_2 + m_2 q_1) \eta_3 + m_1 q_2 \eta_1 + m_2 q_1 \eta_2 - (m_1 r_2 + m_2 r_1) \xi_3 + m_1 r_2 \xi_1 + m_2 r_1 \xi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (23)$$

Dies System von sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung kann mit Hilfe der Schwerpunktsintegrale (11) auf ein System von vier Differentialgleichungen derselben Ordnung reduziert werden. Aus (11), (14) und den Gleichungen (13) erhalten wir nämlich:

$$m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 = 0 \quad m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 + m_3 \eta_3 = 0. \quad (24)$$

Wenn wir mit Hilfe von (24) die zwei Größen ξ_3 und η_3 aus dem System (23) eliminieren, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1'' - 2n\eta_1' - (n^2 + m_1 p_2 + m_2 p_3 + m_3 p_2) \xi_1 + (m_2 p_3 - m_3 p_2) \xi_2 - (m_1 r_2 + m_2 r_3 + m_3 r_2) \eta_1 + (m_2 r_3 - m_3 r_2) \eta_2 &= 0 \\ \eta_1'' + 2n\xi_1' - (n^2 + m_1 q_2 + m_2 q_3 + m_3 q_2) \eta_1 + (m_2 q_3 - m_3 q_2) \eta_2 - (m_1 r_2 + m_2 r_3 + m_3 r_2) \xi_1 + (m_2 r_3 - m_3 r_2) \xi_2 &= 0 \\ \xi_2'' - 2n\eta_2' - (n^2 + m_1 p_3 + m_2 p_1 + m_3 p_1) \xi_2 + (m_1 p_3 - m_3 p_1) \xi_1 - (m_1 r_3 + m_2 r_1 + m_3 r_1) \eta_2 + (m_1 r_3 - m_3 r_1) \eta_1 &= 0 \\ \eta_2'' + 2n\xi_2' - (n^2 + m_1 q_3 + m_2 q_1 + m_3 q_1) \eta_2 + (m_1 q_3 - m_3 q_1) \eta_1 - (m_1 r_3 + m_2 r_1 + m_3 r_1) \xi_2 + (m_1 r_3 - m_3 r_1) \xi_1 &= 0. \end{aligned} \right\} (25)$$

Der Kürze wegen führen wir wieder einige neue Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= m_1 p_2 + m_2 p_3 + m_3 p_2 & Q_1 &= m_1 q_2 + m_2 q_3 + m_3 q_2 & R_1 &= m_1 r_2 + m_2 r_3 + m_3 r_2 \\ P_2 &= m_1 p_3 + m_2 p_1 + m_3 p_1 & Q_2 &= m_1 q_3 + m_2 q_1 + m_3 q_1 & R_2 &= m_1 r_3 + m_2 r_1 + m_3 r_1 \\ P_3 &= m_2 p_3 - m_3 p_2 & Q_3 &= m_2 q_3 - m_3 q_2 & R_3 &= m_2 r_3 - m_3 r_2 \\ P_4 &= m_1 p_3 - m_3 p_1 & Q_4 &= m_1 q_3 - m_3 q_1 & R_4 &= m_1 r_3 - m_3 r_1. \end{aligned} \right\} (26)$$

Die Differentialgleichungen (25) erhalten dann die folgende einfache Form:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1'' - 2n\eta_1' - (n^2 + P_1) \xi_1 + P_3 \xi_2 - R_1 \eta_1 + R_3 \eta_2 &= 0 \\ \eta_1'' + 2n\xi_1' - (n^2 + Q_1) \eta_1 + Q_3 \eta_2 - R_1 \xi_1 + R_3 \xi_2 &= 0 \\ \xi_2'' - 2n\eta_2' - (n^2 + P_2) \xi_2 + P_4 \xi_1 - R_2 \eta_2 + R_4 \eta_1 &= 0 \\ \eta_2'' + 2n\xi_2' - (n^2 + Q_2) \eta_2 + Q_4 \eta_1 - R_2 \xi_2 + R_4 \xi_1 &= 0. \end{aligned} \right\} (27)$$

Das System linearer, homogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (27) hat partikuläre Lösungen von der folgenden Form:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A_1 e^{\lambda t} & \eta_1 &= B_1 e^{\lambda t} \\ \xi_2 &= A_2 e^{\lambda t} & \eta_2 &= B_2 e^{\lambda t}. \end{aligned} \right\} (28)$$

Aus (27) und (28) erhalten wir die Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} [\lambda^2 - (n^2 + P_1)] A_1 + P_3 A_2 - [2n\lambda + R_1] B_1 + R_3 B_2 &= 0 \\ P_4 A_1 + [\lambda^2 - (n^2 + P_2)] A_2 + R_4 B_1 - [2n\lambda + R_2] B_2 &= 0 \\ [2n\lambda - R_1] A_1 + R_3 A_2 + [\lambda^2 - (n^2 + Q_1)] B_1 + Q_3 B_2 &= 0 \\ R_4 A_1 + [2n\lambda - R_2] A_2 + Q_4 B_1 + [\lambda^2 - (n^2 + Q_2)] B_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (29)$$

woraus wir durch Elimination der Integrationskonstanten die

folgende Gleichung in λ erhalten:

$$\left| \begin{array}{cccc} \lambda^2 - (n^2 + P_1) & P_3 & -2n\lambda - R_1 & R_3 \\ P_4 & \lambda^2 - (n^2 + P_2) & R_4 & -2n\lambda - R_2 \\ 2n\lambda - R_1 & R_3 & \lambda^2 - (n^2 + Q_1) & Q_3 \\ R_4 & 2n\lambda - R_2 & Q_4 & \lambda^2 - (n^2 + Q_2) \end{array} \right| = 0 \quad (30)$$

Wenn wir die Determinante entwickeln, erhalten wir eine Gleichung achten Grades in λ ; jedes Paar von konjugierten imaginären Wurzeln dieser Gleichung bedeutet eine periodische Lösung der Differentialgleichungen (27).

Mit Hilfe der Gleichungen (22) und (26) läßt sich die Determinante (30) durch die Koordinaten der Dreieckspunkte $a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3$ ausdrücken. Diese Koordinaten hängen von der Orientierung des Dreiecks im Koordinatensystem ab; da diese Orientierung aber ganz willkürlich ist, wenn nur der gemeinsame Schwerpunkt der Massen in den Anfangspunkt fällt, dürfen wir eine solche Orientierung wählen, daß die Berechnung der Größen P, Q und R möglichst einfach wird. Wir legen das Dreieck derart, daß q_1 der η -Achse parallel wird.

Wir haben dann die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_2 - a_3 &= 0 & b_2 - b_3 &= \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_3} \\ a_1 - a_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{\rho}{\rho_3} & b_1 - b_3 &= \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_3} \\ a_1 - a_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{\rho}{\rho_3} & b_1 - b_2 &= -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_3} \end{aligned} \right\} (31)$$

und mit Hilfe von (22):

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\frac{1}{\rho_3} & p_2 &= \frac{5}{4} \frac{\rho_3}{\rho_3} & p_3 &= \frac{5}{4} \frac{\rho_3}{\rho_3} \\ q_1 &= \frac{2}{\rho_3} & q_2 &= -\frac{1}{4} \frac{\rho_3}{\rho_3} & q_3 &= -\frac{1}{4} \frac{\rho_3}{\rho_3} \\ r_1 &= 0 & r_2 &= \frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot \frac{\rho_3}{\rho_3} & r_3 &= -\frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot \frac{\rho_3}{\rho_3} \end{aligned} \right\} (32)$$

Wir definieren μ_1 , μ_2 und μ_3 :

$$\mu_1 = m_1/M \quad \mu_2 = m_2/M \quad \mu_3 = m_3/M \quad (33)$$

$$\text{wodurch also:} \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1. \quad (34)$$

Ferner haben wir die Gleichung (10): $M - n^2 \rho^3 = 0$ und aus (10) und (33):

$$m_1/\rho^3 = n^2 \mu_1 \quad m_2/\rho^3 = n^2 \mu_2 \quad m_3/\rho^3 = n^2 \mu_3. \quad (35)$$

Aus (26), (32) und (35) ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{5}{4} n^2 & Q_1 &= -\frac{1}{4} n^2 & R_1 &= \frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot (1 - 2\mu_2) n^2 \\ P_2 &= (\frac{9}{4} \mu_1 - 1) n^2 & Q_2 &= (-\frac{9}{4} \mu_1 + 2) n^2 & R_2 &= -\frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot \mu_1 n^2 \\ P_3 &= 0 & Q_3 &= 0 & R_3 &= -\frac{3}{2} \sqrt{3} \cdot \mu_2 n^2 \\ P_4 &= \frac{9}{4} \mu_1 n^2 & Q_4 &= -\frac{9}{4} \mu_1 n^2 & R_4 &= -\frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot \mu_1 n^2 \end{aligned} \right\} (36)$$

Mit diesen Werten erhalten wir aus (30):

$$\left| \begin{array}{ccc} \lambda^2 - \frac{9}{4} n^2 & 0 & -2n\lambda - \frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot (1 - 2\mu_2) n^2 \\ \frac{9}{4} \mu_1 n^2 & \lambda^2 - \frac{9}{4} \mu_1 n^2 & -\frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot \mu_1 n^2 \\ 2n\lambda - \frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot (1 - 2\mu_2) n^2 & -\frac{3}{2} \sqrt{3} \cdot \mu_2 n^2 & \lambda^2 - \frac{9}{4} n^2 \\ -\frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot \mu_1 n^2 & 2n\lambda + \frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot \mu_1 n^2 & -\frac{9}{4} \mu_1 n^2 \end{array} \right| = 0. \quad (37)$$

Wir setzen:

$$z = \lambda/n \quad (38)$$

wodurch (37) in

$$\left| \begin{array}{ccc} z^2 - \frac{9}{4} & 0 & -2z - \frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot (1 - 2\mu_2) \\ \frac{9}{4} \mu_1 & z^2 - \frac{9}{4} \mu_1 & -\frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot \mu_1 \\ 2z - \frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot (1 - 2\mu_2) & -\frac{3}{2} \sqrt{3} \cdot \mu_2 & z^2 - \frac{9}{4} \\ -\frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot \mu_1 & 2z + \frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot \mu_1 & -\frac{9}{4} \mu_1 \end{array} \right| = 0 \quad (39)$$

übergeht, also in eine Gleichung achten Grades in z .

Wenn wir die Determinante in (39) entwickeln, erhalten wir:

$$z^8 + 2z^6 + [1 + \frac{27}{4} (\mu_1 + \mu_2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_1 \mu_2)] z^4 + \frac{27}{4} (\mu_1 + \mu_2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_1 \mu_2) z^2 = 0 \quad (40)$$

Wir schreiben:

$$s = \frac{27}{4} (\mu_1 + \mu_2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_1 \mu_2) \quad (41)$$

und erhalten:

$$z^8 + 2z^6 + (1 + s) z^4 + s z^2 = 0 \quad (42)$$

oder

$$z^2 (z^2 + 1) (z^4 + z^2 + s) = 0. \quad (43)$$

Wir haben also die folgenden drei Gleichungen:

$$z^2 = 0 \quad (44)$$

$$z^2 + 1 = 0 \quad (45)$$

$$z^4 + z^2 + s = 0. \quad (46)$$

Aus

$$z = \lambda/n \quad (47)$$

folgt, daß z und λ gleichzeitig rein imaginäre Werte haben. Wir erhalten deshalb die periodischen Lösungen des Problems, wenn wir die rein imaginären Wurzeln der Gleichungen (44), (45) und (46) bestimmen.

Die erste Gleichung gibt die Doppelwurzel $z = 0$. Dies entspricht einer periodischen Lösung mit unendlich großer Periode. Diese Lösung entsteht durch eine Drehung des Dreiecks um einen unendlich kleinen Winkel um den Schwerpunkt. Diese Lösung hat in diesem Zusammenhange kein Interesse.

Fig. 2.

Die zweite Gleichung gibt die rein imaginären Wurzeln $z = \pm i$, d. h. $\lambda = \pm in$, also eine periodische Lösung mit derselben Periode wie die Periode der Drehung des Dreiecks im festen Koordinatensystem. Eine nähere Untersuchung zeigt, daß diese Lösung mit dem allgemeineren *Lagrangeschen* Falle identisch ist, wo die Bahnen der drei Massen um den gemeinsamen Schwerpunkt keine Kreise, sondern Ellipsen mit unendlich kleiner Exzentrizität sind (vergl. hierzu die oben zitierte Abhandlung von *Strömgren*, S. 33).

Die zwei ersten Gleichungen (44) und (45) geben also keine neue periodische Lösung.

Wir gehen dann zu der dritten Gleichung (46) über.

Sie gibt:

$$z^2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - s}. \quad (48)$$

Die Bedingung dafür, daß z rein imaginär sein soll,

$$\text{lautet:} \quad s \leq \frac{1}{4}. \quad (49)$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, werden beide Wurzeln für z^2 negativ. Jeder dieser negativen Werte von z^2 entspricht einer periodischen Lösung des Problems, und wir haben dadurch die Existenz zweier neuer Klassen periodischer Lösungen nachgewiesen.

Die Größe s ist durch den, in bezug auf μ_1 und μ_2 symmetrischen Ausdruck (41) definiert. Dieser Ausdruck kann mit Hilfe der Gleichung

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$$

in solcher Weise umgeschrieben werden, daß er entweder in bezug auf μ_1 und μ_3 oder in bezug auf μ_2 und μ_3 sym-

P. Pedersen. Erweiterung der Lagrangeschen Dreieckslösungen.

Geometrische Deutung der Bedingungsgleichung für das Auftreten zweier Klassen periodischer Lösungen.

metrisch wird. Wir erhalten dadurch die drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{27}{4}(\mu_1 + \mu_2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_1 \mu_2) \\ s &= \frac{27}{4}(\mu_2 + \mu_3 - \mu_2^2 - \mu_3^2 - \mu_2 \mu_3) \\ s &= \frac{27}{4}(\mu_1 + \mu_3 - \mu_1^2 - \mu_3^2 - \mu_1 \mu_3) \end{aligned} \right\} (50)$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen und Reduktion ergibt sich für s die folgende einfache Form:

$$s = \frac{27}{4}(\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3). \quad (51)$$

Mit Hilfe von (51) läßt sich die Bedingungsgleichung (49) in folgender Weise ausdrücken:

$$\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3 \leq \frac{1}{27}. \quad (52)$$

Wir haben also das folgende Resultat unserer Untersuchung erhalten:

Wenn (52) befriedigt ist, so existieren zwei Klassen Librationen um die Dreieckspunkte, welche wir jetzt, in Analogie mit dem problème restreint und mit dem von *Strömberg* behandelten Falle, Librationspunkte nennen können.

Die Bedeutung der Bedingung (52) wird am besten durch eine geometrische Betrachtung erläutert. Wir denken uns für einen Augenblick die drei Massen μ_1 , μ_2 und μ_3 in den Eckpunkten des gleichseitigen Dreiecks liegend; der gemeinsame Schwerpunkt liegt dann irgendwo innerhalb des Dreiecks. Wenn wir für die Höhe des Dreiecks den Wert 1 wählen, werden die Distanzen des Schwerpunktes von den Seiten μ_1 , bzw. μ_2 und μ_3 sein. Die Bedingung (52) sagt deshalb aus, daß die Lage des Schwerpunktes einer gewissen Bedingung unterworfen ist.

Weil μ_1 , μ_2 und μ_3 die Distanzen eines Punktes von den drei Dreiecksseiten bezeichnen, wird die Gleichung eines Kreises mit dem Zentrum im Zentrum des Dreiecks und mit dem Radius l das folgende Aussehen haben:

$$\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3 = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}l^2. \quad (53)$$

Hieraus folgt, daß die Gleichung

$$\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3 = \frac{1}{27} \quad (54)$$

einen Kreis mit dem Zentrum im Zentrum des Dreiecks und mit dem Radius $\frac{4}{9}\sqrt{2}$ darstellt. Die Bedingung (52) ist erfüllt, wenn der Schwerpunkt entweder auf den Umkreis dieses Kreises oder außerhalb des Kreises fällt.

Weil der Radius dieses Kreises nur um sehr wenig kleiner ist als der Radius des Kreises, der durch die Eckpunkte des Dreiecks geht, so werden diejenigen Teile des Dreiecks, die außerhalb des Kreises liegen, nur ganz kleine Areale in der unmittelbaren Nähe der Dreieckspunkte ausmachen (Tafel 1). Wenn der Schwerpunkt der Massen innerhalb irgend eines dieser Areale fällt, existieren also zwei Klassen periodischer Lösungen; wenn der Schwerpunkt da-

Haslev, 1919 Dezember.

gegen in denjenigen Teil des Dreiecks fällt, der innerhalb des Kreises liegt, existieren diese zwei Klassen nicht.

Wenn wir (51) und (53) vergleichen, sehen wir, daß s in der Form:

$$s = \frac{9}{4} - \frac{81}{16}l^2 \quad (55)$$

geschrieben werden kann.

Aus den Gleichungen (47), (48) und (55) geht hervor, daß λ eine Funktion von l ist. Dies will aber besagen, daß die Umlaufszeit in den periodischen Lösungen eine Funktion der Distanz des Schwerpunktes von dem Zentrum des Dreiecks ist.

Wir wollen diese Umlaufszeit als Funktion von s aufstellen. Unter u verstehen wir das Verhältnis zwischen der Umlaufszeit der Libration und der Umlaufszeit der Achsendrehung. Wir haben dann:

$$u = 2\pi/i\lambda : 2\pi/n = n/i\lambda = 1/iz. \quad (56)$$

Wenn wir den aus (56) bestimmten Wert von z in (46) einsetzen, erhalten wir eine Gleichung, die u als Funktion von s gibt:

$$s u^4 - u^2 + 1 = 0. \quad (57)$$

Die Bedingung für die periodische Lösung lautete:

$$0 \leq s \leq \frac{1}{4}.$$

Wenn s diese Bedingung befriedigt, gibt (57) für u zwei positive und zwei negative Werte, von denen nur die positiven in diesem Zusammenhang Bedeutung haben. Wir erhalten einen guten Überblick über die Variation von s und u , wenn wir die der Gleichung (57) entsprechende Kurve zeichnen (Tafel 1). Aus dem Verlauf der Kurve sehen wir, daß jedem Wert von s zwei Werte von u entsprechen; wenn s sich dem Werte Null nähert, was der Fall ist, wenn der Schwerpunkt sich einer der Ecken des Dreiecks nähert, wird der eine u -Wert sich dem Werte 1 nähern, während der andere u -Wert ins Unendliche wächst. Wenn s sich dagegen dem Werte $\frac{1}{4}$ nähert, was der Fall ist, wenn der Schwerpunkt gegen die Peripherie des Bedingungskreises wandert, werden die zwei u -Werte sich einander mehr und mehr nähern. Wenn $s = \frac{1}{4}$, wird der Schwerpunkt auf die Peripherie des Bedingungskreises fallen; die Gleichung (57) hat dann die Doppelwurzel $u = \sqrt{2}$.

In Übereinstimmung mit den Bezeichnungen im problème restreint können wir die Librationen, deren Umlaufszeit zwischen 1 und $\sqrt{2}$ liegen, kurzperiodisch nennen, während die Librationen mit einer Umlaufszeit größer als $\sqrt{2}$ als langperiodisch bezeichnet werden können.

Alle vorstehend gegebenen Formeln gelten für das problème restreint, wenn wir $\mu_3 = 0$ setzen. Die Bedingungsgleichung (52) gibt dann:

$$\mu_1 \mu_2 \leq \frac{1}{27} \quad (58)$$

also die bekannte Bedingung für Librationen um die Librationspunkte L_4 und L_5 .

Peder Pedersen.

Zusatz. Vor Kurzem — mehrere Monate nachdem die vorstehende Abhandlung an die Redaktion abgesandt war — bin ich, auf vielen Umwegen, auf eine Abhandlung von *E. J. Routh* in The Proceedings of the London Mathematical Society für 1875 gestoßen, in der *Routh* das in der Abhandlung von Herrn *Pedersen* behandelte Hauptproblem behandelt und gelöst hat. Auch wird bei *Routh* eine Abhandlung von *Gascheau* auf demselben Gebiete erwähnt (deren Existenz *Routh* durch eine Bemerkung von *Fullien* kennen gelernt hat, die ihm selbst aber nicht zur Verfügung gestanden hat und die wir hier in Kopenhagen auch nicht haben finden können). Die von Herrn *Pedersen* gefundene Hauptformel (52) stimmt mit dem Resultat von *Routh* überein. Da diese Hauptformel nur durch eine sehr komplizierte Rechnung abzuleiten ist und die von Herrn *Pedersen* angewandte Methode eine andere als die von *Routh* befolgte ist, dürfte die von Herrn *Pedersen* gegebene Ableitung doch ein nicht geringes Interesse

haben, ganz abgesehen von den in dem letzten Teil des Artikels enthaltenen neuen Gesichtspunkten. In diesem Zusammenhange ist auch, außer den von Herrn *Pedersen* zitierten Arbeiten, auf zwei, mir erst jetzt bekannt gewordene Abhandlungen von *Andoyer* im Bulletin Astronomique für 1906 aufmerksam zu machen.

Kopenhagen, 1920 April 14.

E. Strömgren.

Mitteilungen über Kleine Planeten.

Beobachtungen am Lippert-Astrographen der Hamburger Sternwarte in Bergedorf.

Planet	1920	M. Z. Grw.	Position 1920.0	Gr.	Platte	Korr. Eph. B. J.
55 Pandora	Febr. 19	12 ^h 1 ^m 7	11 ^h 8 ^m 3 + 11° 32'	11 ^m 2	758	-1 ^m 4 + 5'
70 Panopaea	April 14	11 53.2	13 23.3 + 0 31	10.7	788	+0.2 - 6
127 Johanna	März 9	9 45.6	12 11.6 + 7 11	10.1	773	+0.5 - 4 ¹⁾
128 Nemesis	» 10	12 13.7	13 21.6 + 0 12	11.8	776	0.0 0
»	April 20	12 46.1	12 50.3 + 3 6		792	+0.1 0
192 Nausikaa	Febr. 25	12 18.2	11 13.5 + 4 59	10.5	770	+0.2 - 4
232 Russia	März 10	12 13.7	13 17.3 - 1 49	12.6	776	+7.7 - 25
»	April 20	12 46.1	12 50.6 + 3 30		792	+7.6 - 33
235 Carolina	» 14	11 53.2	13 34.0 + 0 38	12.4	788	-0.6 - 2
237 Coelestina	März 13	12 47.8	11 58.0 + 16 34	12.5	781	+1.6 - 13
261 Prymno	» 9	9 45.6	12 0.8 + 7 7	11.1	773	-6.1 + 39
269 Justitia	April 20	12 46.1	12 49.9 + 1 20	12.8	792	-0.3 + 2
348 May	» 14	11 53.2	13 29.7 + 5 21	13.0	788	-1.0 + 5
419 Aurelia	Febr. 8	10 38.9	10 36.1 + 2 32	11.5	745	-0.1 - 1
»	» 15	11 48.1	10 30.4 + 3 2		751	-0.1 + 1
»	» 17	12 45.0	10 28.6 + 3 11		754	-0.2 + 1
423 Diotima	März 13	12 47.8	11 39.1 + 20 2	11.0	781	+1.3 - 12
»	» 14	11 57.7	11 38.3 + 20 5		783	+1.4 - 13
»	April 16	10 33.6	11 16.3 + 20 34		789	+1.0 - 13
472 Roma	März 13	12 47.8	11 50.9 + 20 33	11.7	781	-3.3 + 17
»	» 14	11 57.7	11 50.1 + 20 42		783	-3.3 + 17
»	April 16	10 33.6	11 27.4 + 23 19		789	-3.4 + 17
628 Christine	» 16	12 28.6	13 51.2 + 8 22	11.8	790	-1.2 + 6
653 Berenike	» 16	12 28.6	13 40.9 + 6 47	12.5	790	+1.2 - 2 ²⁾
674 Rachel	» 16	10 33.6	11 16.1 + 23 21	11.0	789	+3.8 - 26
753 Tiflis	» 14	11 53.2	13 17.2 + 6 2	12.8	788	-2.6 + 15
776 [1914 TY]	» 16	12 28.6	13 52.4 + 11 37	11.8	790	+0.1 - 1
907 [1918 EU]	» 14	11 53.2	13 27.7 + 4 31	12.4	788	0.0 - 3
909 [1919 FA]	März 24	12 15.7	13 3.2 + 11 25	13.0	786	-0.1 0

¹⁾ BZ 11.

²⁾ BZ 17.

Bergedorf, 1920 April 21.

Elemente von 1920 GM berechnet von Dr. *G. Stracke*
aus Heidelberg Jan. 23, Febr. 8, 25 (ohne Parall.)

1920 Febr. 8.5.

$$\begin{aligned} M_0 &= 344^\circ 31' 5''6 \\ \omega &= 201 40 52.6 \\ \Omega &= 299 43 44.9 \\ i &= 21 2 8.6 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varphi &= 4^\circ 52' 38''2 \\ \mu &= 799''160 \\ \log a &= 0.431584 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &1920.0 \\ &1920.0 \end{aligned}$$

Febr. 16 -0°14 -0°9 (ohne Parall.) *Recheninstitut.*

495 Eulalia.

Eine neue Bahnberechnung durch Variation der geozentrischen Distanzen aus den Beobachtungen 1902 Okt. 25, Nov. 4, 21 und 1906 Dez. 12 (= 1906 WV), 1916 April 3 (= Σ 31) ergab für (495) die stark geänderten Elemente:

1902 Nov. 21.5 M. Z. B.

$$\begin{aligned} M &= 17^\circ 47' 10''5 \\ \omega &= 204 12 47.3 \\ \Omega &= 187 3 12.5 \\ i &= 2 17 49.5 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varphi &= 7^\circ 34' 23''4 \\ \mu &= 903''940 \\ \log a &= 0.395912 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &1902.0 \\ &1902.0 \end{aligned}$$

und damit die Darstellung:

A. Schwassmann.

1902 Nov. 4 $\Delta\lambda = +0''7$ $\Delta\beta = -7''2$

1906 Dez. 12 0'0 0'0

1916 April 3 -1'2 +1'2

Demnach ist die in AN 200.198 als sehr wahrscheinlich bezeichnete Identität mit [1906 WV] sicher; ferner gehört die in Simeis Zirk. XV 495 zugeschriebene Beobachtung, die in AN 205.195 die neue Bezeichnung Σ 31 erhalten hatte, wirklich 495 an.

Eine mit diesen verbesserten Elementen berechnete Aufsuchungsephemeride ist in BZ 1920 Nr. 18 mitgeteilt. Dahlem, Astr. Rechen-Institut, 1920 April 22. *G. Stracke.*

Benennung von Kleinen Planeten.

Dem Planeten 776 [1914 TY] möchte ich den Namen *Berbericia*, dem Planeten 914 [1919 FN] den Namen *Palisana* beilegen, um so für die beiden Astronomen *Adolf Berberich* und *Johann Palisa*, denen die Erforschung der Planetoiden in den letzten Dezennien wohl am meisten verdanke, eine Erinnerung zu stiften.

Königstuhl, 1920 Febr. 6.

M. Wolf.