I. *Vom Widerstande der Flüssigkeiten gegen die
Bewegung fester Körper;*
von Dr. R. Hoppe,
Privatdocent an der Universität Berlin.

Vor zwei Jahren leitete Dirichlet aus den allgemeinen Gleichungen der Hydrodynamik das auffallende Ergebniss ab, daß der Widerstand, den eine unbegrenzte incompressible Flüssigkeit der Bewegung einer Kugel entgegensetzt, der auf sie wirkenden Kraft proportional ist, dagegen weder von der Geschwindigkeit, noch von den Dimensionen der Kugel, sondern bloß noch vom Dichtigkeitsverhältniß des festen und flüssigen Stoffs abhängt.

Obgleich dieß Gesetz wegen mehrerer Umstände keine unmittelbare Anwendung auf wirkliche Fälle zuläßt, so scheint mir doch das Ergebniss der Rechnung in Verbindung mit vorhandenen und noch anzustellenden Versuchen einige Schlüsse zu rechtfertigen, welche der Untersuchung auf einem noch sehr unbekannten Gebiete einen Stützpunkt zu geben fähig sind. Die obengedachten Umstände nämlich, welche ein Zusammentreffen der Beobachtung mit der Theorie verhindern, sind dreierlei Art. Einige lassen sich durch Verallgemeinerung der Rechnung beseitigen, andere dadurch unschädlich machen, daß man ihren Einfluss hinreichend vermindert: zur Untersuchung der übrigen, welche der Rechnung nicht zugänglich sind, liefert die Vergleichung der Beobachtung mit der Rechnung die quantitativen Bestimmungen.

Die zuerst zu erörternde Frage wird die seyn, ob das genannte Gesetz des Widerstandes für alle Körper gelte,

oder der Kugel und andern regelmässigen Figuren eigenthümlich sey. Es ist mir nur gelungen, die Rechnung in Bezug auf solche Körper durchzuführen, welche durch Umdrehung einer ebenen Figur entstehen, für den Fall, wo sie sich in der Richtung ihrer Axe bewegen. Hier zeigte sich ohne Ausnahme, daß der Widerstand der den Körper bewegenden Kraft proportional, von der Geschwindigkeit hingegen unabhängig sey, daß er sich bei proportionaler Aenderung der Dimensionen nicht ändere, wohl aber bei verschiedener Gestalt verschieden sey.

Die Gleichung der Oberfläche des festen Körpers sey in folgender Form ausgedrückt

$$\sum \frac{c}{r^3} = 1,$$

wo $r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$ gesetzt ist, und sich das Summenzeichen auf verschiedene Systeme von a und c bezieht. Jede in dieser Form enthaltene Fläche schließt einen Raum oder mehrere völlig ein, so lange nur ein c positiv ist: denn die linke Seite der Gleichung variirt von 0 zu ∞ , wenn man irgend ein r , dem ein positives c zugehört, von ∞ zu 0 variiren läßt; so daß sich die Fläche nach keiner Seite hin ins Unendliche erstreckt. Betrachtet man c als stetige Function von a , so läßt sich die Summe als ein Integral zwischen beliebigen constanten Gränzen schreiben, und die Gleichung

$$\int \frac{c \partial a}{r^3} = 1$$

kann durch Bestimmung der willkürlichen Function c mit jeder gegebenen Umdrehungsfläche identificirt werden, die gewisse Gränzbedingungen nicht überschreitet. Letztere hindern nicht, daß der Körper an den Enden concav, oder von einem zum andern hin beliebig oft gekerbt sey. Die unvermeidliche Rauheit der Oberflächen kann daher in ihrer rein mechanischen Einwirkung kein Erklärungsgrund für eine Abweichung von den Gesetzen seyn, die sich mit Zugrundelegung obiger Gleichung für den Widerstand ergeben werden.

Es seyen u, v, w , die Componenten der Geschwindigkeit in einem Punkte der Flüssigkeit, die partiellen Differenzialquotienten der folgenden Function

$$\varphi = \lambda \left(x + \Sigma c \frac{x-a}{2r^3} \right),$$

wo λ eine Function der Zeit allein bezeichnet, und die übrigen Buchstaben dieselbe Bedeutung haben, wie oben. Dann ist

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lambda \left(1 + \Sigma c \frac{r^2 - 3(x-a)^2}{2r^5} \right)$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{3}{2} \lambda y \Sigma c \frac{x-a}{r^5}$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{3}{2} \lambda z \Sigma c \frac{x-a}{r^5}.$$

Wie man leicht findet, erfüllt φ die Bedingung der Bewegung einer incompressibelen Flüssigkeit, nämlich

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Die momentanen Bahnen der Elemente, d. h. diejenigen Linien, auf welchen zu irgend einer Zeit jedes Theilchen in den Platz des nächsten einrückt, sind bestimmt durch die Proportionen

$$u : v : w = \partial x : \partial y : \partial z$$

oder die Gleichungen

$$\frac{w}{v} = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad u(y \partial y + z \partial z) = (v y + w z) \partial x$$

und nach Einsetzung der Werthe von u, v, w , wenn $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$,

$$\frac{z}{y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\left(2 + \Sigma c \frac{r^2 - 3(x-a)^2}{r^5} \right) \rho \partial \rho + 3 \rho^2 \Sigma c \frac{x-a}{r^5} \partial x = 0.$$

Die erste Gleichung zeigt, daß jede Bahn in einer Ebene liegt, welche durch die Axe der x geht. Das Integral der zweiten ist

$$\rho^2 \left(1 - \Sigma \frac{c}{r^3} \right) = A$$

und drückt, entsprechend den verschiedenen Werthen der

Constanten A , die verschiedenen Bahnen in einer solchen Ebene aus. Für $A = 0$ zerfällt die Gleichung in die beiden

$$\Sigma \frac{c}{r^3} = 1 \quad \text{und} \quad \varrho = 0.$$

Die entsprechenden Bahnen gleiten demnach auf der Oberfläche des festen Körpers hin, und fallen ausserhalb desselben in die Axe der x .

Für $A < 0$ wird die Gröfse

$$S = 1 - \Sigma \frac{c}{r^3}.$$

< 0 . Da dieselbe für $r = \infty > 0$ ist, so würden die entsprechenden Bahnen im Innern des festen Körpers liegen, sind also nicht vorhanden; vielmehr gehört zu jeder Bahn ein positives A .

Hiermit ist die zweite Bedingung erfüllt, nämlich dafs die Flüssigkeit genau den Raum leer läfst, den der feste Körper einnimmt. Letzterer ist, da seine Gleichung nicht von der Zeit abhängt, als unbeweglich zu denken.

Es ist jedoch sogleich eine dritte Bedingung hinzuzufügen. Läge einer der Punkte $r = 0$ in der Flüssigkeit, so würden sich in ihm viele Bahnen durchschneiden, und daselbst die Geschwindigkeit unendlich grofs werden. Die Bewegung der Flüssigkeit ist daher nur möglich, wenn sämtliche Punkte $r = 0$ im Innern des festen Körpers liegen. Diese Bedingung ist ohne Weiteres erfüllt, wenn sämtliche c positiv sind, wo für hinreichend kleine r stets $S < 0$ wird. Gleichwohl sind negative c nicht ganz ausgeschlossen; denn wenn für $c = 0$ der Punkt $r = 0$ im Innern liegt, so kann er nicht plötzlich nach Aufsen treten, während c allmählig negativ wird. Es sey im Folgenden angenommen, dafs alle Punkte $r = 0$ im Innern liegen.

Ferner möge die Flüssigkeit zu Anfang der Zeit t in Ruhe gewesen seyn, und im Verlauf derselben durch Einwirkung von Kräften, die im Punkte xyz auf die Masseneinheit nach den drei Axenrichtungen mit den Intensitäten α , β , γ wirken, die oben bestimmte Bewegung erlangt

haben. Bezeichnet q die Dichtigkeit der Flüssigkeit, p den Druck, $\omega = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ die Geschwindigkeit, so ist

$$\frac{p}{q} = \text{const.} + \int (\alpha \partial x + \beta \partial y + \gamma \partial z) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \omega^2.$$

Nimmt man an, daß der Druck in unendlicher Entfernung vom festen Körper constant werde, so erhält man, da für $r = \infty$, ω^2 in λ^2 , φ in λx übergeht,

$$\int \left[\left(\alpha - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) \partial x + \beta \partial y + \gamma \partial z \right] = \text{const.}$$

Da aber x, y, z selbst $= \pm \infty$ werden, so hat man, zunächst für $r = \infty$,

$$\alpha = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0;$$

und da λ mit t zugleich verschwindet,

$$\lambda = \int_0 \alpha dt.$$

Im Uebrigen bleiben die Kräfte unbestimmt. Da jedoch aus einem bestimmten Zustande einer Masse durch Einwirkung bestimmter Kräfte in bestimmter Zeit nur *ein* bestimmter Zustand hervorgehen kann, so folgt, daß die Kräfte α, β, γ die Flüssigkeit nothwendig in die durch φ ausgedrückte Bewegung versetzen müssen, wenn sie nur obige Bedingung für $r = \infty$ erfüllen. Diefs kann erstlich dadurch geschehen, daß man in der ganzen Ausdehnung der Flüssigkeit

$$\alpha = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

setzt. Ausser diesen Kräften kann man aber noch beliebige Centralkräfte wirken lassen, wenn nur deren Potentiale für $r = \infty$ in Constante übergehen.

Betrachtet man den ersten Fall, so ist

$$\frac{p}{q} = \text{const.} - \alpha \sum c \frac{x-a}{2r^3} - \frac{1}{2} \omega^2.$$

Für einen Punkt der Oberfläche erhält man

$$u = \lambda \left(\sum \frac{c}{r^3} + \sum c \frac{r^2 - a(x-a)^2}{2r^5} \right) = \frac{3}{2} \lambda \varrho^2 \sum \frac{c}{r^3},$$

folglich ist

$$\frac{1}{2} \omega^2 = \frac{2}{3} \lambda^2 \varrho^2 \left[\varrho^2 \left(\sum \frac{c}{r^3} \right)^2 + \left(c \frac{x-a}{r^3} \right)^2 \right],$$

ein Ausdruck, der sich leicht in folgenden umformen läßt:

$$\frac{1}{2} \omega^2 = \frac{2}{3} \lambda^2 \varrho^2 \left(\sum \frac{c^2}{r^3} + \sum \sum c c' \frac{r^2 + r'^2 - (a-a')^2}{r^3 r'^3} \right),$$

wo a' , c' , r' die Gröfsen a , c , r für ein anderes Glied der ursprünglichen Summe bezeichnen. Mit Anwendung der Gleichung der Fläche geht der Ausdruck noch in folgenden einfacheren über

$$\frac{1}{2} \omega^2 = \frac{2}{3} \lambda^2 \varrho^2 \left(\sum \frac{c}{r^3} - \sum \sum \frac{c c' (a-a')^2}{r^3 r'^3} \right),$$

doch wollen wir nur den vorhergehenden einführen. An der Oberfläche ist demnach der Druck

$$\frac{p}{q} = \text{const.} - \alpha M - \lambda^2 N,$$

wo

$$M = \sum c \frac{x-a}{2r^3}$$

$$N = \frac{2}{3} \varrho^2 \left(\sum \frac{c^2}{r^3} + \sum \sum c c' \frac{r^2 + r'^2 - (a-a')^2}{r^3 r'^3} \right)$$

zu setzen ist.

Aus dem gesammten Drucke, welchen der Körper in allen Punkten seiner Oberfläche normal auf dieselbe erleidet, resultirt eine Kraft, die offenbar in der Richtung der x wirkt: sie sey $= P$. Ist nun $\partial \vartheta$ ein Element der Oberfläche, so ist $p \partial \vartheta$ der darauf wirkende Druck. Um dessen Composante nach x zu finden, braucht man nur für $\partial \vartheta$ dessen Projection auf die Ebene der yz zu setzen, und kann überdies, da der Druck nur von x und ϱ abhängt, das projecirte Element als den Kreisring $2\pi \varrho \partial \varrho$ betrachten. Dann ist

$$P = 2\pi \int p \varrho \partial \varrho.$$

Was die Gränzen des Integrals betrifft, so variirt x von seinem kleinsten zu seinem grössten Werthe, während ϱ mit 0 beginnt und aufhört; denn der Druck wirkt da positiv, wo ϱ mit x zugleich wächst. In gleichem Sinne ist daher

$$\int \varrho \partial \varrho = 0,$$

mithin die Constante im Ausdruck von p überflüssig, und

$$P = -2\pi q \left(\alpha \int M \varrho \partial \varrho + \lambda^2 \int N \varrho \partial \varrho \right).$$

Bezeichnet V das Volum des Körpers, so ist in gleichem Sinne

$$V = \pi \int \varrho^2 \partial x = \pi \int \varrho^2 \partial x \Sigma \frac{c}{r^3}.$$

daher

$$\begin{aligned} V - 2\pi \int M \varrho \partial \varrho &= \pi \Sigma c \int \frac{\varrho^2 \partial x - (x-a) \varrho \partial \varrho}{r^3} \\ &= \pi \Sigma c \int \partial \cdot \frac{x-a}{r}. \end{aligned}$$

Für $\varrho = 0$ wird

$$\frac{x-a}{r} = \pm 1.$$

Besteht nun der Körper aus einem einzigen Stück, so daß die Axe von der Fläche nur in zwei Punkten geschnitten wird, so liegen alle Punkte $r = 0$ zwischen denselben, mithin wechseln alle Größen $x - a$ ihre Vorzeichen, während x seine Werthe durchläuft, und man hat für die untere Gränze -1 , für die obere $+1$ zu setzen. Besteht hingegen der Körper aus mehreren Stücken, so kann, während x die Zwischenräume derselben durchläuft, kein Zeichenwechsel stattfinden, weil alle Punkte $r = 0$ im Innern liegen müssen; und $\frac{x-a}{r}$ hat an den Gränzen der Zwischenräume gleiche Werthe, die sich heben. In allen Fällen ist demnach

$$\int \partial \cdot \frac{x-a}{r} = 2$$

$$2\pi \int M \varrho \partial \varrho = V - 2\pi \Sigma c.$$

Zur Bestimmung des zweiten Integrals

$$\int N \varrho \partial \varrho = \frac{2}{3} \int \varrho^3 \partial \varrho \left(\Sigma \frac{c^2}{r^3} + \Sigma \Sigma c c' \frac{r^2 + r'^2 - (a-a')^2}{r^3 r'^3} \right)$$

wollen wir mit dem ersten Theile eine theilweise Integration vornehmen. Dann kommt

$$\frac{2}{3} \int \rho^3 \partial \rho \sum \frac{c^2}{r^3} = \frac{2}{3} \rho^4 \sum \frac{c^2}{r^3} + \frac{2}{3} \int \rho^4 \sum \frac{c^2 \partial r}{r^3}.$$

Mittelst der Differenzialgleichung der Oberfläche

$$\sum \frac{c \partial r}{r^4} = 0$$

läßt sich jedes Glied der Summe durch die Summe der übrigen ausdrücken. Wendet man diese Transformation auf den zweiten Factor im folgenden Ausdruck an, so kommt

$$\sum \frac{c^2 \partial r}{r^3} = \sum \frac{c}{r^3} \frac{c \partial r}{r^4} = - \sum \sum c c' \frac{r \partial r + r' \partial r'}{r^3 r'^3}.$$

Führt man diese Werthe in das gesuchte Integral ein, so wird der Factor von cc' im allgemeinen Glied der vereinigten Doppelsumme ein vollständiges Differenzial, sobald man, nach Elimination von x zwischen den Gleichungen

$$r^2 = (x - a)^2 + \rho^2; \quad r'^2 = (x - a')^2 + \rho^2$$

ρ^2 und $\rho \partial \rho$ auf die Variablen r und r' zurückgeführt hat; und man kann ohne Schwierigkeit das folgende Integral finden:

$$\begin{aligned} \int N \rho \partial \rho &= \frac{2}{3} \rho^4 \sum \frac{c^2}{r^3} \\ &- \frac{2}{3} \sum \sum c c' \frac{[(a - a')^2 \rho^2 + 2r^2 r'^2][r^2 + r'^2 - (a - a')^2]}{(a - a')^4 r^3 r'^3}, \end{aligned}$$

das ist für $\rho = 0$,

$$\begin{aligned} &= - \frac{2}{3} \sum \sum \frac{c c'}{(a - a')^4} \frac{x - a}{r} \frac{x - a'}{r'} \\ &= \frac{2}{3} \sum \sum \pm \frac{c c'}{(a - a')^4}. \end{aligned}$$

Da nun, wie oben bemerkt, für jeden der beiden Endwerthe von x alle Größen $x - a$ gleiches Vorzeichen haben, so wird hier ohne Unterschied

$$\frac{x - a}{r} \frac{x - a'}{r'} = +1.$$

Für die zwei Gränzen jedes Zwischenraums hat $x - a$ dasselbe Vorzeichen, folglich das Integral gleichen Werth. Folglich ist

$$\int N_{\varrho} \partial \varrho = 0,$$

so daß

$$P = q\alpha(2\pi \Sigma c - V)$$

die Kraft darstellt, welche den Körper in der Richtung der x zu bewegen strebt. Wäre der Körper, der bisher als unbeweglich gedacht wurde, frei, so müßte eine Kraft $= -P$ in gleicher Richtung unmittelbar auf ihn wirken um ihn in Ruhe zu erhalten.

Hieraus läßt sich nun leicht die Berechnung des Falles ableiten, wo ein Körper von der beschriebenen Art in einer anfangs ruhenden, durch keine Kraft afficirten, unbegrenzten Flüssigkeit durch eine auf ihn selbst wirkende Kraft β in der Richtung seiner Axe aus der Ruhe in Bewegung gesetzt wird. Es werde im Verlauf derselben Zeit t , wo die oben beschriebene Bewegung vor sich geht, dem ganzen bewegten Massensystem eine Geschwindigkeit $= l$ in der Richtung der x ertheilt. Dazu wird erfordert, daß auf die Masseneinheit der Flüssigkeit außer α eine Kraft $\frac{\partial l}{\partial t}$, und auf den starren Körper, dessen mittlere Dichtigkeit $= q'$ sey, eine Kraft $q' V \frac{\partial l}{\partial t} - P$ wirke. Setzt man also

$$\alpha + \frac{\partial l}{\partial t} = 0$$

$$q' V \frac{\partial l}{\partial t} - q\alpha(2\pi \Sigma c - V) = \beta,$$

so wird, während auf die Flüssigkeit keine Kraft, auf den Körper eine Kraft β wirkt, letzterer eine Geschwindigkeit l erlangen, und die obigen Gleichungen ergeben die Werthe

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \frac{\beta}{(q' - q)V + 2\pi q \Sigma c}$$

$$\lambda = -l.$$

Hiermit ist zunächst die Bewegung des Systems bestimmt. Die Coordinaten des Punktes xyz gehen durch die gemeinschaftliche Bewegung über in folgende

$$x + \int_0^t l \partial t, \quad y, \quad z,$$

und die hier stattfindende Geschwindigkeit hat die Componenten

$$u = l \sum c \frac{3(x-a)^2 - r^2}{2r^3}$$

$$v = \frac{3}{2} l y \sum c \frac{x-a}{2r^3}; \quad w = \frac{3}{2} l z \sum c \frac{x-a}{r^3}.$$

Da ferner der Körper, wenn er sich ungehindert bewegte, durch Einwirkung der Kraft $q' V \frac{\partial l}{\partial t}$ dieselbe Geschwindigkeit l erlangen würde, so ist der Widerstand

$$\beta - q' V \frac{\partial l}{\partial t} = \frac{\beta q \mu}{q' + q \mu} = q \mu V \frac{\partial l}{\partial t},$$

wo $\mu = \frac{2\pi \sum c}{V} - 1$ gesetzt ist, eine Gröfse, die allein von der Gestalt des Körpers abhängt, dagegen unverändert bleibt, wenn sich die Dimensionen proportional ändern.

Die lebendige Kraft des ganzen bewegten Systems ist

$$= \int_0^{\beta l} \beta l \partial t = \int_0^{\beta l} (q' + q \mu) V l \partial l = \frac{1}{2} l^2 (q' + q \mu) V$$

die des starren Körpers

$$= \frac{1}{2} l^2 q' V$$

folglich die der Flüssigkeit

$$= \frac{1}{2} l^2 q \mu V$$

Demnach drückt die Gröfse $\frac{q}{q'} \mu$ das Verhältniß der lebendigen Kräfte der Flüssigkeit und des starren Körpers aus.

Hat die Summe $\sum c$ nur ein Glied, so drückt die Gleichung

$$\frac{c}{r^3} = 1$$

eine Kugel aus, deren Volum

$$V = \frac{4}{3} \pi c$$

ist, so dafs man hat

$$\mu = \frac{1}{2}.$$

Um ein Beispiel einer andern Figur zu geben, habe ich die durch die Gleichung

$$\frac{81}{3^3} - \frac{16}{r^3} = 1$$

ausgedrückten Rotationskörper gewählt, wo

$$r^2 = x^2 + \varrho^2; \quad r'^2 = (x-1)^2 + \varrho^2$$

ist, mithin die Entfernung der Centra (E) $r=0$ und (F) $r'=0$ die Linieneinheit darstellt, AGB (Fig. 1 Taf. IV) ist die erzeugende Curve, AB die Axe; die ausgezogenen krummen Linien sind die Bahnen der Wassertheilchen relativ zum Körper, die ursprünglich Abstände $=\frac{1}{4}$ von einander haben, die punktirten Linien bezeichnen die gleiche absolute Geschwindigkeit, wenn der Körper in der Axenrichtung bewegt wird, und die dabeistehenden Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ sind die Werthe dieser Geschwindigkeit, wenn man die des Körpers zur Einheit nimmt. Sie erreicht die Einheit in den Punkten A und B , und übersteigt sie am Rande der trichterförmigen Vertiefung nur in sehr geringer Ausdehnung, etwa um $\frac{1}{40}$ im Maximum. Die Linien GG, HH sind die Gränzen, zwischen welchen die Componente u negativ ist, mithin die vom starren Körper fortgerissene Flüssigkeit wieder zurückfließt. Die Länge des Körpers beträgt 7,400, die Breite oder der Durchmesser des größten Querschnitts 8,107. Der Inhalt ist $=84,387\pi$, und da hier $\Sigma c=65$ ist, so ergiebt sich der Werth

$$\mu = 0,5405$$

um 0,0405 größer als bei der Kugel.

Das allgemeinste Ergebniss der vorstehenden Berechnung ist nun folgendes. Wird ein starrer Körper von der Form

$$\Sigma \frac{c}{r^3} = 1,$$

der sich anfangs ruhend in einer ruhenden unbegrenzten incompressibeln Flüssigkeit befindet, durch eine Kraft in der Richtung seiner Axe in Bewegung gesetzt, und wirken die Theile der Flüssigkeit aufeinander und auf den Körper nur durch die Trägheit ihrer Masse: so ist der Widerstand der Flüssigkeit gegen die Bewegung des Kör-

pers in jedem Augenblick proportional der genannten Kraft, und hängt außerdem nur von der Gestalt und dem Dichtigkeitsverhältniß ab. Die Bahnen der Flüssigkeitstheilen, relativ zum Körper genommen, sind für denselben Körper immer dieselben, die Geschwindigkeiten in allen Punkten stets proportional der des Körpers. Sobald die Kraft zu wirken aufhört, verschwindet der Widerstand, die Geschwindigkeit des Körpers wird constant, und die Bewegung des ganzen Systems tritt sofort in den Beharrungszustand.

Die nächste Frage wird nun seyn, inwieweit sich die genannten Voraussetzungen in der Wirklichkeit erfüllen lassen, um eine Vergleichung der theoretischen Gesetze mit den Ergebnissen von Versuchen anstellen zu können. Die Bedingung, daß der bewegte Körper ein Rotationskörper sey, kann besser durch eine andere ersetzt werden. Da nämlich bei einem solchen in jeder durch die Axe gelegten Ebene eine unabhängige Bewegung stattfindet, welche allein von der erzeugenden Linie bestimmt wird, so würde dieselbe Bewegung in einer solchen Ebene auch eintreten, - wie der Körper auch sonst gestaltet seyn mag, wenn nur die Durchschnittslinie seiner Oberfläche und der genannten Ebene dieselbe bleibt, und keine Flüssigkeit durch letztere oder durch die Axe hindurchgeht. Auf den letztgenannten Umstand hat man daher allein zu achten. Es würde im Gegentheil keine Anwendung von der Rechnung zu machen seyn, wenn sich bei einem Versuche eine kreisende Bewegung der Flüssigkeit um die Axe zeigte.

In ähnlicher Weise, wiewohl ohne jene apodiktische Gewißheit, läßt sich auch die zweite Beschränkung der Gestalt ansehen. Die erzeugende Linie des Rotationskörpers enthält, obschon in ihrer Gleichung eine willkürliche Function vorkommt, nicht alle beliebigen Linien: der Körper darf weder ringförmig seyn, noch scharfe auspringende Kanten, noch zu große Vertiefungen oder eine zu große Breite haben. Daß über Fälle der Art die

Rechnung keine Auskunft giebt, scheint mir in der Natur der Sache selbst begründet zu seyn. Es ist nämlich noch nicht nachgewiesen, (und dürfte wohl eher das Gegentheil nachzuweisen seyn,) dafs sich eine incompressible Flüssigkeit bei jeder Begränzung stetig (d. h. ohne Durchschneidung der Bahnen) bewegen *kann*. Wo Bahnen unter einem Winkel zusammentreffen, ohne dafs die Geschwindigkeit gerade $= 0$ wird, erfolgt ein Stofs, dem die Flüssigkeit durch eine kreisende Bewegung ausweicht, die entweder regelmäfsig um die Axe geschieht, wenn der Durchschnitt auf dieser liegt, oder in unregelmäfsigen Strudeln die Bewegung der umgebenden Flüssigkeit stört. Dafs nun alle in der Formel nicht enthaltenen Fälle hierher gehören, läfst sich nicht behaupten; vielmehr zeigt schon ein Rotationsellipsoid, dafs bei beliebiger Breite doch stets die obengenannten Gesetze erfüllt, dafs jene Formel nicht alle mit einer stetigen Bewegung verträglichen Gestalten umfaßt. Wohl aber läfst sich mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit umgekehrt schliessen, dafs eben nur Strudel oder kreisende Bewegung, überhaupt Heraustreten der Flüssigkeit aus den durch die Axe gehenden Ebenen die Anzeichen sind, dafs eine Gestalt mit der stetigen Bewegung unverträglich ist, und an sich eine Ausnahme von den berechneten Gesetzen bedingt. Versuche mit Rotationskörpern haben nur dann Strudel in der Flüssigkeit gezeigt, wenn die hintere Fläche von einer scharfen Kante begränzt war; indess hat man im Ganzen noch wenig auf diesen Punkt geachtet, und es bleibt zweifelhaft, ob ringförmige Körper eine kreisende Bewegung hervorbringen oder nicht.

Der Umstand ferner, dafs die Berechnung eine unbegränzte Flüssigkeit verlangt, die Versuche hingegen in einem Gefäfse vorgenommen werden, kann keinen Einflufs haben, sobald die Beobachtung ergibt, dafs sich die Bewegung der Flüssigkeit nicht bis an ihre Gränzen erstreckt. Der Rechnung zufolge bewegt sich zwar jederzeit die ganze Flüssigkeit; doch nimmt die Geschwindigkeit bei wachsender Entfernung so schnell ab, dafs sie z. B. in

der 5fachen Länge des Körpers vor und hinter demselben nur etwa $\frac{1}{10000}$ der Geschwindigkeit des Körpers beträgt. Die zahlreichen Versuche hingegen, welche bei gleichförmiger geradliniger Bewegung fester Körper im Wasser angestellt sind, bestätigen sämmtlich, daß die Bewegung des Wassers in geringer Entfernung gänzlich aufhört. Alle Erscheinungen würden daher dieselben bleiben, wenn das Wasser von unbegrenzter Ausdehnung wäre.

Von der geringen Compression des Wassers ist um so weniger ein Einfluß zu erwarten, als die Vergleichung des Widerstandes der Luft und des Wassers kein auffallend abweichendes Verhalten ergeben hat.

Nach dem Bisherigen würde man also die äußeren Umstände, welche einerseits der Rechnung, anderseits den Versuchen zu Grunde liegen, als übereinstimmend betrachten können, wenn man zu letztern Rotationskörper ohne scharfe ausspringende Kanten oder tiefe Höhlungen an den Enden anwendete, diese in einem hinreichend weitem Gefäße mit Wasser längs ihrer Axe bewegte, und den Widerstand, sowie die Bahnen der Wassertheile beobachtete. Ist der starre Körper eine Kugel oder ein Ellipsoid, so würde die Bewegung eine beliebige seyn können, da deren Verhalten durch Dirichlet's Berechnung bekannt ist. Zu jenen äußeren Umständen wird hier die Beschaffenheit der Flüssigkeit nicht mit gerechnet; vielmehr jede Wirkung derselben, welche nicht der Trägheit der Masse zukommt, als unbekannte Ursache der Abweichungen betrachtet, welche sich zwischen den Ergebnissen der Rechnung und Beobachtung finden möchten.

Unter den Versuchen, welche den genannten Forderungen gemäß bereits angestellt sind, muß ich zwei Arten unterscheiden: 1) wo eine constante Geschwindigkeit künstlich erzeugt wird; 2) wo die Bewegung selbst aus der Schwerkraft hervorgeht. In Betreff der erstern kann ich mich unmittelbar auf die daraus abstrahirten Gesetze beziehen, welche von allen ohne Ausnahme bestätigt worden sind. Das erste von Wichtigkeit ist, daß sich die

Bewegung des Wassers stets im Beharrungszustande befindet, so lange die des festen Körpers eine geradlinige und gleichförmige ist. Ob derselbe augenblicklich eintritt, scheint mir noch zweifelhaft, da ich bei keinem Versuche eine Angabe über den Beginn der Bewegung finde, und das Verhalten doch sehr dadurch modificirt werden kann, wenn die der constanten Geschwindigkeit vorausgehende Beschleunigung schneller oder langsamer erfolgt. Der Umstand indess, das man ohne Rücksicht auf den Beginn zu nehmen zu übereinstimmenden Resultaten gelangt ist, scheint darzuthun, daß jener Einfluß nicht von Dauer ist, daß vielmehr die Bewegung, wie sie auch entstanden seyn mag, immer dieselbe Gestalt anzunehmen strebt, sobald derselbe Körper dieselbe constaute Geschwindigkeit erlangt. Eine Erscheinung möchte vielleicht dem entgegen seyn. Man hat gewisse Unterschiede in den Erfolgen wahrgenommen, wenn der Körper einmal in einen constanten Wasserstrom eingesetzt, das anderemal in ruhendem Wasser bewegt wurde. Es wäre ungereimt, aus der gleichförmigen Gesamtbewegung eines mechanischen Systems irgend eine Modification erklären zu wollen; und es bleibt daher, wenn nicht etwa andere, dauernde Unterschiede der Beobachtung entgangen sind, die Verschiedenheit im Beginn der relativen Bewegung die einzig mögliche Ursache der Abweichungen. Der Rechnung zufolge tritt der Beharrungszustand augenblicklich mit der constanten Geschwindigkeit des Körpers ein, doch läßt sich nur bei einer stetigen Beschleunigung mit Nothwendigkeit darthun, daß am Schluß derselben der Zustand immer derselbe ist bei derselben Geschwindigkeit des Körpers; eine Bedingung, die bei Einsetzung desselben in einen constanten Strom nicht erfüllt ist. So weit also die Beobachtungen Auskunft geben, findet in diesem ersten Punkte eine vollkommene Uebereinstimmung mit der Rechnung statt.

Auch die Bahnen der Wassertheile fallen in der Rechnung den beobachteten sehr ähnlich aus. Nur nimmt die Geschwindigkeit sowohl als die Ablenkung bei wachsender

Entfernung schneller ab, als es nach jener der Fall ist, verschwindet bald ganz, und letztere ist vor dem Körper merklich gröfser, als hinter demselben, wenn er umgekehrt wird. Der Rechnung nach sind die Bahnen unabhängig von der Geschwindigkeit. Dasselbe giebt Duchemin in der Einleitung seiner Schrift über den Widerstand der Flüssigkeiten als empirisches Gesetz an; doch fehlen entscheidende Thatsachen für diese Behauptung, auch scheint er im weitem Verlauf öfters das Gegentheil vorauszusetzen. Wenn es genau richtig wäre, so müßten die Bahnen auch bei entgegengesetzter Bewegung dieselben bleiben.

Der Widerstand, welchen eine Flüssigkeit der gleichförmigen geradlinigen Bewegung eines starren Körpers entgegensetzt, ist nach dem übereinstimmenden Ergebnifs unzähliger Versuche, als Function der Geschwindigkeit u ,

$$= Au^2 + Bu,$$

wo überdiß A der Dichtigkeit der Flüssigkeit und dem Quadrat der Dimensionen des Körpers proportional ist. Auch hat sich bereits entschieden herausgestellt, dafs das zweite Glied allein von der Zähigkeit der Flüssigkeit herührt. Die gleiche Ansicht hatte schon Newton, obgleich ihm die beweisenden Thatsachen fehlten. Wenn man aber von ihm an bis jetzt geglaubt hat, dafs der erste Theil des Ausdrucks theils der Trägheit der Flüssigkeitsmasse, theils der Reibung der Oberfläche zuzuschreiben sey, so findet die alte Erklärungsweise nun ihre Widerlegung, indem die Rechnung zeigt, dafs die Masse als solche *keinen* Widerstand leistet. Es ist keine Kraft nöthig, um die Masse der Flüssigkeit in ihrer Bewegung zu erhalten, sondern nur um fremden Einflüssen das Gleichgewicht zu halten, welche ihre Geschwindigkeit zu vermindern streben. In letzteren ist also der Widerstand zu suchen.

Was ferner die Reibung als Ursache des Widerstands betrifft, so müssen wenigstens zwei Elemente, die man wohl in ihren Begriff zu ziehen pflegt, hier von der Mitwirkung ausgeschlossen werden. Erstens denkt man dabei gewöhnlich an die Ablenkung der Wassertheilchen, deren Bahnen
durch

durch die Unebenheit der Oberfläche gekrümmt werden. In diesem Sinne ist die Reibung in der Trägheit der Masse enthalten, und hat demnach schon ihre Berücksichtigung in der Rechnung gefunden.

Zweitens schreibt man die Reibung der Anziehung des Körpers gegen die ihn berührenden Flüssigkeitstheilchen zu. Ist diese Anziehung eine Centralkraft, vermöge deren jedes Molecul des Körpers jedes naheliegende der Flüssigkeit mit einer bloß von ihrer Entfernung abhängigen Intensität anzieht: so hat sie, wie oben bewiesen ist, auf die Bewegung der Flüssigkeit, wenn die des starren Körpers vorgeschrieben ist, keinen Einfluß. Der Druck hingegen, welchen sie auf die Oberfläche ausübt, hebt sich im Zustand der Ruhe auf; da aber die Entfernung der Molecule während der Bewegung in jedem Augenblicke dieselbe ist, als wenn in eben diesem Augenblicke Stillstand einträte, so kann auch die Bewegung das vorhandene Gleichgewicht nicht unterbrechen. Jede Vermehrung der Resultante des Drucks durch eine solche Anziehung ist demnach unmöglich. Eine andere (sey es von der Bewegung abhängige oder polarisirte, von der Richtung abhängige) Anziehung der Molecule kennt man in der Mechanik nicht; folglich kommt der ganze, nicht unbeträchtliche Effect Au^2 ohne alle mechanische Mitwirkung zustande. Dasselbe gilt offenbar von dem anderen Theile Bu , welcher der Zähigkeit der Flüssigkeit zukommt. Wäre die Zähigkeit nichts als eine mechanische Anziehung der Theile der Flüssigkeit, so würde sie die Bewegung nicht hindern: die Trennung der Theile würde nämlich nicht mehr Kraft erfordern, als bei ihrer Wiedervereinigung Kraft erzeugt würde. Die Beobachtung zeigt hier in der Gesamtwirkung das Gegentheil.

Indem ich mich hier, mit Vermeidung unreifer Betrachtungen, auf das eine Resultat beschränke, daß der beobachtete Widerstand bei gleichförmiger Bewegung eine meßbare Wirkung unbekannter Vorgänge unter sehr verschiedenen Bedingungen isolirt darbietet, die fernere Benutzung

dieses Umstandes hingegen von dem Ergebniss neuer Untersuchungen abhängen lassen muß, wende ich mich zu der zweiten Art von Versuchen, bei welchen die Bewegung des starren Körpers nicht gegeben ist, sondern als Folge der Schwerkraft der Beobachtung unterliegt. Solche Versuche habe ich nur in geringerer Zahl vorgefunden; auch genügen die Zahlenangaben, weil sie zu anderem Zwecke angestellt wurden, nicht für den gegenwärtigen.

Newton beobachtete die Fallzeit von verschiedenen Kugeln im Wasser, jedoch jede nur für eine Höhe. Daher würden die Ergebnisse nur nach Zugrundelegung einer bestimmten Formel zur Bestimmung von Constanten dienen können. Indefs zeigt sich, daß sie auch dazu nur theilweise ausreichen. Nimmt man an, daß der in der gleichförmigen Bewegung beobachtete Widerstand auch hier einfach der Schwere entgegenwirkt, ohne die sonst geltenden Fallgesetze zu alteriren, so hat die Gleichung die Form

$$\frac{4\pi}{3} c^3 (q' + q\mu) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{4\pi}{3} c^3 (q' - q) g - \frac{4\pi}{3} c^2 q (\alpha u^2 + \beta u),$$

wo c der Radius der Kugel, und α, β, μ die zu bestimmenden Zahlen sind. Letztere hat zwar der Rechnung zufolge schon den Werth $\frac{1}{2}$; doch läßt sich nicht voraussetzen, daß die lebendigen Kräfte der Flüssigkeit und des starren Körpers in der Wirklichkeit in demselben Verhältniß stehen, wie es sich in jener ergeben hat. Ist x die Fallhöhe, so ergiebt die Integration

$$x = \frac{\epsilon - \beta}{2\alpha} t - \frac{\delta}{\alpha} \log \frac{2\epsilon}{\epsilon + \beta} + \frac{\delta}{\alpha} \log \left(1 + \frac{\epsilon - \beta}{\epsilon + \beta} e^{-\frac{\epsilon t}{\delta}} \right),$$

wo

$$\delta = 2c \left(\frac{q'}{q} + \mu \right),$$

$$\epsilon = \sqrt{8cg \left(\frac{q'}{q} - 1 \right) \alpha + \beta^2}$$

gesetzt ist. Der letzte Theil des Ausdrucks ist eine nur für kleine Fallzeiten merkliche Gröfse, und $\frac{\epsilon - \beta}{2\alpha}$ die constante Geschwindigkeit, welche die sinkende Kugel sehr

bald ohne merklichen Fehler annimmt, während $\frac{\delta}{\alpha} \log \frac{2\epsilon}{\epsilon + \epsilon}$ die Distanz bezeichnet, um welche dieselbe hinter einer von Anfang an mit derselben Geschwindigkeit bewegten Kugel zurückbleibt. Newton verglich die Resultate seiner Beobachtung mit einer Formel, die dieser identisch wird, wenn man

$$\alpha = \frac{3}{5}, \quad \beta = 0, \quad \mu = 0$$

setzt, und begnügte sich mit der erhaltenen Uebereinstimmung, obgleich die größte Abweichung der Mittelwerthe noch $\frac{1}{12}$ Sekunden Fallzeit oder 17 Zoll Fallhöhe betrug. Offenbar hat α den größten, μ den kleinsten Einfluss; daher liefs sich auch α sehr genau bestimmen, indem es nach neueren Versuchen = 0,384, also blofs um 0,009 gröfser ist als bei Newton. Zur Auffindung von β und μ hingegen fehlt jede experimentelle Grundlage; denn da bei den schwereren Kugeln die Fallzeit immer zu groß ist, so könnte man nur durch negative, große Werthe von β und μ die Fehler ausgleichen, während kleine positive Werthe die Fehler nicht wesentlich vergrößern, mithin möglich bleiben.

Auch Newton schreibt den Theil des Widerstandes βu , den er hier vernachlässigt hat, der Zähigkeit des Wassers, den anderen αu^2 der Trägheit zu, während er die Gröfse μ , welche in der That, und zwar allein aus letzterer Ursache entspringt, gar nicht in Rechnung gezogen hat. Bei so großen Fallhöhen (10 und 15 Fufs), wie sie von ihm angewandt wurden, müfste man indess noch einen vierten Einfluss berücksichtigen. Beaufoy hat den Widerstand des Wassers bei 6 und 9 Fufs Tiefe untersucht, und eine nicht unbeträchtliche Zunahme bei größerer Tiefe gefunden. Da jedoch das Gesetz der Aenderung nicht festgestellt ist, so geht nur soviel daraus hervor, dafs man auf keine genauen Resultate rechnen konnte.

Um demnach die nöthigen Data zur Bestimmung der Unbekannten zu erhalten, müfste man die Fallzeiten eines

Körpers für *verschiedene* Höhen beobachten, und zwar würden aus doppeltem Grunde die Versuche mit geringen Höhen größeren Werth haben, weil hier der Einfluss von β und μ größer, die Druckdifferenz kleiner ist. Statt einer Kugel liesse sich ein beliebiger abgerundeter, länglicher, aber nicht hohler Rotationskörper anwenden, dessen Schwerpunkt in der Axe, dem einen Ende nahe, läge; zugleich mit dem Vortheil, dass sich etwaige Schwankungen (denen Newton die Verzögerung der schwereren Kugeln zuschrieb) kenntlich machten. Ehe man andere Körper substituirt, müßten erst die Fallgesetze, welche noch auf unsicheren Voraussetzungen beruhen, für einen Körper festgestellt seyn.

Ferner sind die Versuche zu erwähnen, die mit Pendeln im Wasser angestellt sind. Sie gewähren den Vortheil, dass man nicht bloß die Zeiten der Schwingungen, sondern auch ihre Abnahmen beobachten und als Data benutzen kann. Hierzu kommt die größere Genauigkeit, mit der sich die Versuche anstellen lassen, die Wiederholung der Erscheinung ohne neuen Eingriff, der größere Einfluss von β und μ , und das Hinwegfallen der Druckdifferenz. Beaufoy hat sehr viele verschieden gestaltete Körper als Pendel im Wasser schwingen lassen; da es jedoch nur sein Zweck war, die Gestalt des Körpers zu finden, welcher den mindesten Widerstand erfährt, so finden sich gerade diejenigen Gestalten, welche allein eine Vergleichung mit der Rechnung zulassen, die Kugel und das Ellipsoid, nicht unter denselben. Auch ist jedesmal nur eine Schwingung beobachtet, und die Höhe angegeben, bis zu welcher das Pendel am Ende derselben steigt.

Bei der Mehrzahl der übrigen, namentlich von Dubuat, Baily und Bessel angestellten Versuche ist die Kugel angewandt worden. Ich will zunächst die Formeln entwickeln, aus denen sich die Abhängigkeit der Dauer und Abnahme der Schwingungen von den einzelnen Theilen des Widerstandes erkennen läßt. Ist c der Radius der Kugel, f der Abstand ihres Mittelpunkts vom Aufhänge-

punkte des Pendels, φ der Winkelabstand des Pendels von der Verticale, so ist

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \frac{4\pi}{3} c^3 q' (f^2 + \frac{2}{3} c^2)$$

die lebendige Kraft der Kugel. Da der zweite Theil der Klammer von der Rotation der Kugel herrührt, welche auf das Wasser keinen Einfluß hat, so ist die lebendige Kraft des Wassers

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \frac{4\pi}{3} c^3 f^2 q \mu.$$

Denkt man den Reibungswiderstand als eine Kraft, welche der Bewegung der Kugel mit der Intensität

$$\frac{4\pi}{3} c^2 q \left[\alpha' f^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \beta' f \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]$$

entgegenwirkt, außerdem aber die Schwerkraft

$$\frac{4\pi}{3} c^3 (q' - q) g$$

als einzig wirkende Kraft, so giebt die Gleichung der lebendigen Kräfte

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma \sin \varphi = 0,$$

wo

$$\alpha = \frac{2\alpha' f}{cM}; \quad \beta = \frac{2\beta'}{cM}; \quad \gamma = \frac{2g}{fM} \left(\frac{q'}{q} - 1 \right)$$

$$M = \left(1 + \frac{2c^2}{5f^2} \right) \frac{q'}{q} + \mu$$

gesetzt ist. Da sich die vollständige Gleichung nicht integrieren läßt, so sey zuerst $\beta = 0$; dann erhält man

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} (\cos \varphi - \alpha \sin \varphi + C e^{-\alpha \varphi}).$$

Entwickelt man den Ausdruck bis zu den vierten Potenzen der Bogen, und setzt

$$\varphi = \lambda \xi - \vartheta,$$

wo 2λ die Weite einer ganzen Schwingung, 2ϑ den Verlust an Elongation bezeichnet, so sind -1 und $+1$ die beiden Gränzwerte von ξ , für welche der Ausdruck verschwinden muß. Hieraus ergibt sich einerseits die Relation

$$\vartheta = \frac{1}{3} \alpha \lambda^2,$$

andererseits erhält die Gleichung die Form

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\gamma}{2} (1 - \xi^2)(1 - L),$$

wo

$$L = \frac{5\alpha^2 + 1}{12} \lambda^2 - \alpha \vartheta + \frac{\alpha}{3} \lambda \xi - \frac{\alpha^2 - 1}{12} \lambda^2 \xi^2 + \text{etc.}$$

gesetzt ist. Führt man diesen Ausdruck in die rechte Seite der vollständigen Differenzialgleichung ein, wo

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{1 - \xi^2} (1 - \frac{1}{3} L)$$

wird, so giebt die abermalige Integration

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\gamma}{2} [(1 - \xi^2)(1 - L) - N],$$

wo

$$N = \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \frac{1}{\lambda} \left[\arcsin \xi - \frac{\pi}{2} \xi + \xi \sqrt{1 - \xi^2} + \frac{\alpha}{9} \lambda^2 (1 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} + \dots \right]$$

zu setzen ist; und nach Einsetzang der Gränzwerthe von ξ die vervollständigte Relation

$$\vartheta = \frac{1}{3} \alpha \lambda^2 + \frac{\pi}{4} \beta \sqrt{\frac{2}{\gamma}}.$$

Entwickelt man in folgender Form

$$\partial t = \partial \xi \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{1 + \frac{1}{2} L + \frac{3}{2} L^2}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{N}{2(1 - \xi^2)^{\frac{3}{2}}} + \dots \right)$$

und integrirt von $\xi = -1$ bis $\xi = +1$, so verschwinden die 3 ersten Glieder in N , und die Dauer einer ganzen Schwingung wird

$$T = \pi \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \left(1 + \frac{1}{16} \lambda^2 + \frac{\alpha^2}{24} \lambda^2 \right) + \frac{\alpha \beta \lambda}{9 \gamma}.$$

Die Entwicklung setzt voraus, daß λ zwar klein, doch noch beträchtlich gegen β sey; sonst würde ϑ mit der Zeit λ übersteigen.

Da α fast proportional mit f wächst, so wird die Schwingungsdauer für gröfsere Pendellängen gröfser, als man erwarten müfste, wenn man den Einfluß von α nicht berück-

sichtigte. Dieß stimmt mit dem Ergebniss der Bessel'schen Versuche überein, denen zufolge ein kürzeres Pendel den Werth $\mu = 0,602$, ein dreimal so langes $\mu = 0,648$ lieferte, und wo bei der Berechnung α nicht in Betracht kam. Allerdings kann man auch bei vollständiger Berücksichtigung aller Einflüsse nicht erwarten, daß μ in allen Fällen eine und dieselbe Zahl ist: die Differenz würde sich nur vermindern, und für practische Zwecke wenig gewonnen seyn. Für den gegenwärtigen ist dieselbe unbedingt erforderlich; denn μ ist eine definierte GröÙe, bei deren Ermittlung jeder fremde Einfluß ausgeschlossen werden muß.

II. *Ueber ein neues Hygrometer;* *von E. H. von Baumhauer,*

Prof. d. Chemie u. Pharmacie am *Athenaeum illustre* in Amsterdam.

Die bisher gebräuchlichen Hygrometer und Psychrometer haben sämmtlich den Zweck den Feuchtigkeitszustand der Luft für einen bestimmten Augenblick anzuzeigen, wo denn zur Bestimmung der Aenderungen des Feuchtigkeitszustandes während eines ganzen Tages eine große Reihe von Beobachtungen nöthig ist. Dazu kommt noch, daß man den mittleren Feuchtigkeitszustand innerhalb einer bestimmten Zeit durch sie nicht erfahren kann. Bei allen anderen meteorologischen Beobachtungen wird die Methode der Aufzeichnung mittelst selbst-registrierender Instrumente allgemein angewandt; bei den hygrometrischen ist dieß jedoch noch nicht gelungen, abgerechnet den Gebrauch des selbst-registrierenden Haarhygrometers, dessen Angaben aber nicht genau sind.

Durch das neue Hygrometer, welches ich den Meteorologen vorlege, ist man im Stande, den Feuchtigkeitszustand nicht nur für sehr kleine Zeiträume, und folglich

Grinand & Co.