I. *Vom dynamischen Gleichgewicht der Elektrizität
in einer Ebene oder einem Körper;
von Dr. W. Smaasen in Utrecht.*

Wenn die Elektrizität durch einen Draht in eine Ebene oder einen Körper überströmt, und sie kann sich daselbst frei ausbreiten, so ist die Vertheilung im ersten Moment eine veränderliche, von der Zeit abhängige; allein bald geht dieser Zustand in einen anderen über, der, wiewohl er auch nach den Coordinaten verschieden seyn kann, doch von der Zeit unabhängig ist. Dieser Beharrungszustand, den wir dynamisches Gleichgewicht nennen wollen, ist es, mit dem wir uns insbesondere beschäftigen werden. Zuvörderst werde ich suchen, die zum dynamischen Gleichgewicht der Elektrizität in einer Ebene oder einem Körper erforderlichen Bedingungen anzugeben, um sie zweitens auf die Vertheilung der Elektrizität in einer unbegrenzten Ebene anzuwenden, eine Aufgabe, deren Lösung zuerst von Hrn. Kirchhoff in einer schönen Abhandlung in diesen Annalen (Bd. 64, S. 497) geliefert worden ist.

I. Von den Fundamentalgleichungen des dynamischen Gleichgewichts der Elektrizität in einer Ebene oder einem Körper.

§. 1.

Betrachten wir zunächst die Elektrizitätsmenge T , welche in der Zeiteinheit einen unendlich kleinen Querschnitt eines Körpers durchströmt. Wir nennen sie Elektrizitätsfluth, nach Analogie mit dem Ausdruck „*flux de chaleur*“, den Poisson in die mathematische Physik eingeführt hat. Sey d der unendlich kleine Querschnitt winkelrecht auf der Linie, welche die beiden Moleküle E und E' verbindet.

Wir können diese von solcher Gröfse annehmen, dafs die durch den Durchschnitt d strömende Elektricität nur aus ihrer Wirkung entspringt. Die durch d strömende Elektricität ist proportional erstlich einer unbekannten Function α der Coordinaten $E(x, y, z)$ und $E'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, zweitens dem Unterschiede $\Delta \varphi$ ihrer Spannungen, und drittens den Volumen M und M' der Molecüle.

Sonach finden wir:

$$I = \alpha M M' \Delta \varphi$$

Wenn der Spannungsunterschied $\Delta \varphi = 1$ ist, so wird die Elektricitätsfluth $\alpha M M'$ seyn, und das Product aus dieser Fluth in den Abstand δ der Molecüle wird vorstellen, was man Leitungsfähigkeit (k) der Materie nennt; denn es ist klar, dafs die Leitungsfähigkeit in demselben Verhältnifs wachsen wird als der Abstand δ , wenn die Quantität der fortgepflanzten Elektricität dieselbe bleibt. Sonach ist:

$$k = \alpha M M' \delta$$

$$I = \frac{k \Delta \varphi}{\delta}$$

und man hat auch:

$$\Delta \varphi = \frac{d\varphi}{dx} \Delta x + \frac{d\varphi}{dy} \Delta y + \frac{d\varphi}{dz} \Delta z.$$

Seyen α, β, γ die Winkel, welche die Normale des Querschnitts d mit den drei Coordinataxen macht. Dann hat man:

$$\frac{\Delta x}{\delta} = -\cos \alpha, \quad \frac{\Delta y}{\delta} = -\cos \beta, \quad \frac{\Delta z}{\delta} = -\cos \gamma.$$

folglich:

$$I = -k \left\{ \frac{d\varphi}{dx} \cos \alpha + \frac{d\varphi}{dy} \cos \beta + \frac{d\varphi}{dz} \cos \gamma \right\}$$

Daraus ergibt sich leicht die Gleichung des dynamischen Gleichgewichts der Elektricität in einem Körper:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= 0 \\ \text{und in einer Ebene:} \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Will man die äufsere Leitungsfähigkeit oder die der Ebene von der Luft entzogene Elektricitätsmenge berück-

sichtigen, und dabei diese Menge proportional der Spannung irgend eines Punkts der Ebene setzen, so findet man für das dynamische Gleichgewicht die Gleichung:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = \lambda^2 \varphi \quad . . . . . (2)$$

wo λ^2 ein Bruch ist, der zum Zähler die äußere Leitungsfähigkeit hat, und zum Nenner das Product aus der inneren Leitungsfähigkeit in den Abstand der Ebenen, zwischen welchen die Elektrizität circulirt.

§. 2.

Es ist leicht zu beweisen, daß die sich bewegende Elektrizität betrachtet werden kann als zertheilt in eine Unendlichkeit secundärer Ströme. Um dies zu zeigen, beschreiben wir um irgend einen Punkt P (Taf. II, Fig. 7), dessen Coordinaten x, y sind, als Centrum einen Kreis mit einem unendlich kleinen Radius $=\rho$; sey φ die Spannung des Punktes P und φ' die Spannung eines Punktes Q auf dem Umfang des Kreises. Sey PR parallel der Axe der x und sey der Winkel $RPQ = \vartheta$, so werden die Coordinaten des Punktes Q seyen:

$$x + \rho \cos \vartheta, \quad y + \rho \sin \vartheta,$$

und die Spannung des Punktes Q wird gegeben durch die Formel:

$$\varphi' = \varphi + \frac{d\varphi}{dx} \rho \cos \vartheta + \frac{d\varphi}{dy} \rho \sin \vartheta.$$

Die Linie PQ kann man so wählen, daß der Spannungsunterschied $\varphi' - \varphi$ der Punkte P und Q ein Maximum ist; der Winkel ϑ wird dann gegeben durch die Formel:

$$\tan \vartheta = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dx}} \quad . . . . . (3)$$

Läßt man die Coordinataxensich solchergestalt drehen, daß die Linie PR zusammenfällt mit PQ , so hat man $\vartheta = 0$ und $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, und die Spannung φ'' eines Punktes Q' , des-

sen Radius vector den Winkel ϑ' mit PR macht, wird seyn:

$$\varphi'' = \varphi + \frac{d\varphi}{dx} \varrho \cos \vartheta'.$$

Klar ist, daß die dies- und jenseits der Linie PR , in gleichem Abstand vom Punkte Q liegenden Punkte gleiche Spannung besitzen, weil φ'' dasselbe bleibt, wenn man ϑ' in $-\vartheta'$ verwandelt. Es gibt also keinen Grund, weshalb die Elektrizität sich von P lieber nach M als nach M' fortpflanzen solle, wenn diese Punkte gleichen Abstand vom Punkte Q besitzen, so daß die Elektrizität sich nur längs der Linie PQ fortpflanzen wird. Deshalb wird die Linie PQ die Richtung des elektrischen Stroms in dem Punkte P seyn, und der Winkel ϑ , welchen diese mit der Axe der x macht, wird durch die Formel (3) gegeben.

Ist der Punkt Q' so gewählt, daß $\vartheta' = \pm 90^\circ$, so hat man $\varphi' = \varphi$. Geht man also von einem gegebenen Punkte aus, so läßt sich eine Reihe von Punkten ziehen, welche gleiche Spannung besitzen, und deshalb Linien gleicher Spannung heißen.

Die Linien gleicher Spannung und die elektrischen Ströme bilden demnach zwei Systeme rechtwinkliger Curven.

Eben so kann man beweisen, daß in einem Körper die Elektrizität sich in Linien fortpflanzt, die man elektrische Ströme nennt. Um einen Punkt M (Taf. II, Fig. 8), dessen Coordinaten x, y, z sind, wollen wir als Centrum eine Kugel von dem Radius ϱ construiren. Ziehen wir durch diesen Punkt drei Axen parallel den gegebenen Axen. Sey φ die Spannung des Punktes M , φ' die eines Punktes P , welcher so gewählt ist, daß $\varphi' - \varphi$ ein Maximum sey. Ist ϑ der Winkel der Linie MP mit der Ebene der xy und γ der Winkel, welchen die Projection der Linie MP auf die Ebene der xy mit der Axe der x macht, so hat man:

$$\varphi' - \varphi = \varrho \left\{ \frac{d\varphi}{dx} \cos \vartheta \cos \gamma + \frac{d\varphi}{dy} \cos \vartheta \sin \gamma + \frac{d\varphi}{dz} \sin \vartheta \right\}$$

und da die Bedingung des Maximums ist:

$$\frac{d(\varphi' - \varphi)}{d\vartheta} = \frac{d(\varphi' - \varphi)}{d\gamma} = 0,$$

so findet man:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dx}}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left[\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right]}}$$

Auf dieselbe Weise wie oben läßt sich nun zeigen, daß die Linie MP die Richtung des elektrischen Stroms im Punkte M ist; also wird die Richtung des Stroms durch die Winkel ϑ und γ bestimmt. Legt man durch den Punkt M eine Ebene winkelrecht auf die Linie MP , so kann man leicht erweisen, daß alle Punkte, welche in dem Durchschnitt dieser Ebene mit der Kugel liegen, dieselbe Spannung haben, wie der Punkt M ; mithin wird diese Ebene die Richtung der durch den Punkt M gehenden Fläche gleicher Spannung anzeigen, und letztere also winkelrecht seyn auf dem elektrischen Strom.

§. 3.

Bei den meisten Fragen der mathematischen Physik muß man noch Rücksicht nehmen auf andere Bedingungen, wie die, welche ausgedrückt wird durch die Fundamentalgleichung (1), deren allgemeines Integral durch unbestimmte Functionen gegeben wird. So muß man, bei der Frage über die Vertheilung der Elektricität in einer Ebene oder einem Körper, die Gränzen dieser Ebene oder dieses Körpers in Rechnung ziehen; man muß ausdrücken, daß die Elektricität sich nicht über diese Gränze hinaus fortpflanzen könne; man genügt ihr durch die Annahme, daß die Linien gleicher Spannung winkelrecht seyen an den Gränzen der Ebene. Seyen α und β die Winkel, welche die Normale der die Gränze der Ebene bestimmenden Curve mit den Axen der x und y macht, und ϑ der Winkel, welchen die Tangente mit der Axe der x bildet, so hat man durch die Formel (3):

$$\operatorname{tg} \vartheta = - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dx}}$$

und die Bedingung der Gränzen ist:

$$\frac{d\varphi}{dx} \cos \alpha + \frac{d\varphi}{dy} \cos \beta = 0,$$

zu welcher man noch die Gleichung der Gränzcurve hinzufügen muß.

Zweitens wird die Spannung der Elektrode eine gegebene Gröſſe seyn, und man wird behaupten können, daß diese Gröſſe im Allgemeinen, wegen der Kleinheit der Elektrode, für alle Punkte die nämliche Constante seyn werde. Wenn ihre Gröſſe nicht mehr wegen der Dimensionen der Ebene zu vernachlässigen wäre, würde man nicht mehr dieselbe Voraussetzung machen können, und die Aufgabe würde verwickelter werden.

§. 4.

Theorem. Wenn die Elektrizität zu gleicher Zeit aus mehreren Elektroden fließt, so wird die Spannung an irgend einem Punkte bestimmt durch eine Linearfunction der Spannungen, von denen dieser Punkt afficirt seyn würde, wenn die Elektrizität nur aus jeden dieser Elektroden einzeln flösse.

Setzen wir, um dieses Thermo zu erweisen, daß die Elektrizität nur aus einer einzigen Elektrode flösse, deren Spannung μ ist. Sey die Spannung irgend einer Ebene $=\varphi$; dieselbe wird eine Function dieser Coordinaten x, y und überdies der Gröſſe μ proportional seyn, so daß man haben wird:

$$\varphi = \mu F(x, y).$$

Sey φ , die Spannung desselben Punkts, wenn die Elektrizität aus einer anderen Elektrode flösse, deren Spannung μ_1 ist; dann hat man:

$$\varphi_1 = \mu_1 F_1(x, y).$$

Nun ist klar, daß wenn die Elektrizität zugleich aus beiden Elektroden flösse, die Spannung der ersten Elektrode durch die der zweiten geändert werden würde, und so umgekehrt. Wenn man aber annimmt, daß die Gröſſe der Elektroden zu vernachlässigen sey vermöge ihres Abstandes, so sieht man, daß die Gröſſe, um welche die Spannung eines jeden Punkts der Elektrode erhöht oder geschwächt seyn würde, eine constante Gröſſe ist, die nur von dem

Abstände der Mittelpunkte beider Elektroden abhängt; mithin bleibt die Spannung eines jeden Punkts der Elektrode constant, wenn die Elektricität zugleich durch mehre Elektroden fließt.

Wenn die Elektricität zugleich aus zwei Elektroden fließt, so verändern sich die Constanten μ und μ_1 in μ' und μ'_1 , sobald die Spannung der ersteren um die Größe $\mu' - \mu$ und die der zweiten um $\mu'_1 - \mu_1$ zunimmt. In diesem Fall wird die Spannung des Punktes x, y durch die Wirkung jeder Elektrode insbesondere bestimmt durch die Formeln:

$$\varphi = \mu' F(x, y) \quad , \quad \varphi_1 = \mu'_1 F_1(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Die Gleichung (2) des dynamischen Gleichgewichts der Elektricität in einer Ebene ist linear, und vermöge einer bekannten Eigenschaft wird die Summe zweier Werthe, die für sich der Differentialgleichung genügen, noch ein Integral derselben seyn. Man genügt also der Gleichung (2) durch die Formel:

$$\Phi = \mu' F(x, y) + \mu'_1 F_1(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

wo Φ die Spannung des Punktes x, y durch gleichzeitige Wirkung beider Elektroden vorstellt.

Diese Formel wird der Bedingung der Gränzen genügen, wenn die Gleichungen (a) ihr für sich genügen; denn, wenn α und β die Winkel der Normale an der Gränzcurve der Ebene mit den Axen der x und y bezeichnen, wird man haben:

$$\frac{dF}{dx} \cos \alpha + \frac{dF}{dy} \cos \beta = 0 \quad ; \quad \frac{dF_1}{dx} \cos \alpha + \frac{dF_1}{dy} \cos \beta = 0,$$

welchen wird genügt seyn müssen, wenn x, y die Coordinaten der Gränzcurve sind. Nimmt man die Summe dieser Gleichungen, nachdem man sie mit μ' und μ'_1 multiplicirt hat, so findet man:

$$\left\{ \mu' \frac{dF}{dx} + \mu'_1 \frac{dF_1}{dx} \right\} \cos \alpha + \left\{ \mu' \frac{dF}{dy} + \mu'_1 \frac{dF_1}{dy} \right\} \cos \beta = 0$$

oder vielmehr:

$$\frac{d\Phi}{dx} \cos \alpha + \frac{d\Phi}{dy} \cos \beta = 0.$$

Die Constanten μ' und μ'_1 bestimmt man auf folgende Weise. Seyen a und b die Coordinaten der ersten, und

a , und b , die der zweiten Elektrode, so hat man durch die Formeln (a):

$$F(a, b) = 1 \quad F'(a, b) = 1.$$

Nun sind die Spannungen der beiden Elektroden gegebene Constanten $= \mu$ und μ' , setzt man also successiv in der Formel (b) für x , y die Coordinaten der ersten und der zweiten Elektrode, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \mu', F(a, b) + \mu' &= \mu \\ \mu' F(a, b) + \mu' &= \mu' \end{aligned} \right\} \dots (c)$$

Die Constanten μ' und μ' sind also bestimmt in Function der Constanten μ , μ' , a , b , a' , b' , und mithin wird die Function Φ eine lineare Function der Functionen φ und φ' seyn. Dasselbe Theorem kann man auf den Fall ausdehnen, daß die Elektricität durch mehr Elektroden entweder in eine Ebene oder in einen Körper fließe. Die Zahl der Gleichungen (c) wird gleich seyn der Zahl der Elektroden.

§. 5.

Wenn die Elektricität aus einer einzigen Elektrode A in eine Ebene fließt, so wird die Spannung irgend eines Punktes x , y bestimmt seyn durch die Formel:

$$\varphi = F(x, y).$$

Wenn die Elektricität von mehreren anderen Elektroden ausfließt, wird die Spannung φ dieses selben Punktes durch die bloße Wirkung der letzteren bestimmt durch:

$$\varphi = F(x, y).$$

Man kann sich eine solche Combination dieser Elektroden denken, daß die Zunahme der Spannung von A durch deren Wirkung Null sey, oder daß sie von ihr eine gleiche Menge positiver und negativer Elektricität erhält. In diesem Fall findet man die Spannung Φ des Punktes x , y durch gleichzeitige Wirkung aller Elektroden:

$$\Phi = F(x, y) + F_{\alpha}(x, y),$$

wo $F_{\alpha}(x, y)$ eine aus den partiellen Functionen von $F(x, y)$ gebildete lineare Function ist.

Es wird aber nicht allein die Größe φ , sondern eben so Φ den Bedingungen des bisher betrachteten Problems genügen, nämlich 1) der Gleichung des dynamischen Gleich-

gewichts, 2) der Bedingung, daß die Spannung des Punktes A eine gegebene Constante sey, und 3) der Bedingung der Grenzen.

Allein wegen Unbestimmtheit der GröÙe $F_{\alpha}(x, y)$ folgt aus den angegebenen Betrachtungen, daß die drei genannten Bedingungen nicht die alleinigen Erfordernisse zur vollständigen Lösung des Problems sind, daß man noch eine andere hinzufügen muß, um das Glied $F_{\alpha}(x, y)$ zu entfernen, welches von den von der Elektrode A unabhängigen Elektroden her stammt.

Ziehen wir eine krumme Linie rings um den Punkt A , so muß die Elektrizitätsmenge, welche dieselbe in gleicher Zeit überschreitet, eine constante GröÙe seyn, oder, wenn man die äußere Leitungsfähigkeit in Betracht ziehen will, muß man zu der Elektrizitätsmenge, welche die Curve überschreitet, diejenige Menge hinzufügen, welche die Luft der Ebene entzogen haben würde in der Zeit von der Elektrode bis zur Curve. Liegt die Curve außerhalb A , so muß die sie überschreitende Elektrizitätsmenge Null seyn. Es ist klar, daß bei Anwendung dieses Principis das Glied $F_{\alpha}(x, y)$ verschwinden und für die Lösung des Problems

$$\eta = F(x, y)$$

übrig bleiben wird.

II. Von der Vertheilung der Elektrizität in einer unendlichen Ebene.

Es fragt sich, wie wird die Elektrizität auf einer unbegrenzten Ebene vertheilt seyn, wenn sie von einer einzigen Elektrode ausfließt. Wenn man keine Rücksicht nimmt auf die äußere Leitungsfähigkeit, wird offenbar kein dynamisches Gleichgewicht stattfinden, als im Fall man setzt, daß die Spannung eines jeden Punktes gleich sey der Spannung der Elektrode. Allein da man die äußere Leitungsfähigkeit, wie klein sie auch sey, nicht vernachlässigen kann, so wird die Spannung eines jeden Punktes eine variable Function seyn, die nur abhängt von dem Abstände dieses Punktes vom Centrum der Elektrode, so daß die Spannung

in dem Umfang eines um das Centrum der Elektrode beschriebenen Kreises gleichen Werth haben wird. Wir werden annehmen, die äußere Leitungsfähigkeit sey proportional der Spannung eines jeden Punkts der Ebene.

Sey ρ der Radius der Elektrode, die wir als kreisrund voraussetzen, und deren Centrum wir zum Anfang der Coordinaten nehmen; sey μ ihre Spannung. Seyen ferner k' und k die Coëfficienten der äußeren und inneren Leitungsfähigkeit, φ die Spannung eines Punktes x, y , dessen Radius vector r ist, ω der Winkel zwischen zwei anliegenden Radiis vectoris, und δ der Abstand zweier parallelen Ebenen, zwischen denen die Elektricität circulirt.

Dann wird man haben:

$$\Gamma = -k' \left\{ \frac{d\varphi}{dx} \frac{x}{r} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{y}{r} \right\},$$

allein da

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{x}{r}; \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{dy} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{y}{r}$$

wird:

$$\Gamma = -k' \frac{d\varphi}{dr}.$$

Die Elektricitätsfluth durch D wird seyn:

$$\Gamma \omega r \delta$$

und die durch E (Taf. II, Fig. 9):

$$\Gamma \omega \delta (r + dr) + \frac{d\Gamma}{dr} dr (r + dr) \omega \delta,$$

so wie die Menge, welche die Luft von CD fortnimmt:

$$k r \omega \varphi dr.$$

Und da die in CD eintretende Menge auch von ihr austreten muß, so muß die Summe der zweiten und dritten Größe gleich seyn der ersten. Man wird also für die Gleichung des dynamischen Gleichgewichts erhalten:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \lambda^2 \varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oder:

$$\lambda^2 = \frac{k}{k' \delta}.$$

Die Riccati'sche Gleichung kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{m-1}{m} \frac{d\varphi}{dr} \frac{1}{r} - \lambda^2 \varphi = 0 \quad . \quad . \quad (2) \quad ^1)$$

Hr. Lobatto hat von dieser Gleichung ein particuläres Integral gegeben; indem man es $= \varphi$, setzt, wird man haben:

$$\varphi = \alpha \int_0^1 (e^{\lambda t r} + e^{-\lambda t r}) (1-t)^{-\frac{m+1}{2m}} dt.$$

Die ersten Glieder der Gleichungen (1) und (2) werden gleiche Form erhalten, wenn man $m = \infty$ setzt: man hat also als erstes Integral der Gleichung (1):

$$\varphi = \alpha \int_0^1 (e^{\lambda t r} + e^{-\lambda t r}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Es läßt sich leicht beweisen, daß dieser Werth der Gleichung (1) genügt, denn durch Substitution findet man:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \lambda^2 t^2 (e^{\lambda t r} + e^{-\lambda t r}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ & + \frac{\lambda}{r} \int_0^1 (e^{\lambda t r} - e^{-\lambda t r}) \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ & - \lambda^2 \int_0^1 (e^{\lambda t r} + e^{-\lambda t r}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0. \end{aligned}$$

Nimmt man die Summe des ersten und letzten Gliedes, so findet man:

$$-\lambda^2 \int_0^1 (e^{\lambda t r} + e^{-\lambda t r}) \sqrt{1-t^2} dt$$

und wenn man das zweite Glied stückweise integrirt, so erhält man den folgenden Werth:

$$-\frac{\lambda}{r} \sqrt{1-t^2} (e^{\lambda t r} - e^{-\lambda t r}) + \lambda^2 \int_0^1 (e^{\lambda t r} + e^{-\lambda t r}) \sqrt{1-t^2} dt;$$

allein die Gröfse außerhalb des Zeichens $\int$ reducirt sich an den Gränzen 0 und 1 auf Null; die übrig bleibenden Glieder sind gleich und von entgegengesetztem Zeichen, mithin genügt φ , der Gleichung (1).

1) Moigno, *Traité de calcul Integral*, 38e Leçon. — Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 17, S. 369.

Man findet ferner an der citirten Stelle, daß $r\varphi$ ein zweites particuläres Integral der Gleichung (1) ist, wenn man m in $-m$ verwandelt. Aber dieser Werth genügt nicht mehr, wenn man $m=\infty$ setzt, weil in diesem Fall die Gleichung nicht mehr als aus der Riccati'schen entsprungen angesehen werden kann. Um also das zweite particuläre Integral zu finden, sey:

$$\eta = \alpha \cdot \eta_1,$$

wo α , eine Function von r bezeichnet. Man findet dann leicht:

$$\alpha = \beta \int^r \frac{dr}{r \eta_1^2} + \beta'$$

und das vollständige Integral der Gleichung (1) wird seyn:

$$\eta = \beta' \eta_1 + \beta \int^r \frac{dr}{r \eta_1^2},$$

wo β und β' willkürliche Constanten sind, und η_1 das oben gegebene particuläre Integral, in welchem man $\alpha=1$ setzt.

Nun muß η , wenn man $r=\infty$ setzt, sich auf Null reduciren; in diesem Fall findet man $\eta_1=\infty$, also $\beta'=0$. Eben so reducirt sich das andere Glied auf Null, wenn man die untere Gränze des Integrals $=\infty$ setzt. Denn da, für $r=\infty$, $\eta_1=\infty$ ist, so wird die Gröfse:

$$\eta_1 \int_{\infty}^r \frac{dr}{r \eta_1^2} = - \frac{\int_{\infty}^r \frac{dr}{r \eta_1^2}}{\frac{1}{\eta_1}},$$

ein Bruch seyn, der unter der Form $\frac{a}{b}$ auftritt, wenn man $r=\infty$ setzt. Leicht findet man durch die bekannten Regeln, daß ihr wahrer Werth wird:

$$-\frac{1}{\lambda t r \int_0^1 (e^{\lambda t r} - e^{-\lambda r t}) \frac{dt}{1-t^2}},$$

welcher für $r=\infty$ verschwindet. Man hat sonach:

$$\eta = \beta \int_{\infty}^r \frac{dr}{r \eta_1^2}.$$

Die Constante β bestimmt sich, wenn man bemerkt, daß $\eta=\mu$, wenn $r=q$, so daß man haben wird:

$$\beta = \frac{\mu}{\int_0^1 (e^{\lambda t \xi} + e^{-\lambda t \xi}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{\infty}^{\xi} \frac{dr}{r \varphi_i^2}},$$

was die vollständige Lösung des Problems ist.

Bemerken wir, daß, wenn man setzt $\rho = 0$, man haben wird $\mu = \infty$, denn die Spannung wird nahe bei der Elektrode dem Radius vector umgekehrt proportional seyn, und in diesem Fall wird die Gröfse β , folglich auch φ unbestimmt. Mithin wird man die Gröfse der Elektroden nicht vernachlässigen können.

Eben so wird φ unendlich, wenn man die äußere Leitungsfähigkeit vernachlässigt oder $\lambda = 0$ setzt; mithin ist die Formel nur auf den Fall der Natur anwendbar.

§. 7.

Wir wollen uns nun vornehmen, die Vertheilung der Elektricität in dem Fall zu finden, daß die Ebene von einem galvanischen Strom durchlaufen wird, der durch zwei kreisrunde Elektroden von dem Radius $= \rho$ und dem Abstand $2a$ eintritt. Sey φ' die Spannung eines Punkts vermöge blofser Wirkung der ersten Elektrode, φ'' die vermöge der der zweiten, und Φ die vermöge der gleichzeitigen Wirkung beider Elektroden, oder des galvanischen Stroms. Seyen r' und r'' die Radii vectores, gezogen von den Mittelpunkten der Elektroden zu dem Punkte x, y . Dann wird man haben:

$$\varphi' = \beta' \int_0^1 (e^{\lambda t \xi'} + e^{-\lambda t \xi'}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{\infty}^{\xi'} \frac{dr}{r \varphi_i^2}$$

$$\varphi'' = \beta'' \int_0^1 (e^{\lambda t r''} + e^{-\lambda t r''}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{\infty}^{r''} \frac{dr}{r \varphi_i^2}$$

$$\therefore \Phi = \alpha' \varphi' + \alpha'' \varphi''.$$

In dieser letzten Gleichung nimmt man $\beta' = \beta'' = 1$, indem man sie in α und α' mit umfaßt. Nun hat man:

$$\Phi = \mu \quad \text{wenn } r' = \rho \text{ und } r'' = 2a$$

$$\Phi = -\mu \quad \text{wenn } r'' = \rho \text{ und } r' = 2a$$

und die Gleichungen (c) des §. 4 nehmen die Form an:

$$\begin{aligned}
& \alpha' \int_0^1 (e^{\lambda t r} + e^{-\lambda t r}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{\infty}^{\varphi_i} \frac{dr}{r \varphi_i^2} \\
& + \alpha'' \int_0^1 (e^{2\lambda t a} + e^{-2\lambda t a}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{\infty}^{2a} \frac{dr}{r \varphi_i^2} = \mu \\
& \alpha' \int_0^1 (e^{2\lambda t a} + e^{-2\lambda t a}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{\infty}^{2a} \frac{dr}{r \varphi_i^2} \\
& + \alpha'' \int_0^1 (e^{2\lambda t \varphi} + e^{-\lambda t \varphi} + e^{-\lambda t \varphi}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{\infty}^{\varphi} \frac{dr}{r \varphi_i^2} = -\mu,
\end{aligned}$$

aus welchem sich leicht ergibt $\alpha' + \alpha'' = 0$. Und daher:

$$\alpha' = -\alpha'' = \frac{\mu}{N},$$

wo N gleich:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (e^{\lambda t \varphi} + e^{-\lambda t \varphi}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{\infty}^{\varphi} \frac{dr}{r \varphi_i^2} \\
& - \int_0^1 (e^{2\lambda t a} + e^{-2\lambda t a}) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{\infty}^{2a} \frac{dr}{r \varphi_i^2}.
\end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth in ϕ , so hat man die Spannung der Punkte r' und r'' vermöge des galvanischen Stroms und mit Rücksicht auf die äußere Leitungsfähigkeit.

Allein eben so wie uns die Analyse bei Lösung der vorhergehenden Aufgabe gezeigt hat, daß man die äußere Leitungsfähigkeit nicht vernachlässigen darf, eben so zeigt uns die Analyse im gegenwärtigen Fall, daß man von ihr absehen kann; denn, setzt man $\lambda = 0$, so kann man den Nenner des vorstehenden Bruches unter folgender Form schreiben:

$$2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ \int_{\infty}^{\varphi} \frac{dr}{r \varphi_i^2} - \int_{\varphi}^{\varphi} \frac{dr}{r \varphi_i^2} - \int_{\varphi}^{2a} \frac{dr}{r \varphi_i^2} \right\} = -\pi \int_{\varphi}^{2a} \frac{dr}{r \varphi_i^2},$$

wenn aber $\lambda = 0$, hat man $\varphi_i = \pi$; also:

$$\alpha' = -\alpha'' = -\frac{\mu \pi}{\log \frac{2a}{\varphi}},$$

so daß man finden wird:

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{\mu \pi^2}{\log \frac{2a}{\varrho}} \left[\int_{\infty}^{r'} \frac{dr}{r \varphi_i^2} - \int_{\infty}^{r''} \frac{dr}{r \varphi_i^2} \right] = -\frac{\mu \pi}{\log \frac{2a}{\varrho}} \int_{r'}^{r''} \frac{dr}{r \varphi_i^2} \\ &= \frac{\mu}{\log \frac{2a}{\varrho}} \log \frac{r''}{r'} = \frac{\mu}{\log \frac{2a}{\varrho}} \log \sqrt{\frac{y^2 + (x+a)^2}{y^2 + (x-a)^2}},\end{aligned}$$

wenn die Axe der x die Linie ist, welche die Centra beider Elektroden vereint, und in ihrer positiven Richtung durch die Elektrode von der Spannung μ geht; und die Axe der y die Linie, welche den Abstand der Centra der Elektroden in gleiche Theile theilt.

Bemerkung. Man kann diese Lösung auf folgende Weise betrachten. Führt man freie positive Elektricität durch die erste Elektrode, welche die Spannung $+\mu + \Delta\mu$ hat, und freie negative Elektricität durch die andere Elektrode von der Spannung $-\mu - \Delta\mu$, so kann man $\Delta\mu$ bestimmen, so daß die Spannung der ersten $+\mu$ wird durch den Einfluß der zweiten, und ebenso die der zweiten $-\mu$. Diese beiden Elektricitäten nun, die sich in der Ebene vereinigen, müssen darin denselben Effect hervorbringen, wie die Elektricität, welche aus dem galvanischen Strom entspringt, weil man einen galvanischen Strom hervorbringen kann, wenn man einen Bogen von den beiden Reibungs-Elektricitäten durchlaufen läßt.

§. 8.

Man kann auch von demselben Problem die folgende Lösung geben, die mir indess nicht so streng wie die erste erscheint. Die Gleichung des dynamischen Gleichgewichts der Elektricität in einer Ebene ist:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0,$$

deren allgemeines Integral ist:

$$\varphi = F(y+x\sqrt{-1}) + F_1(y-x\sqrt{-1}).$$

Gebraucht man dieselben Coordinaten wie vorhin, so ist klar, daß man haben wird $\varphi=0$, wenn $x=0$, wie auch y sey. Man hat also:

$$Fy + F_1y = 0,$$

oder vielmehr:

$$F(y - x\sqrt{-1}) + F(y - x\sqrt{-1}) = 0,$$

und, wenn man F eliminirt, findet man:

$$\varphi = F(y + x\sqrt{-1}) - F(y - x\sqrt{-1}) \quad (1)$$

Setzt man die Spannungen der beiden Elektroden $= \mu$ und $= -\mu$, so hat man $\varphi = \mu$, wenn $y = \sqrt{\varrho^2 - (x-a)^2}$. Die Gleichung (1) wird also:

$$F\{\sqrt{\varrho^2 - (x-a)^2} + x\sqrt{-1}\} - F\{\sqrt{\varrho^2 - (x-a)^2} - x\sqrt{-1}\} = \mu.$$

Setzen wir:

$$F(y + x\sqrt{-1}) = M \cdot \log \frac{y + b' + (x + a')\sqrt{-1}}{y + b' + (x - a')\sqrt{-1}}$$

$$F(y - x\sqrt{-1}) = M \cdot \log \frac{y + b' - (x - a')\sqrt{-1}}{y + b' - (x + a')\sqrt{-1}}.$$

Klar ist, dass wenn man für y seinen Werth

$$\sqrt{\varrho^2 - (x-a)^2}$$

setzt, die Gröfse $x-a$ sehr klein seyn wird, man wird also $x=a$ und $y=\varrho$ setzen, im Fall a' und b' Gröfsen von solcher Ordnung sind, dass die von der Ordnung ϱ vernachlässigt werden können. Die vorstehende Gleichung wird:

$$\begin{aligned} & F\{\sqrt{\varrho^2 - (x-a)^2} + x\sqrt{-1}\} - F\{\sqrt{\varrho^2 - (x-a)^2} - x\sqrt{-1}\} \\ &= M \cdot \log \frac{b' + (a + a')\sqrt{-1}}{b' + (a - a')\sqrt{-1}} \times \frac{b' - (a + a')\sqrt{-1}}{b' - (a - a')\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Vernachlässigt man also die Gröfsen von der Ordnung ϱ , so wird der Function $F(v)$ genügt durch die Formel:

$$M \log \frac{v + m}{v + m'},$$

wo M , m und m' constante Gröfsen sind, zwar willkürliche, aber nicht von der Ordnung ϱ . Man hat demnach:

$$\varphi = \Sigma M \cdot \log \frac{(y + b')^2 + (x + a')^2}{(y + b')^2 + (x - a')^2},$$

wo das Zeichen Σ eine Summe von Brüchen bedeutet, in derer jedem M , a' und b' einen verschiedenen Werth haben können.

Man müfste nun die im §. 5 angezeigte vierte Bedingung anwenden; allein man kann die für die Frage fremdartigen Glieder leichter entfernen, wenn man erwägt, dass bei Superposition der Elektroden die Gröfse φ für alle Punk-

Punkte der Ebene verschwinden mufs. Diesem genügt man, wenn man setzt $a' = a$. Dann mufs η denselben Werth behalten, wenn man $-y$ statt y schreibt, was man nicht kann, wenn nicht $b' = 0$. Man hat also:

$$\eta = M \cdot \log \frac{y^2 + (x+a)^2}{y^2 + (x-a)^2}.$$

Die Constante M bestimmt sich, wenn man erwägt, dafs man hat $\eta = \mu$, wenn $y^2 + (x-a)^2 = \rho^2$; daraus folgt $y^2 + (x+a)^2 = \rho^2 + 4ax = 4a^2$, sobald man die Glieder von der Ordnung ρ vernachlässigt. Man hat also:

$$M = \frac{\mu}{\log \frac{4a^2}{\rho^2}}.$$

Bemerkung. Gesetzt, die Radien der Elektroden hätten irgend eine Gröfse $= \rho$, und die Spannung aller ihrer Punkte wäre constant $= \mu$, so würde man, ohne etwas zu vernachlässigen, haben:

$$\eta = \frac{\mu}{\log \frac{a + \sqrt{a^2 - \rho^2}}{a - \sqrt{a^2 - \rho^2}}} \log \frac{y^2 + (x + \sqrt{a^2 - \rho^2})^2}{y^2 + (x - \sqrt{a^2 - \rho^2})^2}.$$

§. 9.

Auf folgende Weise bestimmt man den Widerstand einer unbegrenzten Ebene, wenn sie von einem galvanischen Strom durchlaufen wird. Seyen AB und $A'B'$ zwei einander unendlich nahe partielle Ströme. Der Raum zwischen ihnen wird der Weg seyn, den die Elektrizität einschlägt, wenn sie von der einen Elektrode zur anderen geht. Der Widerstand des Raumes $AA'B'BB'$ wird gleich seyn der Summe der Widerstände der partiellen Elemente. Der Widerstand eines partiellen Elements ist ein Bruch, dessen Zähler proportional der Länge, und dessen Nenner proportional dem Querschnitt dieses Elements ist. Sey überdies:

$$F(x, y, \vartheta)$$

die Gleichung eines galvanischen Stroms; ϑ ist ein Parameter, welcher von Curve zu Curve variirt und sich folgendermassen definiren läfst: jeder partielle Strom beginnt an einer der Elektroden und endet an der andern; man

nenne ϑ den Winkel, welchen die Tangente der Curve des partiellen Stroms am Punkte, wo sie an der Elektrode endet, mit der Axe der x bildet. Sey MM' eine Normale der beiden aneinanderliegenden Curven, so hat, wenn NM der Axe der y parallel ist:

$$\operatorname{tg} M' M N = \frac{dy}{dx}$$

$$MM' = NM \cos N M M' = NM \frac{dx}{ds}.$$

Man wird von einer Curve zur anderen übergehen, wenn man y und ϑ in $y + \delta y$ und $\vartheta + \delta \vartheta$ verwandelt, und hat also dann:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{d\vartheta} \delta \vartheta &= 0 \\ \delta y = NM &= - \frac{\frac{dF}{d\vartheta}}{\frac{dF}{dy}} \delta \vartheta \quad \text{und} \quad MM' = - \frac{\frac{dF}{d\vartheta}}{\frac{dF}{dy}} \frac{dx}{ds} \delta \vartheta. \end{aligned}$$

Sey k der Widerstand der Ebene, wenn der Strom die Einheit der Länge und Breite zurücklegt. Dann findet man für den Widerstand eines Elements, dessen Länge $NM' = ds$ und dessen Querschnitt MM' ist:

$$= -k \frac{\frac{dF}{dy} ds^2}{\frac{dF}{d\vartheta} dx \cdot \delta \vartheta};$$

allein da man hat:

$$ds = \frac{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}{\frac{dF}{dx}} dy \quad \text{und} \quad dx = - \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dx}} dy,$$

so findet man für den Widerstand w des Raumes zwischen zwei anliegenden Curven:

$$w = \frac{2k}{\delta \vartheta} \int \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}{\frac{dF}{d\vartheta} \cdot \frac{dF}{dx}} dy$$

Die untere Gränze der Integration wird seyn: $y = \rho \sin \vartheta$ und die obere der Werth von y für den Fall, dafs man $x=0$ setzt.

Man muß sich wohl hüten Null für die untere Gränze der Integration zu nehmen, oder vielmehr die Gröfse der Elektroden zu vernachlässigen, denn dann würde das Integral unendlich werden, weil der Querschnitt ein unendlich kleines der zweiten Ordnung, die Länge des Elements aber ein unendlich Kleines der ersten Ordnung seyn würde.

Wenn die Elektrizität mehre Drähte von den Widerständen $\lambda, \lambda', \text{etc.}$ durchläuft, um von der einen zur andern Elektrode zu gelangen, so wird der gesammte Widerstand L des Systems gegeben seyn durch die Formel:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} + \dots = \sum \frac{1}{\lambda}.$$

Man hat also in diesem Fall:

$$\lambda = \frac{2k}{\delta \vartheta} \int \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}{\frac{dF}{d\vartheta} \cdot \frac{dF}{dx}} dy,$$

mithin:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{k} \int_0^\pi \int \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}{\frac{dF}{d\vartheta} \cdot \frac{dF}{dx}} dy$$

Um diese Formel auf den Widerstand der unbegrenzten Ebene anzuwenden, hat man zunächst für die Differentialgleichung der Curven der partiellen Ströme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2},$$

welche unter die Form:

$$\frac{2yx dx - x^2 dy}{y^2} + dy + \frac{a^2 dy}{y^2} = 0$$

gebracht werden kann, und deren Integral ist:

$$x^2 + y^2 - a^2 = \alpha y.$$

Wenn man α in Function des oben erwähnten Parameters ϑ bestimmt, hat man $y = \rho \sin \vartheta$, wenn $x = a - \rho \cos \vartheta$; man findet also, bei Vernachlässigung der Gröfsen von der Ordnung ρ :

$$\alpha = -2a \cot \vartheta$$

und die Gleichung der gesuchten Curve wird seyn:

$$F(x, y, \vartheta) = (x^2 + y^2 - a^2) \operatorname{tg} \vartheta + 2ay = 0,$$

ferner findet man leicht:

$$w = -\frac{2ak}{\delta \vartheta} \int \frac{dy}{y \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 \vartheta} - \left(y + \frac{a}{\operatorname{tg} \vartheta}\right)^2}}$$

Indem man setzt:

$$y + a \cos \vartheta = \frac{a}{\sin \vartheta} \cos \psi,$$

wo ψ eine neue Variable ist, wird man finden:

$$w = \frac{2k \sin \vartheta}{d \vartheta} \int \frac{d\psi}{\cos \psi - \cos \vartheta} = \frac{2k}{d \vartheta} \log \frac{1 - \cos \psi \cos \vartheta + \sin \psi \sin \vartheta}{\cos \psi - \cos \vartheta},$$

Die Gränzen der Integration sind $y = \varrho \sin \vartheta$ und $y = a \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}$, oder vielmehr $\cos \psi = \frac{\varrho \sin^2 \vartheta}{a} + \cos \vartheta$, und $\cos \psi = 1$. Mithin ist:

$$w = \frac{2k}{a \vartheta} \log \frac{\sin^2 \vartheta - \frac{\varrho}{a} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta + \sin \vartheta \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{a} \sin^2 \vartheta + \cos \vartheta\right)^2}}{\frac{\varrho}{a} \sin^2 \vartheta}$$

Das Integral verschwindet für die obere Gränze. Man hat also, wenn man im Nenner die mit ϱ multiplicirten Glieder vernachlässigt:

$$w = \frac{2k}{d \vartheta} \log \frac{2a}{\varrho},$$

so daß der Widerstand der Ebene seyn wird:

$$\frac{k}{\pi} \log \frac{2a}{\varrho}.$$