

Ueber die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V$.

(Von Herrn *George Boole* zu Cork in Irland.)

E i n l e i t u n g.

1. In dem vorliegenden Aufsätze beabsichtige ich die Theorie der Integration der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1.) \quad Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V$$

zu betrachten, unter der Voraussetzung, dass dieselbe ein erstes Integral von der Form

$$(2.) \quad F(u, v) = 0$$

besitzt. Es bezeichnen hierin x, y die unabhängigen, z die abhängige Veränderliche, p, q und r, s, t die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung von z , ferner R, S, T, U, V und u, v bestimmte Functionen von x, y, z, p, q , und zwar dergestalt, dass die Formen der beiden letzteren u, v von denen der ersteren R, S, T, U, V abhängen. Vorläufig mögen einige Bemerkungen vorangeschickt werden.

Dass aus einem ersten Integrale von der Form (2.) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form (1.) nothwendig entsteht, wird folgendermassen bewiesen. Differentiirt man (2.) nach x und nach y , und bezeichnet man $\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z}$, beziehungsweise mit $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, und, der Kürze wegen, $F(u, v)$ mit F , so erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial u} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r \frac{\partial u}{\partial p} + s \frac{\partial u}{\partial q} \right\} + \frac{\partial F}{\partial v} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + r \frac{\partial v}{\partial p} + s \frac{\partial v}{\partial q} \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + s \frac{\partial u}{\partial p} + t \frac{\partial u}{\partial q} \right\} + \frac{\partial F}{\partial v} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + s \frac{\partial v}{\partial p} + t \frac{\partial v}{\partial q} \right\} = 0.$$

Hieraus ergibt sich durch Elimination von $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r \frac{\partial u}{\partial p} + s \frac{\partial u}{\partial q} \right\} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + s \frac{\partial v}{\partial p} + t \frac{\partial v}{\partial q} \right\} \\ & - \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + s \frac{\partial u}{\partial p} + t \frac{\partial u}{\partial q} \right\} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + r \frac{\partial v}{\partial p} + s \frac{\partial v}{\partial q} \right\} = 0, \end{aligned}$$

oder

$$(3.) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial u}{\partial p} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial v}{\partial p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} r + \left\{ \frac{\partial u}{\partial q} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial v}{\partial q} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial p} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} s \\ & + \left\{ \frac{\partial v}{\partial q} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial q} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} t + \left\{ \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} \right\} (s^2 - rt) \\ & = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \right.$$

ein Ergebniss, welches in der Form (1.) enthalten ist, und worin die Coefficienten von $r, s \dots$ Functionen von x, y, z, p, q sind, deren Formen von der Beschaffenheit von u und v allein abhängen.

2. Die partielle Differentialgleichung (1.) ist auch wegen deren geometrischer Bedeutung bemerkenswerth. Man betrachte das System von Oberflächen, welches durch die Gleichung

$$(4.) \quad \Phi(x, y, z, a, b, c) = 0$$

dargestellt wird, wenn die darin vorkommenden Constanten a, b, c sich unter Erfüllung zweier beliebigen Bedingungen

$$(5.) \quad \varphi_1(a, b, c) = 0, \quad \varphi_2(a, b, c) = 0$$

verändern, so wird die Gleichung der erzeugten einhüllenden Fläche einer partiellen Differentialgleichung von der obigen Form genügen. Aber in diesem Falle wird die besondere Bedingungsgleichung

$$(6.) \quad S^2 + 4(UV - RT) = 0$$

zwischen den Coefficienten stattfinden. Der Beweis dieses Satzes geschieht auf folgende Weise:

Durch Auflösung von (4.) erhalte man

$$(7.) \quad z = \varphi(x, y, a, b, c),$$

wo b und c die aus (5.) hervorgehenden Functionen von a bedeuten. Diese Gleichung der eingehüllten Fläche geht in die Gleichung der einhüllenden Fläche über, wenn man a nicht als constant sondern als eine Function von x, y, z behandelt, welche durch die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial a} = 0$$

zu bestimmen ist. Es gelten daher, sowohl für die einhüllende als für die eingehüllte Fläche, die Gleichungen

$$(8.) \quad p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit (7.) dienen zur Bestimmung von a , b , c als Functionen von x , y , z , p , q . Stellt man deren Werthe durch die Gleichungen

$$a = u, \quad b = v, \quad c = w$$

dar, so hat man, weil b und c beliebige Functionen von a sind,

$$v = \varphi(u), \quad w = \psi(u).$$

Dies sind die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung der einhüllenden Fläche. Man sieht, dass beide von der allgemeinen Form (2.) sind.

Um die willkürlichen Functionen φ und ψ fortzuschaffen, und dadurch die gesuchte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zu erhalten, differentiirt man die beiden Gleichungen (8.) nach x und nach y ; dadurch ergeben sich

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial x} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c \partial x} \frac{\partial c}{\partial x}, \\ s &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial x} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c \partial x} \frac{\partial c}{\partial y}, \\ s &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial y} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c \partial y} \frac{\partial c}{\partial x}, \\ t &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial y} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c \partial y} \frac{\partial c}{\partial y} \end{aligned}$$

und hieraus

$$(9.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(r - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)\left(t - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) - \left(s - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial x}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial c \partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial y}\right). \end{aligned} \right.$$

Weil aber b und c bloss Functionen von a sind, so hat man

$$\frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial y} = 0.$$

Mithin reducirt sich (9.) auf

$$\left(r - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)\left(t - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) - \left(s - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

oder

$$(10.) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} r - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} s + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} t + s^2 - r t = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Da nun diese Gleichung von der Form (1.) ist, so liefert die Vergleichung der entsprechenden Coefficienten die Relationen

$$\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}}{R} = \frac{-2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}}{S} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}{T} = \frac{1}{U} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{dx^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2}{V},$$

woraus sich nach Elimination von $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$

$$S^2 + 4(UV - RT) = 0,$$

d. h. die oben erwähnte Bedingungsgleichung (6.) ergibt.

3. Was die Geschichte der in Rede stehenden Differentialgleichung betrifft, so bin ich nur im Stande auf wenige Abhandlungen hinzuweisen. Die Theorie ihrer Integration ist bereits von *Ampère* behandelt worden (*Journal de l'Ecole Polytechnique*, cahier 18). *Monge* hat sich bekanntlich mit deren geometrischer Bedeutung beschäftigt, aber mit scheinbarem Mangel an Allgemeinheit. In den letzten Jahren hat *De Morgan* die Theorie ihrer Integration behandelt (*Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. IX, Pt. 4). Dass irgend ein Anderer sich mit demselben Gegenstande beschäftigt habe, ist mir nicht bekannt.

Die Methoden von *Ampère* und *De Morgan* sind von einander ganz verschieden. Dieser führt die Bestimmung von u und v in dem ersten Integrale (2.) auf die Lösung eines Systems von zwei linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurück; wogegen jener die nämliche Grössenbestimmung auf die Lösung eines Systemes von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführt. In dem, was sie leisten, stimmen beide Ergebnisse mit einander überein, denn die Lösung des *De Morganschen* Systems verlangt in der That die des *Ampèreschen*. Aber die Verschiedenheit der Methoden bleibt unvermindert. Bei der *Ampèreschen* ist keine Dazwischenkunft von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vorhanden.

Ehe ich mit den soeben erwähnten Arbeiten von *Ampère* und *De Morgan* bekannt geworden, war es mir gelungen, auf zwei von einander und von den obigen verschiedenen Wegen dasselbe Ziel zu erreichen. Zwischen diesen Wegen trat auch eine merkwürdige Reciprocität auf, und es ist mir kaum zweifelhaft, dass in denselben, wegen deren Einfachheit und Allgemeinheit, die natürliche Entwicklung der Grundprincipien enthalten ist, auf welchen die Methoden von *Ampère* und *De Morgan* sich stützen, wiewohl das wirk-

liche Verfahren von dem jener Mathematiker verschieden ist. Der Darlegung dieser Methoden sind die folgenden Seiten gewidmet.

Die erste Methode stimmt darin mit der *De Morganschen* überein, dass sie sich damit beschäftigt, durch Vergleichung von (1.) und (3.) Gleichungen zu bilden, aus welchen, nach Elimination von den Differentialquotienten von v , partielle Differentialgleichungen für die unabhängige Bestimmung von u hervorgehen. In dieser Abhandlung wird, so wie ich glaube, die ange-deutete Elimination zum ersten Mal völlig bewirkt; und auf die sich ergebenden partiellen Differentialgleichungen, welche vom zweiten Grade sind, wird ein Verfahren angewandt, wodurch das erhaltene System in *lineare* Systeme zerfällt. Endlich werden die Beziehungen, in welchen diese verschiedenen Systeme zur Integration von (1.) stehen, erörtert.

Es versteht sich von selbst, dass ich, die obenerwähnten Reciprocitäts-sätze allein ausgenommen, keinen Anspruch darauf mache, neue Resultate gegeben zu haben. Ich strebe nur nach der vollkommenen Strenge des analytischen Verfahrens. Dafür ist es unentbehrlich, dass die Eliminations-ergebnisse vollständig seien und dass die verschiedenartigen Fälle, in welche solche Ergebnisse zerfallen, von einander abgesondert betrachtet werden.

Erste Methode.

4. Lehrsatz. Es sei

$$F(u, v) = 0$$

ein erstes Integral der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V,$$

so wird u als Function von x, y, z, p, q die beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$R \frac{\partial u^2}{\partial q^2} - S \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial p} + T \frac{\partial u^2}{\partial p^2} + U \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial p} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial q} \right\} = 0,$$

$$R \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + V \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial p} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial q} \right\} = 0$$

befriedigen. Aehnliche Gleichungen gelten auch für v . Hier bedeuten $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$ die Ausdrücke $\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z}$ und $\frac{\partial u^2}{\partial p^2}$, $\frac{\partial u^2}{\partial q^2}$ die Quadrate von $\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial u}{\partial q}$.

Zur Uebereinstimmung von (1.) und (3.) ist es nöthig, dass die folgenden aus der Vergleichung der Coefficienten entstehenden Gleichungen befriedigt werden, nämlich

$$(a.) \quad \frac{\partial u}{\partial p} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial v}{\partial p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu R,$$

$$(b.) \quad \frac{\partial u}{\partial q} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial v}{\partial q} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial p} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu S,$$

$$(c.) \quad \frac{\partial v}{\partial q} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial q} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu T,$$

$$(d.) \quad \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} = \mu U,$$

$$(e.) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \mu V.$$

Da nun die obigen fünf Gleichungen in Bezug auf die fünf Grössen $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$, $\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial v}{\partial p}$, $\frac{\partial v}{\partial q}$, μ homogen sind, so ist es möglich diese zu eliminiren und so eine nur die Differentialquotienten von u enthaltende Relation zu gewinnen. Es lässt sich aber wegen der merkwürdigen *cyclischen* Gestalt der Gleichungen vermuthen, dass noch eine zweite Relation zwischen denselben Grössen bestehe. Man bemerke, dass durch die Vertauschung von

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad S, \quad U, \quad V, \quad \mu$$

mit

$$\frac{\partial u}{\partial q}, \quad \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \frac{\partial v}{\partial q}, \quad \frac{\partial v}{\partial p}, \quad -S, \quad V, \quad U, \quad -\mu,$$

und umgekehrt, keine Aenderung in dem obigen Gleichungssystem herbeigeführt wird; daher leuchtet es ein, dass wenn nach der obenerwähnten Elimination *eine* Relation zwischen den Differentialquotienten von u und den Grössen R , S , T u. s. w. sich ergeben hat, es erlaubt sein wird die Grössen

$$(11.) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \frac{\partial u}{\partial q}, \quad S, \quad U, \quad V,$$

beziehungsweise mit

$$(12.) \quad \frac{\partial u}{\partial q}, \quad \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad -S, \quad V, \quad U$$

zu vertauschen, wodurch eine zweite Relation sich ergibt.

Multiplicirt man nun (a.), (b.), (c.), (d.) beziehungsweise mit

$$\frac{\partial u^2}{\partial q^2}, \quad -\frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \frac{\partial u^2}{\partial p^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

und addirt, so ergibt sich, unter Fortlassung des gemeinsamen Factors μ ,

die Relation

$$(13.) \quad R \frac{\partial u^2}{\partial q^2} - S \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial p} + T \frac{\partial u^2}{\partial p^2} + U \left\{ \frac{\partial u}{\partial q} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} = 0,$$

woraus man durch die oben bewiesene Umwandlung die zweite Relation

$$(14.) \quad R \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + V \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial p} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial q} \right\} = 0$$

herleiten kann, welche auch durch directe Elimination hergeleitet wird, wenn man die Gleichungen (a.), (b.), (c.), (e.) beziehungsweise mit $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial p} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial q}$ multiplicirt, dann addirt und den gemeinsamen Factor μ fortlässt.

Ähnliche Relationen werden auch in Bezug auf v statt finden. Allgemeiner kann man sagen, dass die willkürliche Function $F(u, v)$ einem solchen Systeme Genüge leisten muss.

Ferner ist es klar, dass die vier Gleichungen, die auf diese Weise im Ganzen gefunden sind, das vollständige Ergebniss bilden, welches von der Elimination von μ aus den ursprünglichen Gleichungen herrührt.

Da die für v geltenden Relationen den für u gefundenen ganz ähnlich sind, so genügt es die beiden Gleichungen (13.), (14.) zu betrachten.

Zunächst gedenke ich zwei besondere Fälle, nämlich wenn $U=0$ und wenn $V=0$ ist, zu betrachten; und zwar deshalb, weil sie sich zu Ausnahmefällen in der allgemeinen Theorie gestalten. Nachher wird der allgemeine Fall, bei welchem weder $U=0$ noch $V=0$ ist, betrachtet werden.

Besonderer Fall $U=0$.

5. Die zu betrachtende Gleichung ist

$$Rr + Ss + Tt = V.$$

Bezeichnet man mit m_1 , m_2 die Wurzeln der Gleichung

$$(15.) \quad Rm^2 - Sm + T = 0,$$

so nimmt das System (13.), (14.) die Form

$$R \left(\frac{\partial u}{\partial q} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial q} - m_2 \frac{\partial u}{\partial p} \right) = 0,$$

$$R \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} + V \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial p} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial q} \right\} = 0$$

an. Die erste dieser Gleichungen zerfällt, nach Fortlassung des Factors R , in

$$(16.) \quad \frac{\partial u}{\partial q} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial q} - m_2 \frac{\partial u}{\partial p} = 0,$$

deren erstere, wenn sie erfüllt ist, dazu benutzt werden kann, die zweite Gleichung des vorigen Systems auf die Form

$$R \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} + V \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\},$$

d. h. auf

$$(17.) \quad \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \left\{ R \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + Rm_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + V \frac{\partial u}{\partial p} \right\} = 0$$

zurückzuführen. Das Zusammenbestehen der Gleichungen (13.), (14.) führt daher zu einem der beiden Systeme:

$$\begin{aligned} 1^{\text{stens}}. \quad & \frac{\partial u}{\partial q} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \\ 2^{\text{stens}}. \quad & \frac{\partial u}{\partial q} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \quad R \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + Rm_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + V \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \end{aligned}$$

oder wenn man m_2 durch $\frac{T}{Rm_1}$ und nachher m_1 durch m ersetzt:

$$\begin{aligned} \text{(I.)} \quad & \frac{\partial u}{\partial q} - m \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \\ \text{(II.)} \quad & \frac{\partial u}{\partial q} - m \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \quad Rm \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + Vm \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \end{aligned}$$

und es ist klar, dass die Anwendung der zweiten statt der ersten Gleichung (16.) zu denselben Systemen geführt haben würde, in denen nur m alsdann die zweite Wurzel m_2 der Gleichung (15.) zu bedeuten hätte.

Es leuchtet ein, dass die in Rede stehende Differentialgleichung

$$Rr + Ss + Tt = V$$

aus (I.), da darin V weder unmittelbar noch mittelbar vorkommt, nicht herführen kann. Sei $u=0$ ein erstes Integral der partiellen Differentialgleichung, welcher das System (I.) wirklich entspricht. Durch einmalige Differentiation nach x und y erhält man die Gleichungen

$$(18.) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial p} r + \frac{\partial u}{\partial q} s = 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial p} s + \frac{\partial u}{\partial q} t = 0, \end{cases}$$

mit deren Hülfe sich die Grössen $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial u}{\partial q}$ aus (I.) eliminiren lassen. Daraus ergibt sich

$$r + 2ms + m^2 t = 0,$$

ein mit $Rr + Ss + Tt = V$ in Widerspruch stehendes Ergebniss.

Eliminirt man dagegen auf die nämliche Weise diese Grössen aus (II.), so ergibt sich gerade die Gleichung

$$Rr + Ss + Tt = V.$$

Wenn man nun $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ beziehungsweise durch

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z}$$

ersetzt, so verwandelt sich (II.) in die Form

$$(19.) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial q} - m \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \\ Rm \frac{\partial u}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial y} + (Rmp + Tq) \frac{\partial u}{\partial z} + Vm \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \end{cases}$$

und es kommt jetzt darauf an, diese Gleichungen gleichzeitig zu integrieren.

Zu diesem Zwecke addirt man die Gleichungen, nachdem man die erste mit dem Factor λ multiplicirt hat, welcher als eine beliebige Function von x, y, z, p, q anzusehen ist. Dies giebt

$$Rm \frac{\partial u}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial y} + (Rmp + Tq) \frac{\partial u}{\partial z} + (V - \lambda)m \frac{\partial u}{\partial p} + \lambda \frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

und hieraus erhält man durch Anwendung des *Lagrangeschen* Verfahrens

$$\frac{dx}{Rm} = \frac{dy}{T} = \frac{dz}{Rmp + Tq} = \frac{dp}{(V - \lambda)m} = \frac{dq}{\lambda}.$$

Unstreitig muss irgend eine gleichzeitige Auflösung von (19.) diesen Gleichungen, abgesehen von der Form von λ , Genüge leisten. Eliminirt man aber λ , so bleibt das System

$$(20.) \quad \frac{dx}{Rm} = \frac{dy}{T} = \frac{dz}{Rmp + Tq} = \frac{dp + mdq}{Vm}$$

übrig. Daher hängt von der Befriedigung dieses Systems die Bestimmung von u und v ab.

Es ist nun leicht nachzuweisen, dass dieses mit dem bekannten *Mongeschen* Systeme wirklich übereinstimmt. Denn, da $m_1 m_2 = \frac{T}{R}$ ist, so kann man m durch $\frac{T}{Rm}$ ersetzen, wodurch sich das obige System in

$$(21.) \quad m dx = dy = \frac{m dz}{p + mq} = \frac{Rm dp + T dq}{V}$$

verwandelt, was gleichbedeutend ist mit

$$\begin{aligned} dy - m dx &= 0, \\ Rm dp + T dq - Vm dx &= 0, \\ dz - p dx - q dy &= 0, \end{aligned}$$

dem bekannten *Mongeschen* System.

Gelingt es hieraus zwei Integralgleichungen

$$u = a, \quad v = b,$$

welche p und q enthalten, zu gewinnen, so wird

$$F(u, v) = 0$$

ein allgemeines erstes Integral von (1.) bilden. Lässt m zwei Werthe zu, so wird es zwei derartige Integrale geben. Die Theorie der zweiten Integration wird später betrachtet werden.

Besonderer Fall $V = 0$.

6. Die zu betrachtende Gleichung ist

$$Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = 0.$$

Es lässt sich auf diesen Fall ein durchaus ähnliches Verfahren anwenden, doch kann man, bei gehörigem Gebrauch des schon angegebenen Reciprocitäts-satzes, dasselbe zum grössten Theil entbehren. Vertauscht man in (15.) und (II.) die Grössen (11.) mit den Grössen (12.), so hat man

$$(22.) \quad Rm^2 + Sm + T = 0,$$

$$(23.) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - m \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

$$(24.) \quad Rm \frac{\partial u}{\partial q} + T \frac{\partial u}{\partial p} + Um \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Addirt man die beiden letzten Gleichungen, nach Ersetzung von $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ durch $\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z}$, und nachdem die erste Gleichung mit λ multiplicirt worden ist, so entsteht

$$Rm \frac{\partial u}{\partial q} + T \frac{\partial u}{\partial p} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (U - \lambda)m \frac{\partial u}{\partial y} + \{\lambda p + (U - \lambda)m q\} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

und hieraus

$$\frac{dq}{Rm} = \frac{dp}{T} = \frac{dx}{\lambda} = \frac{dy}{(U - \lambda)m} = \frac{dz}{\lambda p + (U - \lambda)m q},$$

ein System, welches nach der Elimination von λ in das folgende übergeht:

$$(25.) \quad \begin{cases} \frac{dq}{R} = \frac{m dp}{T} = \frac{dy + m dx}{U}, \\ dz - p dx - q dy = 0. \end{cases}$$

Gelingt es aus diesen Gleichungen zwei Integrale $u = a$, $v = b$, welche p und q enthalten, zu bekommen, so wird $F(u, v) = 0$ ein allgemeines erstes Integral von (1.), und da m im Allgemeinen zwei Werthe annehmen kann, so werden zwei allgemeine erste Integrale entstehen.

Allgemeiner Fall, bei welchem weder $U = 0$ noch $V = 0$ ist.

7. Die partiellen Differentialgleichungen (13.), (14.) sind homogen und zweiten Grades in Rücksicht auf die vier Grössen $(\frac{\partial u}{\partial x})$, $(\frac{\partial u}{\partial y})$, $\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial u}{\partial q}$. Wenn in derselben Weise nur drei anstatt vier Grössen in diesen Gleichungen vorkämen, so wäre es von vorn herein möglich, das System in lineare Systeme zu zerlegen, denn, wird dasselbe mit $P = 0$, $Q = 0$ bezeichnet, und daraus die Gleichung

$$P + \lambda Q = 0$$

gebildet, so könnte die Grösse λ so bestimmt werden, dass die linke Seite in lineare Factoren zerfiele. Kommen aber in P und Q vier Grössen homogen und im zweiten Grade vor, so kann die Zerlegung in lineare Factoren nur bei besonderer Eigenthümlichkeit von P und Q herbeigeführt werden. Versuchen wir, ob es im vorliegenden Falle möglich ist.

Eliminirt man S zwischen (13.), (14.), so erhält man

$$(26.) \quad R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial q} + T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial p} + U\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + V\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

eine aus den ursprünglichen Gleichungen auch direct herzuleitende Relation, wenn man (a.), (c.), (d.), (e.) beziehungsweise mit

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial q}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial p}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q}$$

multiplicirt, addirt, und den gemeinsamen Factor μ weglässt. Es wird bequem sein, die Gleichungen (14.), (26.) anstatt (13.), (14.) zu benutzen.

Addirt man (14.), mit λ multiplicirt, zu (26.), so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$(27.) \quad \left\{ \begin{aligned} & R\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + (U + S\lambda)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + T\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \\ & + R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial q} + V\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q} + T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial p} \\ & + V\lambda\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial p} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial q}\right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Es ist zu bemerken, dass auf der linken Seite die Quadrate von $\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)$ fehlen. Daraus erschliesst man als die zu probirende Form des aus linearen Factoren bestehenden Aequivalents die folgende:

$$(28.) \quad \left\{ R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + n\frac{\partial u}{\partial p} \right\} \left\{ \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m'\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + n'\frac{\partial u}{\partial q} \right\}.$$

Die Vergleichung der Coefficienten in (27.), (28.) ergibt:

$$(a.) \quad Rm' + \lambda m = U + S\lambda,$$

$$(b.) \quad mm' = T\lambda,$$

$$(c.) \quad n\lambda = \lambda V = mn',$$

$$(d.) \quad Rn' = R,$$

$$(e.) \quad m'n = T,$$

$$(f.) \quad nn' = V.$$

Aus (b.), (c.), (d.) findet man

$$n = V, \quad n' = 1, \quad \lambda = \frac{m}{V}, \quad m' = \frac{T}{V},$$

Werthe, die auch (e.) und (f.) befriedigen, während (a.) die Gestalt

$$(29.) \quad m^2 - Sm + RT - UV = 0$$

annimmt, und zur Bestimmung von m dient. Zugleich nimmt (27.) die in Factoren aufgelöste Form an:

$$(30.) \quad \left\{ R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + V\frac{\partial u}{\partial p} \right\} \left\{ m\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + V\frac{\partial u}{\partial q} \right\} = 0.$$

Da aber zwei Werthe von m der quadratischen Gleichung (29.) genügen, so liefert (30.), wenn man jene Werthe mit m_1 , m_2 bezeichnet, die zwei Gleichungen

$$(31.) \quad \begin{cases} \left\{ R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + V\frac{\partial u}{\partial p} \right\} \left\{ m_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + V\frac{\partial u}{\partial q} \right\} = 0, \\ \left\{ R\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + V\frac{\partial u}{\partial p} \right\} \left\{ m_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + T\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + V\frac{\partial u}{\partial q} \right\} = 0. \end{cases}$$

Um diese zu befriedigen, muss man gleichzeitig einen Factor aus der einen und einen aus der anderen der Null gleich setzen. Da aber vier Combinationen möglich sind, so treten vier Systeme von linearen Gleichungen auf, und es kommt jetzt darauf an, die Beziehung dieser verschiedenen Systeme zur Auflösung der partiellen Differentialgleichung (1.) zu ergründen.

Setzt man zunächst die beiden ersten Factoren gleich Null; so hat man

$$R \frac{\partial u}{\partial x} + m_1 \frac{\partial u}{\partial y} + V \frac{\partial u}{\partial p} = 0,$$

$$R \frac{\partial u}{\partial x} + m_2 \frac{\partial u}{\partial y} + V \frac{\partial u}{\partial p} = 0,$$

ein System, welches, wofern m_1, m_2 ungleich sind, zu der einfachen Form

$$R \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + V \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

zurückgeführt werden kann.

Aus diesem Systeme aber ist kein Werth von u abzuleiten, welcher der Gleichung (1.) zu genügen geeignet ist, denn S, U, T kommen nicht in dem Systeme vor. Ferner ist es leicht zu zeigen, dass die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher das soeben erhaltene System wirklich entspricht, nicht (1.) sondern

$$Vt - R(s^2 - rt) = 0$$

ist. Um dies zu beweisen eliminirt man, vermöge (18.), die Grössen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \frac{\partial u}{\partial p}, \frac{\partial u}{\partial q}.$$

In ähnlicher Weise zeigt es sich, dass, wenn man die letzten Factoren der Gleichungen (31.) der Null gleichsetzt, das daraus entstehende System nicht der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1.), sondern der Gleichung

$$Vr + T(s^2 - rt) = 0$$

entspricht.

Es bleiben demnach nur diejenigen Systeme übrig, die sich ergeben, wenn man einen ersten Factor aus einer der Gleichungen (31.) nebst einem zweiten Factor aus der anderen gleich Null setzt, nämlich die Systeme

$$(32.) \quad \begin{cases} R \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + V \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \\ m_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + V \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

$$(33.) \quad \begin{cases} R \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + V \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \\ m_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + V \frac{\partial u}{\partial q} = 0. \end{cases}$$

Diese Systeme genügen der partiellen Differentialgleichung (1.). Dies zu beweisen, ist es nur erforderlich, die Grössen $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, u. s. w. aus (32.) oder (33.) vermöge (18.) zu eliminiren. Auf diese Weise erhält man die Gleichung

$$V\{Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) - V\} = 0,$$

welche, abgesehen von dem schon behandelten Fall $V = 0$, mit (1.) übereinstimmt. Betrachten wir besonders das System (32.).

Addirt man zur ersten Gleichung desselben die zweite, mit λ multiplicirt, nachdem man $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ durch $\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z}$ ersetzt hat, so ergibt sich

$$(R + \lambda m_2) \frac{\partial u}{\partial x} + (m_1 + \lambda T) \frac{\partial u}{\partial y} + \{Rp + m_1 q + \lambda(Tq + m_2 p)\} \frac{\partial u}{\partial z} + V \frac{\partial u}{\partial p} + \lambda V \frac{\partial u}{\partial q} = 0.$$

Dies führt auf das gewöhnliche System

$$\frac{dx}{R + \lambda m_2} = \frac{dy}{m_1 + \lambda T} = \frac{dz}{Rp + m_1 q + \lambda(Tq + m_2 p)} = \frac{dp}{V} = \frac{dq}{\lambda V},$$

woraus man, nach Elimination von λ , erhält:

$$(34.) \quad \begin{cases} Udq + m_1 dx - R dy = 0, \\ Udp + m_2 dy - T dx = 0, \\ dz - p dx - q dy = 0. \end{cases}$$

Gelingt es zwei Integrale, $u = a$, $v = b$ dieses Systems zu erhalten, so ist $F(u, v) = 0$ ein allgemeines erstes Integral von (1.). Das andere erste Integral ist in ähnlicher Weise durch Integration des aus (33.) herrührenden Systems

$$(35.) \quad \begin{cases} Udq + m_2 dx - R dy = 0, \\ Udp + m_1 dy - T dx = 0, \\ dz - p dx - q dy = 0 \end{cases}$$

zu bilden.

Es ist in §. 4 angedeutet worden, dass die schon behandelten Fälle $U = 0$, $V = 0$ als Ausnahmen in der allgemeinen Theorie vorkommen. Wie dies in Rücksicht auf V geschieht, liegt klar vor Augen. Der Fall $U = 0$ tritt als Ausnahme dadurch hervor, dass dabei die beiden ersten Gleichungen von (34.) und von (35.) identisch werden. Es wird sich aber ausweisen, dass, wenn man in diesem Fall die Elimination von λ richtig bewirkt, man zu denselben Schlüssen gelangt, zu welchen bereits die besondere Betrachtung in §. 5 geführt hat. Gelingt es nun aus (34.) zwei Integrale $u = a$, $v = b$,

in welchen p und q enthalten sind, zu gewinnen, so ist

$$F(u, v) = 0$$

ein allgemeines erstes Integral von (1.). In ähnlicher Weise ist ein allgemeines erstes Integral aus (35.) herzuleiten.

Theorie der zweiten Integration.

8. Um die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(36.) \quad \Phi(x, y, z, p, q) = 0$$

zu integrieren, die zur Abkürzung mit $P = 0$ bezeichnet werden soll, ist es der *Charpitschen* Methode zufolge hinreichend, eine andere Gleichung $Q = 0$ zu finden, welche eine willkürliche Constante enthält und zweitens, mit $P = 0$ verbunden, Werthe von p und q liefert, die $dz - p dx - q dy = 0$ integrirbar machen. Die Integration dieser totalen Differentialgleichung wird auf ein vollständiges Integral von (36.) führen, welches wir mit

$$z = f(x, y, a, b)$$

bezeichnen wollen. Hieraus entsteht das allgemeine Integral dadurch, dass man b durch $\varphi(a)$ ersetzt und a aus den Gleichungen

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a)\},$$

$$0 = \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a)\}}{\partial a}$$

eliminiert. Die Auffindung der Hülfsleichung $Q = 0$ beruht bekanntlich auf der Gleichung

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right),$$

aus welcher sich folgende entwickeln lässt:

$$(37.) \quad \frac{\partial P}{\partial p} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial P}{\partial q} \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \frac{\partial Q}{\partial q} = 0,$$

worin $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$, u. s. w. Da P bekannt ist, so hat man eine lineare partielle Differentialgleichung zur Bestimmung von Q . Dies reicht, wie schon angedeutet worden, hin, irgend einen Werth von Q , welcher eine willkürliche Constante enthält, abzuleiten.

Im vorliegenden Falle aber lässt sich ein leichter Weg einschlagen. Wiewohl es erforderlich gewesen ist, die obige Theorie zu erörtern, werde ich mich derselben doch fast nur bedienen, um klar zu machen, auf welche

Art die Beschaffenheit der Gleichungen, deren Integration die ersten Integrale von (1.) ergab, auch die Ausführung der zweiten Integration und damit die vollständige Auflösung von (1.) vereinfacht.

Betrachten wir die allgemeine Gleichung

$$Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V,$$

in welcher weder $U=0$ noch $V=0$ ist. Setzen wir zunächst voraus, dass die beiden Wurzeln der Gleichung

$$m^2 - Sm + RT - UV = 0$$

einander gleich sind. Die Systeme (34.), (35.) werden alsdann identisch, und man hat zur Bestimmung des ersten Integrals

$$(38.) \quad \begin{cases} Udq + m dx - R dy = 0, \\ Udp + m dy - T dx = 0, \\ dz - p dx - q dy = 0. \end{cases}$$

Da aber bei diesem System die Bedingung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{-m}{U}$$

erfüllt wird, so erhellt es, dass irgend zwei Integrale $u=a$, $v=b$ solche Werthe von p und q liefern werden, welche $dz - p dx - q dy$ integrirbar machen.

Um das allgemeine erste Integral $F(u, v) = 0$, oder, was dasselbe ist, $v = \varphi(u)$ noch einmal zu integriren, verbinde man dasselbe, der *Charpitschen* Methode gemäss, mit dem besonderen Integrale $u = a$. Man hat

$$v = \varphi(u), \quad u = a,$$

oder was gleichbedeutend ist,

$$u = a, \quad v = \varphi(a),$$

in Folge wovon die nun integrirbar gewordene Gleichung $dz - p dx - q dy = 0$ ein vollständiges Integral von der Form

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a), c\}$$

liefert. Eliminirt man a aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= f\{x, y, a, \varphi(a), \psi(a)\}, \\ 0 &= \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a), \psi(a)\}}{\partial a}, \end{aligned}$$

so hat man das allgemeine Integral von (1.). Eliminirt man aber a , c aus den Gleichungen

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a), c\},$$

$$0 = \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a), c\}}{\partial a}, \quad 0 = \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a), c\}}{\partial c},$$

so hat man das singulare Integral.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich auf den Fall, in welchem $V=0$ ist, ausdehnen. Nur tritt statt des Systemes (38.) das System (21.) auf.

Im Falle von $U=0$ aber wird diese Methode unzureichend; denn aus (d.) in 4. erhellt, dass in diesem Falle

$$\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial p} = 0$$

ist, woraus, einem bekannten Satze nach, u in Bezug auf p und q eine Function von v ist. Daher reichen die vereinigten Gleichungen

$$u = a, \quad v = \varphi(a)$$

nicht hin, die Grössen p und q zu bestimmen. Man muss zu den gewöhnlichen Methoden für die Integration von $F(u, v) = 0$ zurückkehren.

Nehme man endlich an, dass m_1, m_2 ungleich sind, und betrachte man zunächst den allgemeinen Fall, in welchem weder U noch V verschwinden. Wir wollen zeigen, dass irgend ein Integral aus dem Systeme (34.) mit irgend einem Integrale aus dem Systeme (35.) verbunden, solche Werthe von p und q liefern wird, welche $dz - p dx - q dy = 0$ integrirbar machen.

Um dies zu beweisen, kehre man zu den ursprünglichen Gleichungen (32.), (33.) zurück, aus welchen (34.) und (35.) hergeleitet sind. Daraus erhellt, dass wenn $P=0$ ein Integral von (34.) und $Q=0$ ein Integral von (35.) ist, die folgenden Gleichungen befriedigt sein werden:

$$\begin{aligned} -V \frac{\partial P}{\partial p} &= R \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) + m_1 \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right), \\ -V \frac{\partial P}{\partial q} &= m_2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) + T \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right), \\ -V \frac{\partial Q}{\partial p} &= R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) + m_2 \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right), \\ -V \frac{\partial Q}{\partial q} &= m_1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) + T \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Man führe diese Werthe von $\frac{\partial P}{\partial p}, \frac{\partial P}{\partial q}, \frac{\partial Q}{\partial p}, \frac{\partial Q}{\partial q}$ in (37.) ein, so wird diese Gleichung eine identische, wodurch die Behauptung erwiesen ist.

Verbindet man daher das allgemeine Integral $F(u, v) = 0$, welches aus *einem* der Systeme (34.), (35.) abgeleitet ist, mit einem besonderen Integrale $u = a$, welches dem anderen angehört, so wird man, nach ausgeführter Integration von $dz - p dx - q dy = 0$, zu einer vollständigen Lösung von (1.)

$$z = f(x, y, a, c)$$

gelangen, in welcher nicht bloss zwei willkürliche Constanten vorkommen, sondern auch, wegen der allgemeinen Form von $F(u, v)$, eine willkürliche Function. Hieraus wird die allgemeine Lösung von (1.) dadurch hervorgehen, dass man a aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= f\{x, y, a, \varphi(a)\}, \\ 0 &= \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a)\}}{\partial a} \end{aligned}$$

eliminiert, — und die singulare Lösung dadurch, dass man a, c aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= f(x, y, a, c), \\ 0 &= \frac{\partial f(x, y, a, c)}{\partial a}, \quad 0 = \frac{\partial f(x, y, a, c)}{\partial c} \end{aligned}$$

eliminiert. Die allgemeine Lösung hat den Charakter eines Ausdrucks, in welchem zwei willkürliche Functionen vorkommen.

Aehnliche Betrachtungen gelten auch, wenn $U = 0$ oder $V = 0$, ohne dass hierbei Ausnahmefälle eintreten.

Der Bequemlichkeit halber mögen alle bisherigen Ergebnisse, sowohl die ausführlich ausgesprochenen als die nur angedeuteten, in einem Gesamtüberblick zusammengefasst werden.

Zusammenstellung von Ergebnissen.

9. 1stens. Im Falle $U = 0$, bildet man die Gleichungen

$$(A.) \quad \frac{dx}{R} = \frac{m dy}{T} = \frac{dp + m dq}{V},$$

$$(B.) \quad dz - p dx - q dy = 0,$$

wo m eine der Wurzeln der Gleichung

$$(C.) \quad Rm^2 - Sm + T = 0.$$

2^{ten}. Im Falle $V = 0$, bildet man die Gleichungen

$$(A.) \quad \frac{dq}{R} = \frac{m dp}{T} = \frac{dy + m dx}{U},$$

$$(B.) \quad dz - p dx - q dy = 0,$$

wo m eine der Wurzeln der Gleichung

$$(C.) \quad Rm^2 + Sm + T = 0$$

bezeichnet.

3^{tes}. Sind weder $U = 0$ noch $V = 0$, so bildet man die Gleichungen

$$(A.) \quad \begin{cases} Udq + m_1 dx - R dy = 0, \\ Udp + m_2 dy - T dx = 0, \end{cases}$$

$$(B.) \quad dz - p dx - q dy = 0,$$

wo m_1, m_2 die Wurzeln der Gleichung

$$(C.) \quad m^2 - Sm + RT - UV = 0$$

bezeichnen.

In jedem Falle wird, wenn $u = a, v = b$ Integrale von (A.) bezeichnen, welche mit oder ohne Hülfe von (B.) erhalten worden sind,

$$F(u, v) = 0$$

ein allgemeines erstes Integral von (1.) darstellen. Das zweite allgemeine Integral oder, was dasselbe ist, die allgemeine Lösung z ergibt sich entweder durch unabhängige Integration dieser Gleichung, oder, was viel bequemer ist, durch das folgende Verfahren.

Wenn $m_1 = m_2$ ist, so führe man in die Gleichung $dz - p dx - q dy = 0$ die aus $u = a, v = \varphi(a)$ erhaltenen Werthe von p und q ein. Durch Integration derselben wird eine *vollständige Lösung*

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a), c\}$$

entstehen, woraus man eine allgemeine Lösung ableiten wird, indem man a aus den Gleichungen

$$(E.) \quad \begin{cases} z = f\{x, y, a, \varphi(a), \psi(a)\}, \\ 0 = \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a), \psi(a)\}}{\partial a} \end{cases}$$

eliminiert, und eine singulare Lösung, indem man a, c , aus den Gleichungen

$$(F.) \quad \begin{cases} z = f\{x, y, a, \varphi(a), c\}, \\ 0 = \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial a}, \quad 0 = \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial c} \end{cases}$$

eliminiert.

In dem so gebildeten System von particularen, allgemeinen und singularen Integralen werden alle Lösungen enthalten sein.

Das obige Verfahren erleidet, wie schon bemerkt worden ist, eine Ausnahme in dem besonderen Fall $U = 0$.

Wenn m_1, m_2 von einander verschiedene Werthe besitzen, so verfüge man in dem allgemeinen ersten Integrale, $F(u, v) = 0$, auf beliebige Weise

über die Zweideutigkeit, welche mit den darin vorkommenden Werthen von m_1, m_2 verbunden ist. Hierauf vertausche man in u die beiden Wurzeln m_1, m_2 mit einander, nenne u' den neuen Werth von u . Nun verbinde man das particulare Integral $u' = a$ mit dem allgemeinen $F(u, v) = 0$ und führe dadurch die Integration von $dz - p dx - q dy = 0$ aus. Die so erhaltene vollständige Lösung

$$z = f(x, y, a, c)$$

wird zur entsprechenden allgemeinen Lösung dadurch führen, dass man a aus den Gleichungen

$$z = f\{x, y, a, \varphi(a)\},$$

$$0 = \frac{\partial f\{x, y, a, \varphi(a)\}}{\partial a}$$

eliminiert, und zur singularen Lösung dadurch, dass man a, c aus den Gleichungen

$$z = f(x, y, a, c),$$

$$0 = \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial a}, \quad 0 = \frac{\partial f(x, y, \dots)}{\partial c}$$

eliminiert.

10. Ich füge die folgenden Beispiele hinzu. Es sei

$$(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t - \frac{s^2 - rt}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = -(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Da diese Gleichung dem allgemeinen Falle angehört, bei welchem weder $U = 0$ noch $V = 0$ ist, so hat man, den obigen Regeln gemäss,

$$m^2 + 2pqm + p^2q^2 = 0,$$

wonach $m = -pq$ ist, und die zur Bestimmung von u, v dienenden Gleichungen sind

$$\frac{dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} + pq dx + (1 + q^2) dy = 0,$$

$$\frac{dp}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} + pq dy + (1 + p^2) dx = 0,$$

woraus nach Elimination von dy

$$dx - \frac{(1 + q^2)dp - pq dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$x - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = a.$$

In ähnlicher Weise ist

$$y - \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = b,$$

nachdem b durch $\varphi(a)$ ersetzt worden ist, geht daher die Gleichung

$$dz - p dx - q dy = 0$$

in die Form

$$dz - \frac{\{x-a\}dx + \{y-\varphi(a)\}dy}{\sqrt{1-\{x-a\}^2 - \{y-\varphi(a)\}^2}}$$

über. Also ist

$$\{x-a\}^2 + \{y-\varphi(a)\}^2 + \{z-c\}^2 = 1$$

eine vollständige Lösung der gegebenen Gleichung. Die entsprechende allgemeine Lösung ist am einfachsten durch Elimination von a aus

$$\{x-a\}^2 + \{y-\varphi(a)\}^2 + \{z-\psi(a)\}^2 = 1,$$

$$x-a + \{y-\varphi(a)\}\varphi'(a) + \{z-\psi(a)\}\psi'(a) = 0$$

zu erhalten. Es ist leicht einzusehen, dass kein singuläres Integral vorhanden ist. In der That nimmt das System (F.) die sich selbst widersprechende Form

$$z = c + \sqrt{1 - \{x-a\}^2 - \{y-\varphi(a)\}^2},$$

$$0 = \frac{-\{x-a\} - \{y-\varphi(a)\}\varphi'(a)}{\sqrt{1 - \{x-a\}^2 - \{y-\varphi(a)\}^2}}, \quad 0 = 1$$

an.

Zum zweiten Beispiel nehmen wir die allgemeine Gleichung bei beständigen Coefficienten

$$ar + bs + ct + e(s^2 - rt) = h.$$

Hier sind m_1, m_2 die Wurzeln der Gleichung

$$m^2 - bm + ac - eh = 0,$$

und unter der Voraussetzung, dass sie ungleich sind, zerfällt das System (A.) in die beiden Systeme

$$\left. \begin{aligned} edq + m_1 dx - a dy &= 0 \\ edp + m_2 dy - c dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} edq + m_2 dx - a dy &= 0 \\ edp + m_1 dy - c dx &= 0 \end{aligned} \right\},$$

es treten also die beiden ersten Integrale auf:

$$eq + m_1 x - ay = f_1(ep + m_2 y - cx),$$

$$eq + m_2 x - ay = f_2(ep + m_1 y - cx).$$

Setzt man an die Stelle des zweiten dieser Integrale das besondere darin enthaltene

$$ep + m_1 y - cx = C,$$

während das erste unumschränkt bleibt, so findet man aus dem Zusammen-

bestehen beider:

$$p = \frac{cx - m_1 y + C}{e}, \quad q = \frac{ay - m_1 x + f_1 \{(m_2 - m_1)y + C\}}{e}.$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung $dz - p dx - q dy = 0$ ein, so folgt, nach ausgeführter Integration und Ersetzung von $\int f(c) dt$ durch $\varphi(t)$,

$$z = \frac{1}{e} \left(\frac{cx^2}{2} - m_1 xy + \frac{ay^2}{2} + Cx + \varphi \{C + (m_2 - m_1)y\} \right) + C',$$

eine vollständige Lösung der gegebenen Gleichung. Daher nimmt das entsprechende allgemeine Integral die Form an:

$$z = \frac{1}{e} \left(\frac{cx^2}{2} - m_1 xy + \frac{ay^2}{2} + Cx + \varphi \{C + (m_2 - m_1)y\} \right) + \psi(C),$$

$$0 = \frac{1}{e} \left(x + \varphi' \{C + (m_2 - m_1)y\} \right) + \psi'(C),$$

woraus, nachdem φ und ψ bestimmt worden sind, nur C zu eliminiren übrig bleibt. Auch hier ist keine singulare Lösung vorhanden.

Zweite Methode.

11. Man setze

$$(39.) \quad s^2 - rt = \mu,$$

und indem man diese Gleichung mit

$$(40.) \quad \begin{cases} dp = r dx + s dy, \\ dq = s dx + t dy, \end{cases}$$

und der gegebenen Gleichung

$$(1.) \quad Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V$$

verbindet, eliminire man r, s, t aus denselben, so ergibt sich

$$(41.) \quad \begin{cases} R dp^2 + S dp dq + T dq^2 - V(dp dx + dq dy) \\ - \mu \{R dy^2 - S dx dy + T dx^2 - U(dp dx + dq dy)\} = 0. \end{cases}$$

Wir werden nicht *a priori* zu beweisen versuchen, dass es erlaubt ist, diese Gleichung in das System

$$(42.) \quad \begin{cases} R dp^2 + S dp dq + T dq^2 - V(dp dx + dq dy) = 0, \\ R dy^2 - S dx dy + T dx^2 - U(dp dx + dq dy) = 0 \end{cases}$$

zu zerlegen. Genüge es hier, die Zulässigkeit dieses Verfahrens dadurch *a posteriori* festzustellen, dass wir das erhaltene System in lineare Systeme zerlegen und die besonderen Beziehungen derselben zu (1.) getrennt bestimmen.

Hätten wir nur r, t aus (1.) vermöge (40.) eliminirt, und in dem Ergebnisse den von s unabhängigen und den in s multiplicirten Theil besonders

$= 0$ gesetzt, so wären wir zu dem System

$$(42^*.) \quad \begin{cases} R dy^2 - S dx dy + T dx^2 - U(dp dx + dq dy) = 0, \\ R dp dy + T dq dx - U dp dq - V dx dy = 0 \end{cases}$$

gelangt. In den *Ampèreschen* Untersuchungen kommt dieses System vor, nur mit dem Unterschiede, dass *Ampère* die Gründe der angedeuteten Zerlegung *a priori* festzusetzen versucht.

Wie man auch immer zu irgend einem der beiden obigen gleichwerthigen Systeme gelangt, so scheint es mir kaum fraglich zu sein, dass die Zerlegung derselben in lineare Systeme und die Bestimmung der daraus entstehenden Beziehungen zu (1.) wesentlich erforderlich ist; und hierin liegt, wenn ich mich nicht irre, das wirkliche Fehlschlagen der *Ampèreschen* Theorie.

Gehen wir nun von dem symmetrischen System (42.) aus. Man ersieht leicht, dass eine gewisse Aehnlichkeit der Form zwischen diesem System und dem System (13.), (14.) sich zeigt, — eine Aehnlichkeit, welche sich so ausdrücken lässt: wenn die Grössen

$$(43.) \quad dx, \quad dy, \quad dp, \quad dq, \quad U, \quad V, \quad S$$

beziehungsweise mit

$$(44.) \quad -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial q}, \quad \frac{\partial u}{\partial p}, \quad V, \quad U, \quad -S$$

vertauscht werden, so geht das eine in das andere System über. Es folgt unmittelbar aus dieser Verbindung der beiden Systeme, dass sich das ganze Verfahren von §. 4, insofern es sich auf die Form der Gleichungen (13.), (14.) bezieht, auch hier unumschränkt anwenden lässt, dass daher die Einführung und Bestimmung der Grössen λ , m , etc., die Zerlegung des Systems (42.) in vier lineare Systeme, die Erforschung der Beziehungen, in welchen diese Systeme zu (1.) stehen, u. s. w. einen Verlauf darbieten, ganz ähnlich dem in §. 4 und den folgenden §§. auseinandergesetzten. Vermöge der obigen Vertauschung lassen sich auch die Ergebnisse des einen Verfahrens unmittelbar in die des anderen umwandeln.

Ebenso gehen z. B. die Gleichungen (29.), (32.), (33.) in die folgenden

$$(45.) \quad m^2 - Sm + RT - UV = 0,$$

$$(46.) \quad \begin{cases} -R dy + m_1 dx + U dq = 0, \\ m_2 dy - T dx + U dp = 0, \end{cases}$$

$$(47.) \quad \begin{cases} m_1 dy - T dx + U dp = 0, \\ -R dy + m_2 dx + U dq = 0 \end{cases}$$

über. Man ersieht, dass diese Gleichungen, wenn man denselben

$$dz - p dx - q dy = 0$$

hinzufügt, mit den Systemen (34.), (35.) übereinstimmen. Auch folgt aus demselben Reciprocitätssatze, dass, wenn man entweder aus (46.) oder aus (47.) die Grössen dy , dx , dp , dq eliminirt, die Gleichung entsteht:

$$(48.) \quad U\{Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) - V\} = 0.$$

Endlich treten dieselben Ausnahmefälle $U = 0$, $V = 0$ wie oben, nur in umgekehrter Ordnung und mit umgekehrten Verhältnissen, ein.

Auf den merkwürdigen Umstand wollte ich hier aufmerksam machen, dass sich die partiellen Differentialgleichungen (32.), (33.) durch das oben erwähnte Gesetz in eben dieselben gewöhnlichen Differentialgleichungen verwandeln, auf welchen deren gleichzeitige Integration beruht.

Wenn man die Natur der oben angewandten Reciprocität erwägt, so ist es klar, dass dieselbe nicht für den Ausdruck eines ursprünglichen und unabhängigen Gesetzes gehalten werden darf. In der That sind zwei Bestandtheile zu unterscheiden, aus denen sie sich zusammensetzt, wovon der eine in der besonderen Beschaffenheit entweder des Systems

$$(49.) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial u}{\partial p} r - \frac{\partial u}{\partial q} s, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial u}{\partial p} s - \frac{\partial u}{\partial q} t,$$

oder des Systems

$$(50.) \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy$$

besteht, während der andere in der Gleichartigkeit der beiden mit einander verglichenen Systeme beruht.

Durch blosse Auflösung geht (49.) in die gleichwerthige Form

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{r}{s^2 - rt} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{s}{s^2 - rt} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{s}{s^2 - rt} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{t}{s^2 - rt} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

über, woraus erhellt, dass (49.) keine wirkliche Veränderung erleidet, wenn man darin die Grössen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \frac{\partial u}{\partial q}, \quad r, \quad s, \quad t$$

beziehungsweise mit

$$\frac{\partial u}{\partial q}, \quad \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{-r}{s^2 - rt}, \quad \frac{s}{s^2 - rt}, \quad \frac{-t}{s^2 - rt}$$

vertauscht. Durch die Vertauschung aber von r , s , t mit $\frac{-r}{s^2 - rt}$, $\frac{s}{s^2 - rt}$, $\frac{-t}{s^2 - rt}$ geht die Gleichung

$$Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V$$

in

$$Rr - Ss + Tt + V(s^2 - rt) = U$$

über, oder, was dasselbe ist, die Grössen S , U , V gehen in $-S$, V , U über, so dass die hier betrachtete Transformation mit der in (11.), (12.) gegebenen völlig übereinstimmt.

Aus der Vergleichung von (49.), (50.) ergibt sich aber, dass es gestattet ist, die Grössen

$$(51.) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \frac{\partial u}{\partial q}$$

beziehungsweise mit

$$(52.) \quad dp, \quad dq, \quad -dx, \quad -dy$$

zu vertauschen.

Durch Verbindung der in (11.), (12.) und in (51.), (52.) ausgedrückten Reciprocitätssätze gelangt man leicht zu dem in (43.), (44.) angegebenen.

Es ist zu bemerken, dass diese Reciprocitätssätze von dem bekannten *Legendreschen* sich unterscheiden, obgleich diese alle als aus derselben Quelle herstammend anzusehen sind.

12. Ich habe mir in dieser Abhandlung nur vorgenommen, die Theorie der Integration von (1.), unter der Bedingung, dass ein erstes Integral von der Form $F(u, v) = 0$ vorhanden sei, zu betrachten. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so muss man zu verschiedenen speciellen Methoden Zuflucht nehmen, z. B. zu den *Legendreschen* und *Laplaceschen* Umwandlungen, schon in diesem Journal (Band 58) von den Herren *Fuchs* und *Hoppe* durch ein besonderes Beispiel erläutert, — zu den symbolischen Methoden, u. s. w. Eine allgemeine Methode ist bis jetzt nicht aufgestellt worden. Wenn ich über die Möglichkeit und die Beschaffenheit einer solchen Methode eine Vermuthung ausdrücken darf, so wollte ich auf ein Verallgemeinern der schönen Methode, welche *Cauchy* zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung angewandt hat, in Verbindung mit der von *Pfaff* und *Jacobi* herrührenden Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung hinweisen.

Cork, in Irland, 1862.