Bemerkung zu dem vorstehenden Aufsatz des Herrn Young.

Von

A. SCHOENFLIES in Königsberg i. Pr.

Herr W. H. Young hat im vorstehenden auf ein Versehen hingewiesen, das in meinem Bericht über Mengenlehre enthalten ist und einen Satz des Herrn R. Baire betrifft.*) Hierzu darf ich bemerken, daß mich bereits vor längerer Zeit Herr Baire selbst darauf aufmerksam gemacht hatte, indem er mir ebenfalls ein Beispiel angab, das meine Darstellung widerlegt, und das demjenigen des Herrn Young ganz ähnlich ist.

Es war ursprünglich meine Absicht, diese und etwaige andere Berichtigungen dem zweiten Teil meines Berichts hinzuzufügen, der, wie ich hoffe, baldigst erscheinen wird. Nachdem aber Herr Young im vorstehenden sein Beispiel mitgeteilt hat, erlaube ich mir, auch dasjenige Beispiel hierherzusetzen, das mir vor zwei Jahren von Herrn Baire mitgeteilt wurde. Es unterscheidet sich von dem vorstehenden einerseits darin, daß es mit der fortgesetzten Vierteilung eines Quadrates operiert, statt mit der Teilung in je neun Quadrate, und scheint mir andererseits noch einfacher definierbar zu sein. Die bezügliche Punktmenge Q wird nämlich folgendermaßen bestimmt. Nachdem man das Quadrat q in vier gleiche Quadrate geteilt hat, wählt man von ihnen zwei aus, die von derselben Diagonale durchzogen werden, und setzt fest, daß ihr Inneres keine Punkte von Q enthalten soll. Die beiden andern Quadrate seien q_1 und q_2 . Jedes von ihnen wird ebenso behandelt wie q selbst. Es wird in vier gleiche Quadrate geteilt, und zwei von ihnen bleiben wieder von Punkten von Q frei, und zwar so, daß die Diagonale, die diese Teilquadrate durchzieht, zu der vorher benutzten Diagonale senkrecht verläuft. Die übrigen beiden Quadrate seien q_{11}, q_{12} und q_{21}, q_{22} (Fig. 1). Diese Quadrate behandle man analog und fahre so unbegrenzt fort. Betrachtet man nun alle Punkte, die innere Punkte sämtlicher Quadrate

$$q, q_i, q_{ik}, q_{ikl}, \dots$$

*) a. a. O. S. 86 u. 87.

sind, so bestimmen sie nebst ihren sämtlichen Grenzpunkten die Punktmenge Q . Es ist unmittelbar klar, daß Q eine Menge der verlangten

Fig. 1.

Art ist. Sie ist nirgends dicht und abgeschlossen, und auf jeder Quadratseite besteht ihre Projektion aus allen Punkten dieser Seite.

Da Herr Young meint, es sei nicht ersichtlich, an welcher Stelle meines Berichts der Trugschluß steckt, so möchte ich hier darauf hinweisen. Wie a. a. O. bewiesen ist, bestimmt jede nirgends dichte abgeschlossene ebene Menge Q eine abzählbare Menge von Rechtecken in der Weise, daß jeder Punkt der Menge auf dem Umfang eines dieser Rechtecke liegt oder Grenzpunkt solcher Punkte ist. In dem vorliegenden Fall enthält jeder Rechteckumfang insbesondere eine nirgends dichte lineare Teilmenge von Q . Projiziert man diese Teilmenge auf eine Gerade g beliebiger Richtung, so wird jedes punktfreie Intervall, das dem Umfang eines Rechtecks angehört, auf g ebenfalls ein punktfreies Intervall erzeugen. Diese Intervalle werden aber im allgemeinen *nicht* mehr die Eigenschaft haben, daß *je zwei außerhalb voneinander* liegen, und deshalb kann *nicht* mehr behauptet werden, daß sie auf g eine nirgends dichte Menge bestimmen. Das gleiche gilt für eine Quadratseite selbst, nur daß hier einzelne Intervalle sich in einen Punkt projizieren.