Über Selbstspannungen ebener Diagramme.

Von

FELIX KLEIN in Göttingen.

In einer Arbeit über „Spannungsflächen und reziproke Diagramme“, die ich vor einigen Jahren zusammen mit K. Wieghardt im Archiv der Mathematik und Physik veröffentlichte*), habe ich gezeigt, daß die Wiederheranziehung der Originalideen Maxwells dem bezeichneten Gegenstande eine Reihe neuer und interessanter Seiten abgewinnen läßt. Dabei blieb ein bestimmter feinerer Punkt unerledigt, der im folgenden klargestellt werden soll. Ich gebe dabei meiner Darlegung eine elementare, analytisch-geometrische Form, die auch ohne Rückgang auf die frühere Publikation verständlich sein dürfte. Auf rein geometrische Begründung, insbesondere die Einzelheiten der graphischen Darstellung gehe ich dabei nicht ein; diese werden, soweit sie erwünscht scheinen, in einer Arbeit meines Assistenten, Herrn Fr. Pfeiffer, enthalten sein, welche demnächst in der Zeitschrift für Mathematik und Physik erscheinen wird.

1. Es sei ein gewöhnliches *Eulersches Polyeder* gegeben, d. h. eine aus ebenen Facetten zusammengesetzte Oberfläche, welche zwei getrennte Seiten besitzt und übrigens dem Riemannschen Geschlecht $p = 0$ angehört (den „Zusammenhang“ 1 besitzt).***) Weil zwei getrennte Flächen-seiten vorhanden sind, können wir für jeden Eckpunkt des Polyeders einen bestimmten Umlaufungssinn festlegen, indem wir verabreden, daß dieser Sinn von der einen Flächenseite aus gesehen mit dem Uhrzeigersinn übereinstimmen soll. Nun seien die Polyederebenen, die in irgend einem Eckpunkte (i) des Polyeders zusammenstossen, gemäß der durch diesen Sinn festgelegten Reihenfolge durch nachstehende Gleichungen gegeben:

*) III. Reihe, Band 8 (1904).

**) Die Polyederoberfläche kann sich übrigens beliebig durchsetzen.

$$(1) \quad \begin{cases} z = a_k^i x + b_k^i y + c_k^i, \\ z = a_i^i x + b_i^i y + c_i^i, \\ z = a_m^i x + b_m^i y + c_m^i, \\ \dots \end{cases}$$

Man hat dann für die von (i) auslaufenden Polyederkanten, genauer für ihre Projektionen auf die XY -Ebene, die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = (a_k^i - a_i^i) x + (b_k^i - b_i^i) y + (c_k^i - c_i^i), \\ 0 = (a_i^i - a_m^i) x + (b_i^i - b_m^i) y + (c_i^i - c_m^i), \\ \dots \end{cases}$$

Die so gewonnenen Projektionen bilden ein *ebenes Diagramm*, für welches wir aus den vorstehenden Gleichungen unmittelbar einen *Selbstspannungszustand* aufstellen können. Man lasse nämlich am i^{ten} Knotenpunkte des Diagramms (der dem i^{ten} Eckpunkte des Polyeders als Projektion entspricht) Kräfte mit folgenden X -, Y -Komponenten angreifen:

$$(3) \quad \begin{cases} X_{ki}^i = b_k^i - b_i^i, & Y_{ki}^i = a_i^i - a_k^i; \\ X_{im}^i = b_i^i - b_m^i, & Y_{im}^i = a_m^i - a_i^i; \\ \dots \end{cases}$$

Diese Kräfte wirken, wie man sofort erkennt, der Reihe nach längs der einzelnen durch (2) gegebenen Kanten („Stäbe“) des Diagramms und stehen übrigens am i^{ten} Knotenpunkte im Gleichgewicht, weil die Summe ihrer X -Komponenten, wie ihrer Y -Komponenten verschwindet. Andererseits gehört zu dem zweiten Knotenpunkte, den etwa die Kante kl trägt, — er möge j heißen —, gemäß der für die Eckpunkte des Ausgangspolyeders verabredeten Umlaufungsregel (anders ausgedrückt: gemäß dem für unser Polyeder geltenden Moebius'schen Kantengesetz) eine Kraft:

$$(4) \quad X_{ik}^j = b_i^j - b_k^j, \quad Y_{ik}^j = a_k^j - a_i^j,$$

welche der Kraft X_{ki}^i, Y_{ki}^i entgegengesetzt gleich ist. Die an den sämtlichen Knotenpunkten des Diagramms angreifenden Kräfte ergeben also ein längs der Stäbe des Diagramms wirkendes, mit sich selbst im Gleichgewicht stehendes *Selbstspannungssystem*; sie ergeben, wie wir kurz sagen wollen, eine *Selbstspannung* des Diagramms.

Ich erinnere noch daran, wie man (nach Maxwell-Cremona) von dem so gewählten Ausgangspunkte aus das zugehörige, unserem Diagramm *reziproke* Diagramm und damit den Kräfteplan unserer Selbstspannung konstruiert: man hat einfach jeder Polyederebene

$$z = ax + by + c$$

den Punkt

$$(5) \quad x = b, \quad y = -a$$

entsprechend zu setzen. In der Tat sind dann die Kräfte (3), die entlang den Stäben unseres Diagramms wirken, der Größe und Richtung nach durch die die Punkte des reziproken Diagramms verbindenden Vektoren gegeben.

2. Es ist nun nicht schwer zu sehen, daß man den geschilderten, von Maxwell herrührenden Ansatz ohne weiteres umkehren kann. Um die hierfür nötige Überlegung kurz und präzise zu fassen, ist es zweckmäßig, zwischen die Kanten unseres Diagramms entsprechend den Seitenflächen des Ausgangspolyeders *Blätter* eingespannt zu denken (deren einzelnes also eine von einer Anzahl Stäbe des Diagramms begrenzte Polygonfläche vorstellen wird). Diese Blätter bilden, zusammengenommen, eine dem Ausgangspolyeder Punkt für Punkt entsprechende Fläche, die also, gleich dem Polyeder, dem Geschlecht $p = 0$ angehört, und auf die sich unsere auf das Ausgangspolyeder bezügliche Verabredung betreffs des Umlaufungssinnes der einzelnen Eckpunkte (Knotenpunkte) überträgt. Wer irgend an die Vorstellung einer über die Ebene mehrblättrig ausgebreiteten Riemannschen Fläche gewöhnt ist, wird in der Erfassung dieser einen Teil der XY -Ebene ebenfalls mehrfach überdeckenden *Hilfsfläche* keinerlei Schwierigkeiten finden.

Man stelle nun irgend eine zu unserem Diagramm gehörige Selbstspannung auf. Wir erfahren dann aus den Gleichungen (3) für jede Kante des Diagramms zugehörige Werte der $a_k^i - a_i^i$, $b_k^i - b_i^i$, aus den Gleichungen (2) einen zugehörigen Wert von $c_k^i - c_i^i$. Die Frage ist, ob wir von der Kenntnis dieser *Differenzen* aus, gestützt auf die Aufeinanderfolge der Blätter unserer in das Diagramm eingespannten Hilfsfläche, zu zugehörigen Werten der a_k^i , b_k^i , c_k^i selbst und damit zu einem Maxwell'schen Polyeder widerspruchsfrei übergehen können.

Dies ist nun in der Tat der Fall und zwar in der Weise, daß wir für eines der Blätter unserer Hilfsfläche die zugehörigen a , b , c , — sagen wir als a_0 , b_0 , c_0 — beliebig annehmen können, dann aber alles bestimmt ist. Zum Beweise wollen wir uns folgende Vorstellungsweise bilden. Wir wollen die gesuchten a , b , c als Funktionswerte auffassen, die zu den einzelnen Punkten der Hilfsfläche gehören, die also, solange sich der Punkt innerhalb eines Blattes der Hilfsfläche bewegt, konstant bleiben, jedesmal aber, wenn der Punkt über eine Kante hinweg in ein neues Blatt tritt, gemäß den Gleichungen

$$(6) \quad \Delta a = a_k^i - a_i^i, \quad \Delta b = b_k^i - b_i^i, \quad 0 = \Delta a \cdot x + \Delta b \cdot y + \Delta c$$

springen. Die Frage ist einfach, ob man diese Differenzengleichungen, von den irgend einem Punkte der Hilfsfläche beigelegten Anfangswerten a_0 , b_0 , c_0 beginnend, über unsere Hilfsfläche hin *eindeutig integrieren*

kann, und diese Frage ist, gemäß bekannten Theorien, zu bejahen, weil unsere Hilfsfläche dem Geschlechte $p = 0$ angehört und die Umkreisung eines beliebigen Knotenpunktes (singulären Punktes der Differenzengleichungen) allemal $\Sigma \Delta a = 0$, $\Sigma \Delta b = 0$, $\Sigma \Delta c = 0$ ergibt.

Also: Zu jedem Selbstspannungssystem unseres Diagramms gehört, nachdem man die Konstanten a_0, b_0, c_0 willkürlich angenommen hat, ein bestimmtes Maxwellsches Polyeder. Eine Abänderung der a_0, b_0, c_0 bedeutet, daß man die rechten Seiten der Formeln (1) — der Gleichungen der Seitenebenen des Polyeders — alle um dieselbe lineare Funktion $ax + by + c$ vermehrt. Ist die Zahl der möglichen Selbstspannungen ∞^n , so ist dementsprechend die Zahl der zum Diagramm gehörigen Maxwellschen Polyeder ∞^{n+3} . Die Zahl der reziproken Diagramme aber ist, weil in den Formeln (5) die c fortfallen, nur ∞^{n+2} , und von diesen unterscheiden sich jedesmal ∞^2 nur durch eine Parallelverschiebung über die Ebene des Zeichenbrettes hin.

Es ist von vornherein klar, was es heißt, zwei an demselben Diagramm angreifende Selbstspannungen zu addieren. Genau so wird man zwei zu demselben Diagramm gehörige Maxwellsche Polyeder addieren können. Man vereinigt zu dem Zwecke einfach die beiden demselben Blatte der Hilfsfläche entsprechenden Ebenen der beiden Polyeder:

$$z = a'x + b'y + c' \quad \text{und} \quad z = a''x + b''y + c''$$

zu der neuen Ebene

$$(7) \quad z = (a'x + b'y + c') + (a''x + b''y + c'').$$

Die Selbstspannungen und die Polyeder bilden in diesem Sinne je eine lineare Schar. Gibt es n „linear-unabhängige“ Selbstspannungen $S_1, S_2, \dots, S_n$, so stellt sich die allgemeinste Selbstspannung des Diagramms in der Gestalt

$$(8) \quad \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda_n S_n$$

dar, wo die λ beliebig zu wählende Konstante sind. Es gibt dann $(n+3)$ linear-unabhängige Maxwellsche Polyeder; der Überschuß der drei Einheiten kommt auf die drei vorhin eingeführten Integrationskonstanten. Ebenso gibt es $(n+2)$ linear-unabhängige reziproke Diagramme.

3. In dem oben zitierten Aufsätze von Wieghardt und mir ist bereits angedeutet, wie sich die soweit entwickelten Sätze modifizieren, wenn die Hilfsfläche, die in die Stäbe des Diagramms eingespannt ist, höheres Geschlecht ($p > 0$) besitzt; ich gehe hierauf gegenwärtig nicht näher ein. Dagegen wurde damals nur erst gefragt, welche Bewandnis es mit solchen Diagrammen haben mag, die, durch Einfügung geeigneter Blätter vervollständigt, als Projektion einseitiger Polyeder erscheinen („Moebiuscher“ Polyeder, bei denen man keine zwei Flächenseiten unter-

scheiden kann, weil die eine Flächenseite des einzelnen Begrenzungs-polygons beim Hinschreiten über das Polyeder kontinuierlich in die andere Flächenseite des Begrenzungs-polygons übergeht).

Diese weitere Frage zu beantworten ist der eigentliche Zweck meiner diesmaligen Mitteilung. Ich werde mich dabei, um der Auffassung keine zu großen Schwierigkeiten zu bieten, auf die Besprechung eines einzelnen möglichst einfach gewählten Falles beschränken (bei der dann die allgemeine Sachlage von selbst hervorleuchtet).

Dabei sei folgende Bemerkung vorausgeschickt. Ich habe die genannte Frage wiederholt in Fachkreisen gestellt und habe, weil die Betrachtung des einseitigen Polyeders zunächst zu gewissen Unstimmigkeiten führt, dann wohl die Antwort erhalten: besagtes Polyeder möge für die Bestimmung der zum Diagramm gehörigen Selbstspannungen bedeutungslos sein. Wer an den organischen Zusammenhang der geometrischen Wahrheiten glaubt, wird eine solche Ansicht von vornherein nicht teilen können. Die folgenden Betrachtungen zeigen, daß die Sache in der Tat ganz anders liegt.

4. Das ebene Diagramm, welches wir als Beispiel wählen, besteht einfach aus den 15 Stäben, welche 6 Knotenpunkte (die $I, II, \dots, VI$ genannt werden sollen) verbinden. Der Übersichtlichkeit wegen mögen wir uns die Punkte so gewählt denken, daß $I, \dots, V$ die Ecken eines regulären Fünfecks bilden, in dessen Mittelpunkt VI liegt. Wir haben dann nebenstehende Figur.

Fig. 1.

Dieses Diagramm läßt sich nun folgendermaßen zu einer geschlossenen, aus 10 Dreiecksflächen bestehenden und dabei „einseitigen“ Hilfsfläche ausgestalten.

Wir verbinden zunächst die Ecken $I \dots V$ durch die 5 Dreiecke:

$I III III, II III IV, III IV V, IV V I, V I II,$

wie es in der nebenstehenden Figur angedeutet ist; diese 5 Dreiecke bilden in ihrer Aufeinanderfolge ein übrigens wohlbekanntes Beispiel eines in sich zurücklaufenden Moebius-schen Blattes (bei dem man durch Umlaufung von der oberen Seite eines der 5 Dreiecke auf die untere Seite desselben Dreiecks kontinuierlich hinüberkommt).

Sodann verbinden wir den Punkt VI mit den „freien“ Kanten dieses Blattes, d. h. mit den Kanten

Fig. 2.

I III, III V, V II, II IV, IV I

durch die 5 Dreiecke:

I III VI, III V VI, V II VI, II IV VI, IV I VI,

womit die Konstruktion unserer Hilfsfläche vollendet ist.

Fig. 3.

Da unsere Hilfsfläche aus lauter Dreiecken besteht, so hat es keine Schwierigkeit das allgemeinste Raumpolyeder zu konstruieren, dessen Orthogonalprojektion sie ist. Wir errichten einfach in den Punkten $I, II, \dots, VI$ gegen die Zeichenebene beliebige Perpendikel, deren Endpunkte $1, 2, \dots, 6$ heißen sollen, und verbinden die Raumpunkte $1, 2, \dots, 6$ genau so durch Dreiecke, wie es eben zwecks Konstruktion der Hilfsfläche mit den Punkten $I, II, \dots, VI$ geschehen war. Das so entstehende Polyeder hängt, der Willkür der 6 Perpendikel entsprechend, von 6 Konstanten ab. Daß es einseitig ist, folgt aus der Einseitigkeit der Dreieckszone Fig. 2. Übrigens stellt es gerade dasjenige einfachste Beispiel einer einseitigen Fläche vor, welches Moebius seinerzeit selbst gegeben hat.

Betrachten wir nun die *statischen Eigenschaften* unseres Diagramms.

a) Aus der allgemeinen Abzählung folgt, daß es $(15 - 2 \cdot 6 + 3) = 6$ linear unabhängige Selbstspannungen zulassen muß, und in der Tat ist es sehr leicht, solche 6 Selbstspannungen zu konstruieren. Ich gebe als Beispiel die folgenden:

Fig. 4.

Nr. 1 ... 5: nur 3 der von VI auslaufenden Stäbe, 2 Diagonalen und eine Fünfecksseite sind gespannt; vergl. die nebenstehende Figur.

Nr. 6: längs der 5 von VI auslaufenden Stäbe herrschen gleiche Spannungen, ebenso längs der 5 Diagonalen des Fünfecks. Vergl. die Figur.

Fig. 5.

Diese Beispiele von Selbstspannungen können auch ohne weiteres aus Maxwellschen Polyedern abgeleitet werden: jede der Figuren 4 ist als Projektion eines Tetraeders anzusehen, Figur 5 als Projektion einer auf einem überschlagenen Fünfeck errichteten Pyramide.

b) Andererseits überzeugt man sich, daß die allgemeinste zu unserem Diagramm gehörige Selbstspannung keineswegs aus unserem ein-

seitigen Polyeder in Maxwellscher Weise abgeleitet werden kann. Schon die Anzahlen stimmen nicht. Denn die ∞^6 Polyeder würden nur ∞^3 Selbstspannungen liefern. Aber man bemerkt bald, daß *unser Polyeder überhaupt nicht in Maxwellscher Weise benutzt werden kann*. Es war doch der Ausgangspunkt unserer Betrachtung in Nr. 1, daß jeder Eckpunkt unseres Polyeders *in bestimmtem Sinne* umlaufen werden sollte. Zu dem Zwecke mußten wir die beiden „Seiten“ der Polyederfläche unterscheiden und für die eine Seite den Uhrzeigersinn der Umlaufung verabreden. Dies ist hier, weil wir ein einseitiges Polyeder haben, nicht möglich. Setzen wir willkürlich fest, daß die Ecke (i) des Polyeders in bestimmtem Sinne umlaufen werden soll, und verschieben diesen Umlaufungssinn über die Fläche des Polyeders hin, so erhalten wir bei geschickter Wahl des Weges für die Ecke (i) den entgegengesetzten Umlaufungssinn. *Die Vorzeichen der Kraftkomponenten in den Formeln (3) lassen sich also nicht fixieren*, oder, wenn man lieber will: nachdem man sie unter Festsetzung eines bestimmten Umlaufungssinnes für den Punkt (i) angenommen hat, ergibt sich hinterher, daß *ebensowohl die entgegengesetzten Vorzeichen zu gelten haben*.

c) Es muß interessant sein, diese Verhältnisse am reziproken Diagramm zu verfolgen. In der Tat: da wir ein Polyeder haben, so haben wir auch (gemäß den Formeln (5)) ein reziprokes Diagramm. Dieses muß dann so beschaffen sein, daß, wenn wir eine Seite desselben als einen längs der entsprechenden Seite des ursprünglichen Diagramms herrschenden *Zug* deuten, nach Durchlaufung des ganzen Diagramms herauskommt, daß sie *ebensowohl als Maß eines längs der korrespondierenden Seite des ursprünglichen Diagramms wirkenden Drucks* zu gelten hat!

5. In die solcherweise zunächst entstehende Verwirrung bringen wir Ordnung, indem wir unser einseitiges Polyeder (wie ich es bei einseitigen Flächen in früheren Arbeiten wiederholt getan habe*), und wie es übrigens heute allgemein geläufig ist) *doppelt überdeckt denken* und somit durch eine *zweiseitige* Fläche der doppelten Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ersetzen, deren Ecken, Kanten und Flächen paarweise mit den Ecken, Kanten und Flächen des einseitigen Polyeders zusammenfallen. Unser ebenes Diagramm, bez. die mit ihm verbundene „Hilfsfläche“, ist eine *Doppelprojektion* dieses zweiseitigen Polyeders, und wir erhalten, wenn wir von diesem Polyeder im Sinne von Nr. 1 Gebrauch machen, für jeden Stab unseres Diagramms einen Zug und einen Druck, die sich

*) Siehe z. B. meine Schrift „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihre Integrale“, Leipzig 1882.

gegenseitig aufheben; wir erhalten für unser Diagramm eine *Nullspannung*. Wir haben keinen Widerspruch mehr, sondern etwas in sich Klares, das aber zunächst enttäuscht: die ∞^6 einseitigen Polyeder, als deren Projektion unser Diagramm angesehen werden kann, ergeben für dieses, gemäß der neuen Auffassung, lauter Nullspannungen.

Und doch ist der Ansatz gewonnen, durch dessen Verfolg wir nun zur positiven Erledigung des Selbstspannungsproblems für unser Diagramm kommen. Mögen wir vorab verabreden, die Seitenflächen unseres einseitigen Polyeders, die vom Eckpunkte (i) auslaufen, folgendermaßen durch Gleichungen zu bezeichnen:

$$(9) \quad z = \alpha_k^i x + \beta_k^i y + \gamma_k^i.$$

Übrigens aber wollen wir jetzt das *allgemeinste* zweiseitige Polyeder (mit der doppelten Ecken-, Kanten- und Flächenzahl) konstruieren, dessen Doppelprojektion unser Diagramm, bez. die zu ihm gehörige Hilfsfläche ist, dessen Ecken, Kanten und Seitenflächen nun aber nicht mehr paarweise zusammenzufallen brauchen!

Besagte Konstruktion machen wir in einfachster Weise, indem wir den 6 Knotenpunkten $I, II, \dots, VI$ unseres Diagramms je zwei, beliebig über ihnen gelegene Raumpunkte zuordnen und die so hervorkommenden 12 Punkte in zweckmäßiger Weise durch Dreiecksflächen verbinden.

Folgendermaßen etwa. Mögen unsere Raumpunkte in nicht mißzuverstehender Weise mit

$$\begin{array}{cccccc} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \\ 1'' & 2'' & 3'' & 4'' & 5'' & 6'' \end{array}$$

bezeichnet werden. Wir konstruieren dann vor allen Dingen eine Aufeinanderfolge von 10 Dreiecken

$$\begin{array}{l} (1' 2'' 3'), (2'' 3' 4''), (3' 4'' 5'), (4'' 5' 1''), (5' 1'' 2'), \\ (1'' 2' 3''), (2' 3'' 4'), (3'' 4' 5''), (4' 5'' 1'), (5'' 1' 2''), \end{array}$$

die eine Ringfläche mit zwei Rändern vorstellt, welche beziehungsweise aus folgenden fünf Kanten bestehen:

$$\begin{array}{l} \text{erster Rand: } (1' 3'), (3' 5'), (5' 2'), (2' 4'), (4' 1'), \\ \text{zweiter Rand: } (1'' 3''), (3'' 5''), (5'' 2''), (2'' 4''), (4'' 1''). \end{array}$$

Und nun gehen wir zu einem geschlossenen Polyeder über, indem wir von $6'$ aus auf den ersten Rand und von $6''$ aus auf den zweiten Rand eine geschlossene Pyramide aufsetzen.

Jedes so hervorkommende (zweiseitige) Polyeder wollen wir weiterhin ein *Doppelpolyeder* nennen. Es gibt immer zwei Ebenen des Doppel-

polyeders, welche der Ebene (9) des einseitigen Polyeders entsprechen; diese mögen durch folgende Gleichungen bezeichnet sein:

$$(10) \quad \begin{cases} z = a'_k x + b'_k y + c'_k, \\ z = a''_k x + b''_k y + c''_k. \end{cases}$$

Wir staten nunmehr, gemäß der Verabredung von Nr. 1, die sämtlichen Ecken des Doppelpolyeders mit einem bestimmten Umlaufungsinne aus. Möge dabei, was den Eckpunkt (i') angeht, auf die Seitenfläche

$$z = a'_k x + b'_k y + c'_k,$$

die andere

$$z = a'_i x + b'_i y + c'_i$$

folgen, so wird umgekehrt, was den Eckpunkt (i'') betrifft, die Ebene

$$z = a''_i x + b''_i y + c''_i$$

der Ebene

$$z = a''_k x + b''_k y + c''_k$$

vorangehen.

Nach diesen Vorbereitungen werden wir nun, ganz im Sinne von Nr. 1, aus unserem Doppelpolyeder für das vorgegebene Diagramm eine Selbstspannung ableiten. Es genügt wieder, die Komponenten der Kraft anzugeben, welche im Punkte (i) des Diagramms entlang der Kante (kl) wirken. Insofern (i) Projektion von (i') ist, erhalten wir nach den Formeln (3) die Kraftkomponenten:

$$(11') \quad b'_k - b'_i, \quad a'_i - a'_k$$

insofern aber (i) Projektion von (i'') ist, müssen wir nach der grade gemachten Bemerkung die Vorzeichen umkehren und haben als Kraftkomponenten:

$$(11'') \quad b''_i - b''_k, \quad a''_k - a''_i.$$

Wir haben also insgesamt längs unserer Kanten (kl) im Punkte (i) angreifend die Kraft:

$$(12) \quad X_{kl}^{(i)} = b'_k - b'_i + b''_i - b''_k, \quad Y_{kl}^{(i)} = a'_i - a'_k + a''_k - a''_i.$$

Damit haben wir für unser Diagramm wirklich eine Selbstspannung konstruiert, — jedem unserer Doppelpolyeder entsprechend eine. Und die Nullspannung, die wir aus dem einseitigen Polyeder ableiteten, ordnet sich hier ein. Denn es ist klar, daß die gerade hingeschriebenen Werte der $X_{kl}^{(i)}$, $Y_{kl}^{(i)}$ sämtlich Null werden, wenn die Ebenen a' , b' , c' mit den Ebenen a'' , b'' , c'' durchweg in die Ebenen (9) zusammenfallen, d. h. wenn unser Doppelpolyeder in die Doppelüberdeckung eines einseitigen Polyeders übergeht.

6. Die Behauptung wird nun sein, daß mit den Formeln (12) das Spannungsproblem unseres Diagramms tatsächlich erledigt ist. Zu dem Zwecke wird zweierlei zu zeigen sein:

1) daß jede Selbstspannung des Diagramms durch Formeln (11) gewonnen werden kann,

2) wie die Differenz zwischen der Zahl der Doppelpolyeder (∞^{12}) und der Zahl der Selbstspannungen (∞^6) zu erklären ist.

Beides erledigt sich auf Grund der voraufgeschickten Betrachtungen in ganz knapper Form.

Ad 1). Es wird hier zweckmäßig sein, neben das vorgegebene Diagramm und seine Hilfsfläche, welche Doppelpprojektionen des Doppelpolyeders sind, nunmehr ein Doppeldiagramm, bez. eine Doppelhilfsfläche zu stellen, die als einfache Projektionen unseres Polyeders definiert sein sollen. Jeder Kante des ursprünglichen Diagramms entsprechen zwei übereinanderliegende Kanten des Doppeldiagramms, und wenn man für die Kante (kl) des ursprünglichen Diagramms die Formel (12) hat, so hat man für die beiden entsprechenden Kanten des Doppeldiagramms bez. die Formeln (11') und (11''). Auf unser Doppeldiagramm, bez. die mit ihm verbundene Hilfsfläche, finden nun unmittelbar die Entwicklungen unserer Nr. 2 Anwendung. Ist doch diese Hilfsfläche eine zweiseitige Fläche vom Geschlecht $p = 0$. Jede zu dem Doppeldiagramm gehörige Selbstspannung wird also in Maxwellscher Weise durch eines unserer Doppelpolyeder (und damit durch ∞^3 unserer Doppelpolyeder) geliefert. Es bleibt zu überlegen, daß man jede auf das ursprüngliche Diagramm bezügliche Selbstspannung in eine Selbstspannung des Doppeldiagramms verwandeln kann. Dies aber geht gewiß in der Weise, daß man die zur einzelnen Kante des ursprünglichen Diagramms gehörige Spannung zu gleichen Hälften auf die beiden über ihr liegenden Kanten des Doppeldiagramms verteilt. Dies hat zur Folge, daß die Kräfte (11') und (11'') einander gleich sind, und von hier aus kann man durch geschickte Wahl der drei zur Verfügung stehenden additiven Konstanten erreichen, daß allgemein

$$(13) \quad a_k'^i = -a_k''^i, \quad b_k'^i = -b_k''^i, \quad c_k'^i = -c_k''^i.$$

Man kann also zu jeder Selbstspannung des ursprünglichen Diagramms nicht nur überhaupt ein Doppelpolyeder konstruieren, sondern insbesondere ein solches, das hinsichtlich der XY -Ebene sein eigenes Spiegelbild ist.

Ad 2) ergibt sich volle Aufklärung, indem wir auf den Begriff der Addition zweier zu demselben Diagramm (i. e. derselben Hilfsfläche) gehörigen Polyeder zurückgehen (Nr. 2). Es ist ganz klar, daß die Formeln (12) ungeändert bleiben, wenn man zu dem gewählten Doppel-

polyeder ein beliebiges einseitiges Polyeder unserer Polyederschar addiert, also die Ebenen (10) durch folgende ersetzt:

$$(14) \quad \begin{cases} z = a_k^i x + b_k^i y + c_k^i + \alpha_k^i x + \beta_k^i y + \gamma_k^i, \\ z = a_k''^i x + b_k''^i y + c_k''^i + \alpha_k^i x + \beta_k^i y + \gamma_k^i. \end{cases}$$

Hier enthalten die α_k^i , β_k^i , γ_k^i im ganzen 6 willkürliche Parameter und so bestimmen also jedesmal ∞^6 Doppelpolyeder in unserem Diagramm dieselbe Selbstspannung. Dies also ist die Bedeutung der einseitigen Flächen für die Selbstspannungen unseres Diagramms, daß sie gestatten, alle Doppelpolyeder, welche dieselbe Selbstspannung liefern, auseinander abzuleiten.

Unter den Doppelpolyedern, welche dieselbe Selbstspannung liefern, findet sich dann in der Tat immer eines, welches hinsichtlich der XY -Ebene sich selbst symmetrisch ist. Man braucht nur in den Formeln (14)

$$(15) \quad \alpha_k^i = -\frac{1}{2}(a_k^i + a_k''^i), \quad \beta_k^i = -\frac{1}{2}(b_k^i + b_k''^i), \quad \gamma_k^i = -\frac{1}{2}(c_k^i + c_k''^i)$$

zu setzen.

7. Von der Menge der Einzelbemerkungen, die sich hier aufdrängen, sei nur folgende hervorgehoben. Ich will die Z -Ordinaten, die zu den Polyedereckpunkten (i') und (i'') des Doppelpolyeders gehören, einen Augenblick z_i' und z_i'' nennen, während die Z -Koordinate des entsprechenden Eckpunktes der einseitigen Fläche ξ_i heißen mag. Die sechs Größen ξ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) können beliebig angenommen werden. Andererseits verwandelt sich z_i' gemäß (14) in $z_i' + \xi_i$, z_i'' in $z_i'' + \xi_i$. Die Differenz $z_i' - z_i''$ ist also das bei der Umwandlung Unveränderliche. Wir werden sagen, daß alle und nur diejenigen Doppelpolyeder für unser Diagramm je dieselbe Selbstspannung ergeben, deren beide Schalen an den Stellen 1, 2, $\dots$, 6 gleich stark auseinander klaffen.

Übrigens verweise ich wieder darauf, daß alle diese Angaben über die Doppelpolyeder in den zugehörigen reziproken Diagrammen eine charakteristische Deutung finden müssen.

Ich stelle mir schließlich die Aufgabe, die besonderen Fälle der Selbstspannung, auf welche sich Fig. 4 und 5 beziehen, in unsere allgemeine Betrachtung einzuordnen.

Wir hatten als Maxwellsches Polyeder im Falle 4 ein Tetraeder, im Falle 5 eine sich überschlagende fünfseitige Pyramide. Wir wollen, was frei steht, dieses Tetraeder mit seiner Kante $\overline{34}$, bez. die Pyramide mit ihrer Grundebene $\overline{12345}$ auf die XY -Ebene aufsetzen. Wir spiegeln jetzt beide Polyeder an der XY -Ebene und ersetzen so das Tetraeder durch ein Doppeltetraeder, die Pyramide durch eine Doppelpyramide. Die so entstehenden Doppelpolyeder ergeben dann für unser Diagramm im

Sinne der Formeln (12) gleichfalls Spannungen vom Typus der Figuren 4 und 5.

Es ist die Frage, wie wir diese Spannungen, bez. Doppelpolyeder aus der allgemeinen Konstruktionsvorschrift der Nr. 5 herausbringen. Bei der Doppelpyramide ist die Antwort unmittelbar. Wir werden die z'_i, z''_i für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ gleich Null nehmen und übriges $z'_6 = -z''_6$ setzen. In dem anderen Falle verfähre ich so. Ich lege durch die Kante *III, IV* des Diagramms irgend zwei Ebenen, welche zur *XY*-Ebene spiegelbildlich liegen. Nun nehme ich $1'', 2', 3', 4', 5', 6'$ in der einen dieser Ebenen, $1', 2'', 3'', 4'', 5'', 6''$ in der anderen (vertikal über bez. unter *I, II, ..., VI*) an (wobei natürlich $3'$ und $3''$, $4'$ und $4''$ zusammenfallen). Führt man für diesen Fall die Konstruktion des Doppelpolyeders gemäß den Angaben von Nr. 5 durch, so erhält man in der Tat zwei Tetraeder, die so liegen, wie vorhin (nur daß die Spitze $6'$ des ersten Tetraeders noch in der Grundfläche $1'', 3'', 4''$ des zweiten liegt, und umgekehrt, was eine für die Bestimmung der Selbstspannung unseres Diagramms unwesentliche Spezialisierung ist).

Göttingen, den 31. März 1909.