This article was downloaded by: [University of Leeds]

On: 17 May 2015, At: 09:03

Publisher: Taylor & Francis

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK

Scandinavian Actuarial Journal

Publication details, including instructions for authors and subscription information:

<http://www.tandfonline.com/loi/sact20>

Etudes sur la théorie et la pratique des assurances (autres que l'Assurance Vie)

Carl Burrau

Published online: 22 Dec 2011.

To cite this article: Carl Burrau (1921) Etudes sur la théorie et la pratique des assurances (autres que l'Assurance Vie), Scandinavian Actuarial Journal, 1921:1, 2-22, DOI: [10.1080/03461238.1921.10405320](https://doi.org/10.1080/03461238.1921.10405320)

To link to this article: <http://dx.doi.org/10.1080/03461238.1921.10405320>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Taylor & Francis makes every effort to ensure the accuracy of all the information (the "Content") contained in the publications on our platform. However, Taylor & Francis, our agents, and our licensors make no representations or warranties whatsoever as to the accuracy, completeness, or suitability for any purpose of the Content. Any opinions and views expressed in this publication are the opinions and views of the authors, and are not the views of or endorsed by Taylor & Francis. The accuracy of the Content should not be relied upon and should be independently verified with primary sources of information. Taylor and Francis shall not be liable for any losses, actions, claims, proceedings, demands, costs, expenses, damages, and other liabilities whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with, in relation to or arising out of the use of the Content.

This article may be used for research, teaching, and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, redistribution, reselling, loan, sub-licensing, systematic supply, or distribution in any form to anyone is expressly forbidden. Terms & Conditions of access and use can be found at <http://www.tandfonline.com/page/terms-and-conditions>

Etudes sur la théorie et la pratique des assurances (autres que l'Assurance Vie).

Par Carl Burrau.

Docteur ès sciences, Directeur du Bureau de Statistique
du Groupe Norske Lloyd.

I. Introduction.

Je ne pense pas provoquer de protestations si je commence par souligner que le côté théorique de l'assurance vie peut-être considéré comme un édifice achevé auquel il ne manque encore, çà et là, que les paraments artistiques. Personne ne pourra non plus me contredire si je prétends que l'assurance vie a prodigieusement profité du vigoureux développement qui a été donné à son côté théorique.

Les autres branches d'assurance puiseraient des avantages semblables de l'application de la théorie dans la pratique. A ce sujet, il y a bien entente complète dans le cercle des actuaires, mais d'autre part il existe — ainsi que je vais le prouver par quelques exemples — des doutes à cet égard.

Nous autres actuaires avons le devoir de dissiper ces doutes, d'entreprendre le travail de développement du traitement théorique des autres branches d'assurance et de mettre en usage la théorie dans la pratique. Et si nous, actuaires de Scandinavie (et en somme de tout l'ancien monde) ne désirons pas être surpassés par l'Amérique, il n'est que temps de s'occuper de cette question.

L'Amérique possède déjà une Association des Actuaires fonctionnant dans les assurances »Accidents» qui compte près de 200 membres et a déjà publié 5 volumes d'études dans lesquels de très précieux travaux ont vu le jour. Ceci devrait exciter notre désir d'en faire autant. Tout d'abord nous devons repousser des raisonnements comme, par exemple celui

qui anime le passage suivant du journal d'assurance suédois »Gjallarhornet» du 5 Avril 1919:

»Pourquoi ne peut-on nous laisser la paix? Pourquoi devrions-nous avoir besoin de théoriser et pourquoi chercherions-nous à enchaîner l'assurance Incendie avec des formules mathématiques?

Pour un assureur incendie il est presque inconcevable qu'on puisse théoriser sur quelque chose d'aussi essentiellement pratique et vivant que l'assurance incendie.

Mais cette théorie nous vient aussi des mathématiciens de l'assurance Vie. Cette circonstance est suffisamment caractéristique. L'assurance incendie n'a jamais eu la base statistique fixe de l'assurance vie et elle ne pourra jamais l'avoir ... (L'assurance) est une entreprise commerciale et doit demeurer telle, afin de pouvoir rendre service aux exigences de la vie pratique qui change constamment et qui ne pourra jamais être soumise aux formules théoriques et mathématiques.»

Mais, si ce raisonnement cherche à dresser une opposition insoluble entre les exigences changeantes de la vie et les mathématiques, c'est qu'il n'est dû qu'à une ignorance complète du but et des ressources de celles-ci. Les formules mathématiques ne sont d'ailleurs que la plus rigoureuse et la plus claire expression des idées, dont la substance est faite de la vie même. C'est la vie elle-même qui a inspiré la création de l'idée de la probabilité, celle-ci à son tour a créé la base de la prime nette, base sur laquelle repose nécessairement l'assurance, et ce, qu'elle puisse ou non être fixée en chiffres à l'aide de statistiques.

Pour un assureur (qui ne veut pas limiter sa tâche à la chasse aux commissions ou autres profits), il est incompréhensible que l'on puisse désirer exclure l'opération mathématique jointe aux idées émanant de la vie ordinaire, en prétendant simplement que l'assurance est spécialement pratique.

Voilà pourquoi ceux qui adoptent le raisonnement ci-dessus ont tout à fait tort en jugeant inutiles les formules mathématiques qui ne sont pas autre chose que la formulation claire et l'opération purement logique avec les idées inspirées par la vie pratique elle-même. Malheureusement il

est vrai que la fixation de la prime pure de l'assurance Incendie au moyen de chiffres statistiques est excessivement difficile à obtenir, mais, plus elle est difficile à fixer et plus la véritable prime pure est indéterminable, plus il est précisément essentiel d'étudier son *incertitude*. Et à cet effet, nous possédons dans le calcul des probabilités et la doctrine plus moderne qui en est dérivée, la »statistique mathématique«, un appareil entièrement perfectionné qu'il est de notre devoir d'utiliser de notre mieux.

Pour l'étude de l'incertitude, nous devons notamment à *Gauss* l'idée de l'erreur moyenne (en anglais: standard deviation). Cette idée n'a joué qu'un rôle extrêmement réduit et caché dans les mathématiques de l'assurance vie — un rôle certainement par trop réservé; pensons par exemple à *WITTSTEIN* qui se plaint de ce que son »Theorie des Risikos« n'a jamais trouvé d'application en pratique — c'est pourquoi l'attaque contenue dans le raisonnement ci-dessus n'est pas dépourvue d'une certaine justesse en tant que dirigée contre les mathématiques de l'assurance vie, parce-que ce ne sont pas les mathématiques de l'assurance vie qui peuvent nous aider ici. Nous devons créer quelque chose de complètement nouveau et ce nouveau ne peut-être créé qu'en contact intime avec la pratique, alors seulement cela pourra être profitable.

II. L'assurance et le hasard.

Mon intuition est que l'idée de l'erreur moyenne est toute désignée pour figurer au premier plan à la base théorique des assurances (en dehors de l'assurance vie). Pour commencer, j'utiliserai cette notion pour éclaircir les rapports entre le hasard et l'assurance. Ces derniers sont le contraire l'un de l'autre, mais, comme pour le froid et le chaud, la lumière et l'obscurité, le bien et le mal, il y a une gradation régulière et une transition continue. Le traitement des phénomènes de ce genre n'est possible que lorsqu'on a une échelle numérique à l'aide de laquelle chaque point de la transition continue peut-être déterminé. Lorsqu'il s'agit

du chaud et du froid, nous avons une telle échelle: le thermomètre. Pour le phénomène hasard et assurance, nous pouvons créer un instrument numérique semblable: *le rapport entre l'erreur moyenne d'une prime et la prime elle-même*. Pour une quantité homogène d'assurances indépendantes les unes des autres il est aisé de le montrer. Par exemple pour des quantités différentes d'assurances de 1 000 frs. chacune avec la probabilité de sinistre de $\frac{1}{1000}$, et par conséquents la prime nette de 1 fr., on obtiendra ce qui suit:

Nombre d'assurances.	Prime nette.	Erreur moyenne.	K.
1	1	31,6	31,6
2	2	44,7	22,3
10	10	99,9	10
100	100	316	3,16
1 000	1 000	1 000	1
2 000	2 000	1 414	0,707
5 000	5 000	2 236	0,447
10 000	10 000	3 161	0,316

Nous voyons clairement que la quantité K , c'est-à-dire le rapport entre l'erreur moyenne de la prime et la prime elle-même, est un instrument permettant de mesurer — d'une façon tout à fait analogue à l'usage du thermomètre pour l'étude de la chaleur — à quel point nous nous trouvons sur l'échelle, entre le hasard et l'assurance. A la première ligne du tableau ci-dessus nous avons le pur hasard, reconnaissable par sa condition défavorable: la prime est grévée d'une erreur moyenne de plus de 30 fois la prime elle-même. A la dernière ligne, apparaissent les conditions sûres et rassurantes de la Compagnie d'assurance. Où veut-on fixer la transition ? c'est une question de tempérament, mais je pense que nous serons rapidement d'accord, qu'on devra exiger un chiffre inférieur à 1, de préférence aussi quelque chose au-dessous de 0,5.

Ce qui précède n'est exposé que pour donner une idée de la profonde importance qu'a pour l'assurance, la notion de l'erreur moyenne. Mais si nous devons passer à l'utilisation directe de cette notion dans les assurances (autres que l'assurance vie), des points essentiels de la théorie doivent être améliorés. Quelques-uns d'entre eux, pour lesquels la

théorie est défectueuse ont été mis à profit par M. D. F. LUNDGREN comme moyen d'attaque, dans une discussion à l'association des Assureurs de Stockholm le 3 Décembre 1919. suivant le »Gjallarhornet», il s'est exprimé comme suit en cette occasion:

»En somme, il semble que les mathématiciens aient perdu de vue que les cas de sinistres en assurance incendie sont spécialement compliqués et qu'ils n'ont pas la moindre ressemblance avec les sinistres de l'assurance Vie. Pour cette dernière, le montant du sinistre est fixé sans autre, l'assuré meurt et on paie la somme d'assurance. En assurance vie, il n'existe pas de risques communs. Ceci est par contre propre à l'assurance-incendie. Dans bien des cas on ne connaît même pas la cohésion des risques. La réassurance est en général un palliatif au moyen duquel on cherche à se préserver des surprises. Après tout, la théorie mathématique des risques n'a ni ne peut donner de résultat positif».

J'espère que ce qui suit vous prouvera que ce critique a tort dans sa conclusion pessimiste que la théorie ne peut avoir d'utilité du tout. Mais d'autre part, il a raison de prétendre que les formules pour l'erreur moyenne présentées jusqu'à présent dans les manuels sont inutilisables dans les branches d'assurance dans lesquelles on peut avoir à faire à des sinistres partiels, où, en cas de sinistre, il n'est pas toujours question du paiement du montant de l'assurance v , mais souvent du paiement d'un certain pourcentage de ce montant $\alpha \cdot v$. De même, le critique a raison de prétendre que la cohésion entre les assurances (danger de conflagration) doit être étudiée. Mais, j'ai précisément exposé dans »I og Vi» de Juin 1919, un essai d'amélioration de ces deux points et je tâcherai, ci-après, de développer ces idées.

III. Erreur moyenne pour une assurance isolée.

Une somme d'assurance v au taux net de prime q donne la prime nette $q \cdot v$. D'après l'exposé des manuels, l'erreur moyenne de cette prime nette est $v \cdot \sqrt{q(1-q)}$. Cette expression n'est cependant exacte que s'il n'est question que

de «sinistres» entraînant le paiement intégral de la somme v , ou qu'il n'y a pas de sinistre («non-sinistre»), donc, paiement o . Fixons par exemple le nombre des cas isolés à $n \cdot \frac{1}{q}$. Chacun de ces cas isolés produit un encaissement se montant à $q \cdot v$, tandis que les débours v et o se présentent dans un tel mélange que (pour des grandes valeurs de n), v se présente n fois, o le reste: $\left(\frac{1}{q} - 1\right) \cdot n$ fois. Nous trouvons maintenant par définition le carré de l'erreur moyenne être la somme des carrés de toutes les différences entre les débours et les encaissements divisée par le nombre total de ces différences. L'erreur moyenne étant désignée λ_2 , nous obtenons:

$$\begin{aligned}\lambda_2^2(qv) &= \left((v - qv)^2 \cdot n + (o - qv)^2 \left(\frac{1}{q} - 1\right) n\right) : \left(n \cdot \frac{1}{q}\right) = \\ &= v^2 q(1 - q)\end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule connue des manuels pour l'erreur moyenne et pour le nombre caractéristique K , défini ci-dessus, nous obtiendrons donc:

$$K = \frac{\lambda_2(vq)}{vq} = \frac{v \sqrt{q(1-q)}}{vq} = \sqrt{\frac{1}{q} - 1} \quad (1)$$

Il est aisé ensuite d'opérer la modification nécessaire, ainsi qu'il est dit plus haut, par l'assurance comportant des sinistres partiels.

Nous supposons toujours une assurance isolée de la somme v , prime nette $q \cdot v$. Des cas isolés, toujours au nombre de $n \cdot \frac{1}{q}$ donnent maintenant les débours $\alpha_i v$, où α_i peut comprendre chaque valeur entre o et 1 , tous deux inclus. En incluant le zéro, nous parvenons à traiter tous les cas identiquement et pour l'erreur moyenne carrée nous obtenons donc:

$$\lambda_2^2(qv) = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{q}} \cdot \sum_1^{n \cdot \frac{1}{q}} (\alpha_i \cdot v - qv)^2.$$

La définition de la prime nette exactement suffisante pour la couverture des sinistres donnera :

$$n \cdot \frac{1}{q} \cdot q \cdot v = \sum_1^{n \cdot \frac{1}{q}} \alpha_i v \text{ ou } n = \sum_1^{n \cdot \frac{1}{q}} \alpha_i$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^2(qv) &= \frac{q \cdot v^3}{n} \Sigma(\alpha_i^2 - 2q\alpha_i + q^2) = \\ &= v^3 q \cdot \left(\frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha} - 2q + q^2 \frac{1}{q} \right) = v^3 q \left(\frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha} - q \right) \end{aligned}$$

$$K = \frac{\lambda_2(qv)}{qv} = \sqrt{\frac{1}{q} \cdot \frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha} - 1}. \quad (2)$$

Il apparaît donc que la modification à apporter en considération du fait que le cas de sinistre ne comporte pas simplement le paiement de la somme d'assurance v , mais peut aussi entraîner le paiement de $\alpha \cdot v$ où α peut comprendre chaque valeur entre 0 et 1 consiste en la multiplication en formule (1) du nombre $\frac{1}{q}$ par $\frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha}$.

La statistique des sinistres devra donc être disposée de façon à pouvoir montrer ce nombre pour chaque genre particulier d'assurance. Il sera d'un grand intérêt pour chaque Compagnie de suivre les variations de ce nombre dans ses propres affaires.

IV. Exemples de l'application de la formule (2).

Exemple 1^{er}, Assurance incendie.

La littérature se montre très avare de publications contenant des statistiques pouvant contribuer à l'éclaircissement de la valeur du nombre $\frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha}$ pour les différents genres d'assurance. Pour ce qui concerne l'assurance incendie, une seule de ces publications m'est connue, c'est celle de A. W. WITHNEY dans les publications du congrès des Actuaires de Vienne.

Les chiffres principaux en sont reproduits ci-dessous. Ils donnent des indications sur le nombre de sinistres ayant attribué à α , les valeurs de 0—10 %, 10—20 %, etc.:

α %	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
0—10	8 293	7 172	9 370	6 724	8 627	8 360	5 413	4 264
10—20	576	915	337	965	502	658	791	806
20—30	326	425	144	580	201	284	539	668
30—40	215	310	85	429	130	178	431	553
40—50	139	221	42	324	93	114	360	507
50—60	97	180	16	260	73	85	309	507
60—70	69	147	4	214	60	64	273	530
70—80	49	123	2	183	53	57	237	553
80—90	42	98	0	167	48	68	209	599
90—100	194	409	0	154	213	132	1 438	1 013
	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000

Les 8 colonnes de chiffres correspondent aux 8 genres de risques incendie ci-après et pour chacun d'eux, cette statistique permet de calculer la valeur de $\frac{\sum \alpha^2}{\sum \alpha}$; en voici le résultat:

	$\frac{\sum \alpha^2}{\sum \alpha}$
I Bâtiments industriels	0,37
II Leur contenu	0,40
III Bâtiments en briques	0,11
IV Leur contenu	0,45
V Maisons d'habitation	0,38
VI Leur contenu	0,35
VII Risques spéciaux	0,68
VIII Leur contenu	0,66

De cette façon nous aurons au moins un indice du niveau auquel se trouve cette valeur. Le calcul d'après la formule (2) donne le tableau suivant au sujet de K pour des valeurs diverses de q et $\frac{\sum \alpha^2}{\sum \alpha}$:

K	$\frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha} = 0,2$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$q =$						
1 $\frac{0}{100}$	14	17	20	22	24	26
1 $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{100}$	12	14	16	18	20	22
2 $\frac{0}{100}$	10	12	14	16	17	19
3 $\frac{0}{100}$	8	10	12	13	14	15
5 $\frac{0}{100}$	6	8	9	10	11	12
7 $\frac{0}{100}$	5	7	8	8	9	10

Exemple 2^{ème}, Assurance contre les accidents.

Par des voies statistiques, qu'il serait déplacé de mentionner ici, j'ai trouvé que la prime nette pure pour la classe de risque la plus basse dans l'assurance »Individuelle», contre les accidents était de 0,00024 pour le cas de Mort et 0,00032 pour les cas d'Invalidité permanente. Comme l'assurance du cas de Mort à la suite d'accident est un genre d'assurance pour lequel ne peut être question d'indemnité partielle, mais seulement du paiement total de la somme assurée (α toujours égal à 0 ou à 1) on obtient pour ce cas $\frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha} = 1$. Pour per-

mettre la détermination de $\frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha}$ pour l'assurance de l'Invalidité, une statistique des différents pourcentages l'Invalidité sur un grand nombre de cas, est nécessaire. Les statistiques de ce genre ne se trouvent pas souvent dans la littérature. Cependant, dans la publication annuelle du Service de Statistique Danois pour l'Assurance contre les Accidents du Travail on trouve un rapport individuel de chaque cas d'accident comprenant également le pourcentage d'invalidité fixe (accordé). Comme il s'agit de 6- à 700 cas pour les risques industriels et environ 500 cas pour les risques agricoles, par année, ces chiffres paraissent suffisants pour servir de base à la fixation rationnelle de $\frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha}$. Le résultat se trouve être

de 0,30 tant pour les risques industriels que pour les risques agricoles et rien n'empêche — à défaut d'autre donnée sûre qui, si l'on possédait le matériel nécessaire, se rapprocherait certainement beaucoup de 0,30 — de faire usage de ce

nombre pour l'assurance »Individuelle» également. (Ce nombre n'est en tout cas pas trop bas puisque, par exemple, la perte du bras droit donne jusqu'à 80 % d'après les données ci-dessus, contre 60 % prévus par l'assurance »Individuelle».)

Nous trouvons donc par la formule (2) pour une assurance individuelle contre les accidents, cas de Mort $K = 65$ et pour le cas d'Invalidité $K = 31$.

Voici donc une expression chiffrée montrant que l'assurance du cas de Mort est plus »grave» que l'assurance de l'Invalidité. Le premier de ces risques exigera un nombre d'assurances »Individuelles» 4 à 5 fois plus élevé pour obtenir un K demeurant dans le domaine de l'assurance et non dans celui du hasard.

Nous avons en outre là une base pour l'appréciation en chiffres de combien le chargement à appliquer à l'assurance du cas de Mort doit être supérieur à celui de l'assurance de l'Invalidité.

V. Erreur moyenne pour un groupe d'assurances dépendantes les unes des autres (conflagration).

Les assurances »isolées» traitées dans l'étude qui précède sont souvent, dans plusieurs branches d'assurance et dans l'assurance incendie surtout, des cas exceptionnels. Une maison d'habitation isolée n'est même pas considérée comme »assurance isolée» par un assureur professionnel, car il fixe une prime pour le bâtiment et une autre pour le mobilier. Nous devons donc arriver à déterminer l'erreur moyenne pour une prime combinée de plusieurs risques partiels. Et la question est plus compliquée encore s'il s'agit de constructions connexes et de leur risque de conflagration.

Nous devons alors traiter un groupe d'assurances avec les sommes d'assurance $v_1 v_2 v_3 \dots v_i \dots$

les taux de primes nettes $q_1 q_2 q_3 \dots q_i \dots$

soit pour primes nettes $v_1 q_1, v_2 q_2, v_3 q_3 \dots v_i q_i \dots$

L'ensemble des primes nettes d'une année

$$P = q_1 v_1 + q_2 v_2 + \dots q_i v_i \dots +$$

sera considérée comme *moyenne* pour les sinistres des diverses années. Supposons N être le nombre d'années d'observation. On admettra que la prime nette est fixée correctement et que les primes nettes des N années couvriront les sinistres de ces années. Pour une seule année, l'ensemble des sinistres incendie sera exprimé comme suit:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \dots, \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \dots$$

sont des fractions, la plupart égales à 0, quelques-unes à 1 (sinistre total) les autres donnant les »pourcentages de sinistres«.

Pour l'erreur moyenne on aura:

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{i=N} [(\alpha_i v_1 + \beta_i v_2 + \dots) - (q_1 v_1 + q_2 v_2 + \dots)]^2}$$

et l'exactitude de la prime nette donne les équations

$$N q_1 v_1 = v_1 \sum_1^N \alpha_i, \quad N q_2 v_2 = v_2 \sum_1^N \beta_i, \text{ etc.}$$

qui peuvent être transcrites comme suit:

$$N = \frac{\sum \alpha}{q_1} = \frac{\sum \beta}{q_2} = \dots = \sqrt{\frac{\sum \alpha \cdot \sum \beta}{q_1 q_2}} = \dots$$

et

$$N(q_1 v_1 + q_2 v_2 + \dots) = \sum_1^N (\alpha_i v_1 + \beta_i v_2 + \dots) = N \cdot P.$$

A l'aide de ces équations on transformera l'expression de l'erreur moyenne ainsi:

$$\lambda_2(P) = \sqrt{-P^2 + \frac{1}{N} \cdot \sum_1^N (\alpha_i v_1 + \beta_i v_2 + \dots)^2}$$

puis ensuite:

$$\lambda_2(P) = \sqrt{v_1^2 q_1^2 \left(\frac{1}{q_1} \cdot \frac{\sum \alpha^2}{\sum \alpha} - 1 \right) + \dots (I) \dots + 2v_1 q_1 v_2 q_2 \left(\frac{1}{\sqrt{q_1 q_2}} \cdot \frac{\sum \alpha_k \beta_k}{\sqrt{\sum \alpha \cdot \sum \beta}} - 1 \right) + \dots (II) + \dots} \quad (3)$$

Ceci est donc une formule, entièrement valable dans tous les cas, pour la détermination de l'erreur moyenne sur une prime $\sum q_i v_i$. Il apparaît que le carré de l'erreur moyenne se compose d'une somme de deux sortes de termes (I) et (II). Dans (I) se trouve pour chaque assurance un terme de la valeur du carré de l'erreur moyenne pour le cas isolé (formule (2)). (II) se compose d'un nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ de termes, n étant le nombre d'assurances. Chaque combinaison d'une assurance avec une des autres donne un terme qu'on pourrait nommer «terme de conflagration», car à la somme $\sum_1^N \alpha_k \beta_k$ seules contribuent les années où chacun des α_k et β_k est différent de zéro. La valeur du terme est le double du produit des primes multiplié par $\left(\frac{1}{\sqrt{q_1 q_2}} \cdot \frac{\sum \alpha_k \beta_k}{\sqrt{\sum \alpha \cdot \sum \beta}} - 1 \right)$. Le membre peut aussi s'écrire $2v_1 v_2 \left(\frac{\sum \alpha_k \beta_k}{N} - q_1 q_2 \right)$. Ici $\frac{\sum \alpha_k \beta_k}{N}$ est précisément le risque de conflagration et s'il est égal à $q_1 q_2$, le membre est nul. C'est-à-dire: lorsque le risque de conflagration n'est pas plus grand que le danger ($q_1 \cdot q_2$) de la possibilité d'un sinistre simultané, sur deux risques aux probabilités q_1 et q_2 , il n'existe pas de risque de conflagration. Dans ce cas les assurances ne sont pas liées l'une à l'autre, elles sont ce que nous avons nommé «risques isolés».

Deux exemples de l'application de la formule (3).

Exemple 1. — Donné un nombre n d'assurances complètement identiques et complètement isolées, tous les termes de II disparaissent et tous ceux de I deviennent identiques, on obtient alors:

$$\lambda_2(nqv) = \sqrt{nv^2q^2 \left(\frac{1}{q} \cdot \frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha} - 1 \right)}$$

$$K = \frac{\lambda_2(nqv)}{nqv} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha} \cdot \frac{1}{q} - 1}$$

c'est-à-dire :

$$K(nqv) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot K(qv).$$

Exemple 2. Donné un nombre n d'assurances complètement identiques mais complètement dépendantes (liées) les unes des autres de sorte que la totalité de ces n assurances est «un seul risque», alors les n termes de I sont identiques et les $\frac{n(n-1)}{2}$ termes de II sont identiques. La formule (3) donne en ce cas :

$$\lambda_2(nqv) = \sqrt{nv^2q^2 \left(\frac{1}{q} \cdot \frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha} - 1 \right) + 2 \frac{n(n-1)}{2} v^2q^2 \left(\frac{1}{q} \cdot \frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha} - 1 \right)} =$$

$$= \sqrt{n^2v^2q^2 \left(\frac{1}{q} \cdot \frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha} - 1 \right)} \text{ c'est-à-dire : } K(nqv) = K(qv).$$

La différence entre ces deux exemples est précisément le $\sqrt{n}$, qui paraît dans le dénominateur de l'exemple 1. Cette division par $\sqrt{n}$ constitue un des principaux piliers de l'Assurance.

VI. L'importance fondamentale de l'erreur moyenne.

Par la formule (3) on peut trouver la valeur de l'erreur moyenne de la prime totale de toutes les assurances d'une Compagnie même si ces assurances ne sont pas indépendantes les unes des autres (risque de «conflagration») et même s'il est question d'assurances avec des sinistres partiels. C'est donc cette expression, qui doit remplacer $\sqrt{\Sigma p q v^2}$ dans la formule

$$\varphi(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \Sigma p q v^3}} \cdot e^{-\frac{(T - \Sigma q v)^2}{2 \Sigma p q v^3}} \quad (4)$$

donnant la probabilité du débours T pour une Compagnie alimentée d'un grand nombre d'assurances, avec les sommes v_n , les taux nets de primes q_n — ($p = 1 - q_n$) — et les sommations Σ étendues à toutes les assurances.

Pour la déduction de la formule (4) on peut se servir des idées de POISSON et LAURENT par exemple de cette manière:
Si l'on développe le produit

$$\prod_1^N (p_n + q_n e^{i v_n \theta}) \quad i = \sqrt{-1}$$

en série de puissances de $e^{i\theta}$, le coefficient de $e^{iT\theta}$ devient l'expression de la probabilité du débours T , c'est-à-dire:

$$\varphi(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Pi(p_n + q_n e^{i v_n \theta}) \cdot e^{-i \cdot T \cdot \theta} \cdot d\theta. \quad (5)$$

Pour chaque facteur du produit on a

$$\begin{aligned} p + q e^{i v \theta} &= p + q \left(1 + \frac{i v \theta}{1} - \frac{v^2}{1 \cdot 2} \theta^2 - \frac{i v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \theta^3 + \dots \right) = \\ &= 1 + q \left(i v \theta - \frac{v^2}{2} \theta^2 - \frac{i v^3}{6} \theta^3 + \dots \right) = 1 + q \cdot S. \end{aligned}$$

En employant le développement de $\log(1+x)$ on en déduit:

$$\log(p + q e^{i v \theta}) = q S - \frac{1}{2} q^2 S^2 + \frac{1}{3} q^3 S^3 - \dots$$

$$p + q e^{i v \theta} = e^{i q v - \left(\frac{1}{2} q - \frac{1}{2} q^2\right) v^2 \theta^2 - \dots}$$

La formule (5) prend alors la forme:

$$\varphi(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{1}{2} \sum (q-q^2) v^2 \zeta^2} \cdot \cos(\sum qv - T)\theta \cdot d\theta$$

qui à l'aide de la formule bien connue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{b^2}{a^2}}$$

et en prenant les limites $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ au lieu de $-\pi$ à $+\pi$, se transforme en (4).

Vu l'importance de la formule (4) et les approximations diverses du développement ci-dessus il ne sera pas sans valeur de retrouver la formule (4) par une autre voie. Dans une publication (Stockholm 1919) du conseil d'assurance de l'état suédois M. le dr. CRAMÉR a prouvé la formule par des considérations, dont je veux essayer de donner les lignes principales. Il commence avec un grand nombre d'assurances, N , de la même grandeur: l'unité. Il suppose que les primes pures $p_1 p_2 \dots p_N$ se paient continuellement de sorte que les p et leur somme P sont proportionnels au temps. Sans se servir des approximations il prouve que la probabilité $f(n, P)$ pour l'arrivée de n cas de sinistres en même temps que la somme P des primes encaissées a l'expression

$$f(n, P) = e^{-P} \frac{P^n}{n!}.$$

La seule approximation dont il a besoin c'est l'emploi de la formule de STIRLING: $n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$ pour obtenir la forme

$$f(n, P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P}} \cdot e^{-\frac{(n-P)^2}{2P}}.$$

L'extension à des sommes, différentes entre elles, se fait alors sans difficulté et sans approximations ultérieures. La forme sous laquelle il obtient la formule (4) est la suivante:

Une portefeuille d'un grand nombre, N , des sommes d'assurance $a_1 a_2 \dots a_N$ dont les taux de primes pures sont $p_1 p_2 \dots p_N$ entraîne le débours x . La probabilité pour que x soit compris entre les limites x_1 et x_2 est alors :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \sum p_n a_n^2}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x - \sum p_n a_n)^2}{2 \sum p_n a_n^2}} dx.$$

Naturellement on a supposé ici que les assurances soient indépendantes les unes des autres et qu'il ne soit pas question de sinistres partiels.

Selon moi il n'est pas nécessaire de faire ces deux suppositions, si l'on remplace l'erreur moyenne ($\sqrt{\sum p_n a_n^2}$ dans la formule de Cramér, $\sqrt{\sum p q v^2}$ dans la formule (4)) par l'expression (3).

VII. Application du caractéristique K pour la détermination du plein.

Ce qui précède nous a mis en mains un moyen pour déterminer K pour tout le portefeuille d'assurances d'une Compagnie. La valeur de K nous donne (selon le § II), le degré de sûreté de la Compagnie et le point de transition entre le hasard et l'assurance et il est évident qu'une Compagnie qui a atteint un certain point sur cette échelle ne doit pas accepter de nouvelles assurances qui auraient pour effet d'agrandir K , c'est-à-dire d'amoindrir la sécurité. Ceci a en somme toujours été reconnu comme principe et fut mentionné par LANDRÉ — mais en faisant usage d'une autre quantité pour mesurer le degré de hasard — dans un mémoire au premier congrès des actuaires à Londres (1898). Landré tira cependant la conséquence de cette mesure que comme valeur de rapprochement pour le plein, on pouvait se servir du double de la moyenne des sommes d'assurance, ce qui toutefois (ainsi que le fait remarquer M. MEIDELL dans le »Norsk Forsikringstidende» du 1^{er} décembre 1912) est un

rapprochement si grossier que c'est à peine si on peut nommer cela un rapprochement. (Il est montré par un exemple que dans un certain cas, la règle de Landré donne le chiffre de 12,700 kr. alors que l'application stricte du principe dont s'est servi Landré devrait donner 21,000 kr.) La littérature est du reste très économe sur ce point. Je ne veux cependant pas omettre de faire remarquer ici que dans une intéressante discussion théorique de Meidell au congrès des Actuaires à Amsterdam (1912), il trouve, entre autres, quelle répartition auront les différentes sommes d'assurance d'une Compagnie lorsque l'acceptation des nouvelles assurances a eu lieu constamment suivant le principe strict de Landré.

Avec le développement de l'appareil ci-dessus on peut fixer le K même pour des portefeuilles d'assurance compliqués. Quelle valeur doit-on alors attribuer à une nouvelle somme d'assurance pour que la valeur du K ne soit pas aggrandie après l'acceptation de la nouvelle somme d'assurance?

Si la somme nouvelle v est toute petite, le K diminue, et cette relation a lieu pour des valeurs croissantes de v jusqu'à (voir la figure ci-joint) la valeur M_1 de v donnant pour K un minimum. On trouve la valeur M_1 par la condition $\frac{dK}{dv} = 0$. A un certain point de vue M_1 est le montant le plus «souhaitable» de la nouvelle somme. Les v croissant depuis M_1 font aussi croître le K et si l'on ne veut pas que le K soit plus grand qu'avant l'acceptation de la somme

nouvelle, il faut fixer le «plein» au point M_2 . Par la formule (6) on démontre sans difficulté que la courbe (en tout cas si la somme nouvelle est indépendante des assurances antérieures) se rapproche d'une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des K et par conséquent le plein M_2 est à peu près le double¹ de la somme M_1 , la somme la plus «souhaitable» déterminée par la condition $\frac{dK}{dv} = 0$.

On obtient l'expression complète du K à l'aide de la formule (3):

$$K = \frac{\sqrt{v_1^2 \left(q_1 \frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha_1} - q_1^2 \right) + \dots + 2v_1 v_2 \left\{ \sqrt{q_1 q_2} \cdot \frac{\Sigma \alpha_k \beta_k}{\sqrt{\Sigma \alpha \cdot \Sigma \beta}} - q_1 q_2 \right\} + \dots}}{v_1 q_1 + v_2 q_2 + \dots} \quad (6)$$

L'expression est ici établie d'une telle façon que les termes contenant v_1 sont écrits explicitement. Des termes analogues figurent pour v_2 , v_3 et ainsi de suite. On peut alors exécuter la différentiation par rapport à v_1 , v_2 , ... On trouve

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dv_1} = & -\frac{\lambda_2 q_1}{P^2} + \frac{q_1}{P} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \left\{ v_1 \left(\frac{\Sigma \alpha^2}{\Sigma \alpha} - q_1 \right) + v_2 \left(\sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \cdot \frac{\Sigma \alpha_k \beta_k}{\sqrt{\Sigma \alpha \cdot \Sigma \beta}} - q_2 \right) + \right. \\ & \left. + v_3 \left(\sqrt{\frac{q_3}{q_1}} \cdot \frac{\Sigma \alpha_k \gamma_k}{\sqrt{\Sigma \alpha \cdot \Sigma \gamma}} - q_3 \right) + \dots \right\} = 0. \end{aligned}$$

Par cette équation et les équations analogues pour v_2 , v_3 , ... on peut déterminer les pleins simultanés pour un groupe d'assurances dépendantes les unes des autres. On peut donner aux équations la forme symétrique:

$$\begin{aligned} v_1 \Sigma \alpha_i^2 + v_2 \Sigma \alpha_i \beta_i + v_3 \Sigma \alpha_i \gamma_i + \dots &= (k^2 + 1) \cdot P \cdot \Sigma \alpha \\ v_1 \Sigma \alpha_i \beta_i + v_2 \Sigma \beta_i^2 + v_3 \Sigma \beta_i \gamma_i + \dots &= (k^2 + 1) \cdot P \cdot \Sigma \beta \\ v_1 \Sigma \alpha_i \gamma_i + v_2 \Sigma \beta_i \gamma_i + v_3 \Sigma \gamma_i^2 + \dots &= (k^2 + 1) \cdot P \cdot \Sigma \gamma \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (7)$$

¹ Un examen plus détaillé montre, que le plein est toujours un peu plus grand que le double. —

C'est intéressant qu'on arrive précisément aux mêmes équations si l'on veut établir les équations normales d'après la méthode des moindres carrés pour les équations

$$v_1\alpha_i + v_2\beta_i + v_3\gamma_i + \dots = (k^2 + 1) \cdot P$$

équations qui disent que les sinistres des diverses années sont égaux à la prime d'une année multipliée par $K^2 + 1$.

Divisons la première des équations (7) par le coefficient de v_1 , la seconde par le coefficient de v_2 et ainsi de suite, les coefficients de la ligne diagonale sont 1 et les autres coefficients ont la forme: $\frac{\sum \alpha_i \beta_i}{\sum \alpha_i^2}$. Nous pouvons donner à

ces expressions le nom de «coefficients de conflagration» pour le lien qui unit les assurances. S'il était par exemple question d'une ville construite en bois, l'idéal serait de pouvoir trouver le moyen de déduire des sinistres incendie réels, la valeur numérique de ces coefficients. Mais afin de pouvoir suivre cette voie on devrait avoir en traitement les sinistres de tant d'années qu'il ne serait pas possible d'admettre que le coefficient se soit maintenu constant durant une si longue période. C'est pourquoi on fera peut-être mieux de suivre la voie qui consiste en l'emploi de nos connaissances réunies (donc par seulement des sinistres survenus et leur traitement statistique, mais aussi des conditions du terrain, de celles de la hauteur, de la distance de l'eau, des conditions d'extinction, des conditions prédominantes du vent, de la valeur des marchandises dans le moment et de leur nature, etc. etc.) pour arriver à une expression numérique de ces coefficients et ensuite, résoudre les équations. Nous devons indiquer un exemple en chiffres: L'esquisse ci-dessous représente une partie — la plus dangereuse — de Stavanger (ville de Norvège).

Quelques Compagnies ont eu et ont peut-être encore, les pleins suivants:

dans 3 et 4 ensemble	60 000 kr.
» 1 » 2 »	30 000 »
» 5 »	30 000 »
» 6, 7 et 8 »	60 000 »

On trouvera que ces pleins pourraient être la solution des équations suivantes:

$$v_{12} + \frac{1}{2}v_{34} + \frac{1}{4}v_5 + \frac{1}{4}v_{678} = P^1$$

$$\frac{1}{2}v_{12} + v_{34} + \frac{1}{4}v_5 = P^1$$

$$\frac{1}{4}v_{12} + \frac{1}{4}v_{34} + v_5 + \frac{1}{2}v_{678} = P^1$$

$$\frac{1}{4}v_{12} + \frac{1}{2}v_5 + v_{678} = P^1.$$

(Les lignes verticales indiquent la mer et les chiffres, les différents quartier).

Fixons P^1 à 82 500 kr., nous obtiendrons comme résultat de ces équations, $v_{12} = v_5 = \frac{4}{11}P^1$ et $v_{34} = v_{678} = \frac{8}{11}P^1$, donc, précisément les pleins précités. Dans ces équations, les coefficients donnent ainsi l'expression numérique de la pratique et de l'instinct qui ont guidé les assureurs ayant fixé ces pleins. Cela paraît être un heureux choix si l'on se borne à ne considérer que ces quartiers.

Cependant, on pourra peut-être critiquer un point: Il ne semble pas fondé d'estimer le risque de conflagration entre les quartiers (1, 2) et 5 seulement la moitié aussi grand qu'entre (1.2) et (3.4). On doit indiquer tous les deux coefficients en question pour $\frac{1}{2}$ au lieu (ainsi qu'il a été fait à l'équation ci-dessus) d'indiquer le premier pour $\frac{1}{4}$ et le dernier pour $\frac{1}{2}$. Avec cette rectification, le résultat sera:

$$v_{12} = v_5 = \frac{4}{15}P^1 = 22\,000 \text{ kr.}$$

$$v_{34} = v_{678} = \frac{12}{15}P^1 = 66\,000 \text{ kr.}$$

Mais après avoir développé l'appareil ci-dessus, il ne semble pas y avoir de raison pour s'arrêter à ne considérer

le risque de conflagration qu'entre ces 4 quartiers. Toute la pratique et l'instinct de l'assureur de métier avec toutes les autres connaissances sur les conditions du terrain, de celles de la hauteur, de la distance de l'eau, des conditions d'extinction et de la valeur dans le moment, doivent pouvoir être utilisés pour le choix numérique des coefficients d'équation ci-dessus, de même qu'on pourra maintenant facilement séparer le quartier 7 des quartiers 6 et 8 et comprendre d'autres quartiers voisins, notamment 16 et 10.