Bemerkungen über barometrisches Höhenmessen.

Von Herrn Geheimen-Rath und Ritter *Bessel*.

(Hiebei eine Beilage.)

1.

Die Atmosphäre der Erde ist bekanntlich aus Stickstoffgas, Sauerstoffgas, Kohlensäuregas und Wasserdampf zusammengesetzt, und es wird angenommen, daß diese Bestandtheile derselben keine chemische Wirkung aufeinander äußern, oder daß willkürliche Massen derselben, zusammengemischt, unter gleichem Drucke und in gleicher Wärme, einen Raum füllen, welcher der Summe der von den einzelnen gefüllten Räume gleich ist. Wenn die Bestandtheile der Atmosphäre zu allen Zeiten und in allen Höhen, in einem gleichen Verhältnisse vermischt angenommen werden, so ist die Kenntniß dieses Verhältnisses, insofern es sich um die Bedingungen ihres Gleichgewichts handelt, unnöthig; wenn man aber die Freiheit behalten will, den Untersuchungen darüber auch andere Voraussetzungen zum Grunde zu legen, so darf man die Art der Zusammensetzung der Atmosphäre nicht stillschweigend übergehen.

Die drei Gasarten, welche sich in der Atmosphäre befinden, können vielleicht, an einem bestimmten Punkte der Oberfläche der Erde, nicht immer in genau gleichem Verhältnisse vorhanden sein; allein die Veränderungen, welche dieses Verhältniß von einer Zeit zur andern erfährt, sind jedenfalls so klein, daß sie, durch die Methoden der Chemie, nur in Folge oft wiederholter Versuche entdeckt werden können; nicht mit so großer Leichtigkeit, daß man das stattfindende Verhältniß als in jedem einzelnen Falle durch Beobachtung erkennbar betrachten könnte. Man muß also ein bestimmtes Verhältniß annehmen.

Nach der Angabe von *Berzelius* sind die Räume, welche die drei Gasarten, in der Reihenfolge, in welcher ich sie oben angeführt habe, einnehmen, in dem Verhältnisse:

$$77,96 : 21,15 : 0,07;$$

oder der Raum 1 trockner atmosphärischer Luft, an der Oberfläche der Erde, wird gefüllt durch:

$$\begin{aligned} v &= 0,78605 && \text{Stickstoffgas} \\ v_1 &= 0,21325 && \text{Sauerstoffgas} \\ v_{11} &= 0,00070 && \text{Kohlensäuregas.} \end{aligned}$$

Derselbe große Chemiker giebt die Dichtigkeiten dieser drei Gasarten, wenn sie alle demselben Drucke ausgesetzt werden, welcher ihrem Gemische eine Dichtigkeit D giebt:

$$\begin{aligned} \text{des Stickstoffgases.} &\dots\dots = 0,9691 D = d D \\ \text{des Sauerstoffgases.} &\dots\dots = 1,1026 D = d_1 D \\ \text{des Kohlensäuregases.} &\dots\dots = 0,5260 D = d_{11} D \end{aligned}$$

Diese 6 Zahlen bedürfen indessen einer Ausgleichung untereinander, indem sie der Relation:

$$1 = v d + v_1 d_1 + v_{11} d_{11} \dots\dots\dots (1)$$

der sie entsprechen müssen, nicht entsprechen. Man hat nämlich, wenn M, m, m_1, m_{11} , die in der Raumesinheit enthaltenen Masse des Gemisches und seiner Bestandtheile, $D, \delta, \delta_1, \delta_{11}$, ihre Dichtigkeiten bezeichnen, durch die Voraussetzung, der gleichförmigen Vertheilung in diesem Raume:

$$D : M = \delta : m = \delta_1 : m_1 = \delta_{11} : m_{11}; \dots\dots\dots (2)$$

ferner, wenn P, p, p_1, p_{11} , die Drücke bezeichnen, welche das Gemisch und seine Bestandtheile, diese einzeln genommen, auf die Einheit der Oberfläche des sie einschließenden Raumes ausüben, durch das *Mariottesche* Gesetz:

$$\begin{aligned} P : d D &= p : \delta \\ P : d_1 D &= p_1 : \delta_1 \\ P : d_{11} D &= p_{11} : \delta_{11} \end{aligned}$$

und auch,

$$P : 1 = p : v = p_1 : v_1 = p_{11} : v_{11}$$

also

$$\delta = v d D; \quad \delta_1 = v_1 d_1 D; \quad \delta_{11} = v_{11} d_{11} D$$

Setzt man diese Ausdrücke von $\delta, \delta_1, \delta_{11}$ in die obige Proportion (2), so erhält man:

$$m = v d M, \quad m_1 = v_1 d_1 M, \quad m_{11} = v_{11} d_{11} M$$

und, da $M = m + m_1 + m_{11}$ ist, die Relation (1). Damit ihr entsprochen werde, habe ich d und d_1 ein wenig geändert und das erstere in 0,9711, das andere in 1,1048 verwandelt.

Die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft, nämlich des Gemisches der drei Gasarten, haben *Biot* und *Arago* bestimmt. Sie haben gefunden, daß sie, wenn sie sich an der Oberfläche der Erde und in der Wärme des schmelzenden Eises unter

dem Drucke, welchen eine gleich warme Quecksilbersäule von 336,905 Pariser Linien Höhe unter dem 45^{ten} Grade der Polhöhe aufsert, befindet, 10466,8mal leichter ist als Quecksilber. Unter diesen Umständen ist also das obige

$$D = \frac{1}{10466,8}.$$

So wie die Wärme zunimmt, nimmt auch die spezifische Elasticität der Luft zu, oder der Raum, den eine Masse Luft einnimmt vergrößert sich bei gleichbleibendem Drucke. *Gay-Lussac* hat das merkwürdige Resultat gefunden, dafs die spezifische Elasticität aller Gasarten und Dämpfe, bei gleicher Aenderung der Wärme, sich gleichviel verändert und dafs diese Aenderung den Graden des Quecksilberthermometers proportional ist. Wenn sie für die Wärme des schmelzenden Eises = 1, und ihre Aenderung für eine, einem Grade der Thermometerscale entsprechenden Aenderung der Wärme = k gesetzt wird, so ist also ihr Werth für die Angabe t des Thermometers:

$$E = 1 + kt.$$

Für die Wärme des siedenden Wassers fand *Gay-Lussac* $E = 1,375$.

Zu den drei Gasen gesellt sich in der Atmosphäre noch Wasserdampf, und es ist bekannt, dafs er in veränderlicher Menge, welche in jedem besonderen Falle nur durch einen Versuch bestimmt werden kann, vorhanden ist. Was sich hierauf bezieht, werde ich später berühren, zuerst aber die atmosphärische Luft als trocken betrachten.

2.

Die barometrischen Höhenmessungen beruhen auf der Vergleichung des beobachteten Verhältnisses der Drücke der Luft in verschiedenen Höhen, mit dem Ausdrücke, welche die Bedingung des Gleichgewichts der Luft dafür giebt. Obgleich dieser Ausdruck in der *Mécanique Céleste*, und später in vielen anderen Schriften, entwickelt worden ist, so werde ich seine Entwicklung doch auch hier nicht unterlassen: es wird mir dadurch leichter werden, sowohl eine kleine Veränderung anzubringen, als später Vorkommendes anzuknüpfen.

Das *Mariottesche* Gesetz fordert, dafs die Dichtigkeit δ der Luft, in dem Verhältnisse des Druckes p , den sie erfährt und folglich, im Gleichgewichte, selbst wieder ausübt, und in dem umgekehrten Verhältnisse ihrer spezifischen Elasticität E , oder dafs

$$\frac{\delta \cdot E}{p}$$

beständig ist. Hierbei ist Luft von gleicher Beschaffenheit in allen Höhen, vorausgesetzt. Nimmt man zum Maafse von p den Druck an, welchen eine Quecksilbersäule von der Wärme des schmelzenden Eises und der Höhe von 336,905 Par. Linien,

an der Oberfläche der Erde und unter dem 45^{ten} Grade der Polhöhe, auf eine Flächeneinheit aufsert; als Maafs von δ die Dichtigkeit des Quecksilbers in der Wärme des schmelzenden Eises und als Maafs von E die spezifische Elasticität der Luft in derselben Wärme, und setzt man $\delta = D$ für $p = 1$ und $E = 1$, so ist:

$$\delta \cdot E = pD \dots \dots \dots (3)$$

Der Druck der Luft in einer Höhe x über der Oberfläche der Erde, oder in einer Entfernung $a+x$ von ihrem Mittelpunkte, ist die Summe der Drücke aller über x liegenden Schichten. Eine Schichte zwischen den Höhen x und $x+dx$ hat, für jede Einheit ihrer Oberfläche, die Masse $\delta \cdot dx$, äusert also auf diese Einheit den Druck:

$$(g) \delta \left(\frac{a}{a+x} \right)^2 dx$$

wo (g) die Schwere an der Oberfläche der Erde, senkrecht unter dem Punkte, auf welchen x und δ sich beziehen, in Theilen der Schwere unter dem 45^{ten} Grade der Polhöhe ausgedrückt, bedeutet. Allein um die durch das Wegnehmen dieser Schichte von den über x liegenden erzeugte Verminderung des Druckes durch dasselbe Maafs zu messen, durch welches oben p gemessen worden ist, mufs der eben gegebene Ausdruck durch dieses Maafs dividirt werden und ergibt dann:

$$dp = - \frac{(g) \delta}{336,905} \left(\frac{a}{a+x} \right)^2 dx$$

oder, wenn man a und x nicht durch die Pariser Linie, sondern durch die Toise messen will:

$$dp = - \frac{(g) 864 \cdot \delta}{336,905} \left(\frac{a}{a+x} \right)^2 dx \dots \dots \dots (4)$$

Wenn man δ durch die Verbindung beider Gleichungen eliminiert, erhält man:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{(g) 864 \cdot D}{336,905} \left(\frac{a}{a+x} \right)^2 \frac{dx}{E}$$

Durch das Integral dieser Gleichung werden die Werthe von p , welche in zwei verschiedenen Höhen über der Oberfläche der Erde, für $x = h$ und $x = h'$ vorhanden sind, miteinander verglichen; nämlich, wenn man sie durch P und P' bezeichnet, und die Logarithmen des *Briggschen* Systems, für dessen Modul μ geschrieben wird, annimmt:

$$\log \frac{P'}{P} = - \frac{(g) 864 \cdot D \cdot \mu}{336,905} \int_h^{h'} \left(\frac{a}{a+x} \right)^2 \frac{dx}{E}$$

oder, wenn man

$$\frac{336,905}{864 \cdot D \cdot \mu} = 9397,74 = l = (g) l'$$

setzt

$$\log \frac{P'}{P} = - \frac{1}{l'} \int_h^{h'} \left(\frac{a}{a+x} \right)^2 \frac{dx}{E} \dots \dots \dots (5)$$

Die noch auszuführende Integration setzt voraus, daß man die Relation zwischen x und E , oder das Gesetz kenne, nach welchem die in beiden Höhen beobachteten, der Wärme der Luft entsprechenden Thermometerstände τ und τ' ineinander übergehen. Man kennt dieses Gesetz in keinem Falle und hat daher keinen Grund, die Aenderung der Wärme anders, als der Aenderung der Höhe proportional anzunehmen. *Laplace* setzt, um diese Absicht näherungsweise zu entsprechen und um zugleich dem Integrale die möglichst einfache Form zu geben:

$$(1 + kt)^2 + \frac{iax}{a+x}$$

für alle zusammengehörige Werthe von t und x als beständig voraus und bestimmt die Constante i so, daß sie den beiden beobachteten Temperaturen τ und τ' genügt. Hierdurch wird:

$$(1 + kt)^2 + iX = (1 + k\tau)^2 + iH = (1 + k\tau')^2 + iH'$$

wo ich X , H , H' für $\frac{ax}{a+x}$, $\frac{ah}{a+h}$, $\frac{ah'}{a+h'}$ geschrieben habe. Man erhält dadurch

$$i = \frac{2k(\tau - \tau') \left(1 + k \frac{\tau + \tau'}{2}\right)}{H' - H}$$

und

$$dX = \left(\frac{a}{a+x}\right)^2 dx = -\frac{2k}{i} (1 + kt) dt$$

und ferner

$$\left(\frac{a}{a+x}\right)^2 \frac{dx}{E} = -\frac{2k}{i} dt,$$

woraus das von h bis h' genommene Integral ist:

$$\frac{2k}{1} (\tau - \tau') = \frac{H' - H}{1 + k \frac{\tau + \tau'}{2}}.$$

Man hat also, der *Laplace'schen* Annahme des Gesetzes der Wärmeänderung zufolge, die Formel (5) in:

$$(6) \dots \log \frac{P}{P'} = \frac{1}{l} \cdot \frac{H' - H}{1 + k \frac{\tau + \tau'}{2}}$$

verwandelt.

3.

Ich habe hierbei die Luft als trocken angenommen, muß also den immer darin enthaltenen Wasserdampf noch berücksichtigen. Wenn das sich in einem begrenzten Raume befindende Gemisch der trockenen Bestandtheile der Luft auf die begrenzende Oberfläche den Druck p ausübt, der Wasserdampf den Druck p_1 , und wenn die specifischen Schweren beider durch D und $d_1 D$, der feuchten, aus ihrer Mischung entstandenen Luft durch D' bezeichnet werden, so ist, der Gleichung (1) zufolge:

$$1 = \sigma \frac{D}{D'} + \nu_1 \frac{d_1 D}{D'}$$

und

$$\nu = \frac{P}{p + p_1}, \quad \nu_1 = \frac{p_1}{p + p_1},$$

also

$$D' = D \frac{p + p_1 d_1}{p + p_1}$$

oder, wenn man (um kein neues Zeichen einzuführen) den ganzen Druck ($= p + p_1$) jetzt durch p bezeichnet:

$$D' = D \left\{ 1 - \frac{p_1}{p} (1 - d_1) \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Für feuchte Luft verwandelt sich also die Gleichung (3) in:

$$\delta \cdot E = \{p - p_1 (1 - d_1)\} D$$

und ihre Verbindung mit (4) ergibt:

$$0 = dp + \frac{1}{\mu l} p \frac{dX}{E} - \frac{(1 - d_1)}{\mu l} p_1 \frac{dX}{E} \dots \dots \dots (8)$$

Um diese Gleichung integrieren zu können, muß man wissen, wie p_1 von den übrigen veränderlichen Größen abhängt. Wenn keine Beobachtung, welche die in der Luft enthaltene Quantität Wasserdampf für einen besonderen Fall bestimmt, vorhanden ist, so muß man seine Berechnung auf die Voraussetzung entweder eines mittleren, oder eines den sonstigen jedesmaligen Umständen angemessen erscheinenden Zustandes der Atmosphäre gründen. Ich werde diesen Fall zuerst untersuchen, indem ich voraussetzen werde, daß an jedem Punkte der Atmosphäre ein bestimmter Theil derjenigen Menge Wasserdampfes vorhanden ist, welche sie, ihrer Wärme gemäß, daselbst aufnehmen kann. Wenn dieses Maximum des Wasserdampfes den Druck (p_1) äufsert, nehme ich also

$$p_1 = \alpha (p_1)$$

an, wo ich unter α einen beständigen Factor, nicht größer als 1, verstehe, dessen Werth der späteren Wahl überlassen bleibt.

Den Ausdruck von (p_1) durch die Angabe t des Centesimalthermometers, hat *Laplace* (Méc. Cé. IV. p. 273) aus Versuchen von *Dalton*, in der im vorigen Art. gewählten Einheit des Druckes ausgedrückt:

$$= 10^{(t-100) 0,0154547 - (t-100)^2 0,0000625826}$$

abgeleitet, wofür man auch

$$(p_1) = 0,0067407 \cdot 10^{t \cdot 0,0279712 - t \cdot 0,0000625826} \dots \dots \dots (9)$$

schreiben kann. Man hat also, der Voraussetzung gemäß,

$$p_1 = \alpha \beta 10^{at - ctt}$$

wo

$$\beta = 0,0067407$$

$$\alpha = 0,0279712$$

$$c = 0,0000625826$$

sind.

Multiplirt man die Differentialgleichung (8) mit

$$10^{\frac{1}{l} \int \frac{dX}{E}}$$

so kann man das Product integrieren, nämlich:

$$C = p \cdot 10^{\frac{1}{T} \int \frac{dX}{E}} - \frac{(1-d_i)}{\mu l} \int p_i 10^{\frac{1}{T} \int \frac{dX}{E}} \frac{dX}{E}$$

Der *Laplaceschen* Annahme des Gesetzes der Aenderung der Wärme, zwischen zwei Höhen, für welche sie durch Beobachtung gegeben ist (Art. 2), zufolge, ist:

$$\frac{dX}{E} = -\frac{2k}{i} dt;$$

substituiert man dieses und auch den Ausdruck von p , so wird

$$C = p \cdot 10^{-\frac{2k}{i} t} + \frac{2\alpha\beta(1-d_i)k}{\mu l i} \int 10^{(a-\frac{2k}{li})t - ctt} dt.$$

Durch diese Gleichung enthält man die Relation zwischen den Drücken der Atmosphäre P und P' in den Höhen h und h' , nämlich:

$$P \cdot 10^{-\frac{2k}{li} t} - P' \cdot 10^{-\frac{2k}{li} t'} = \frac{2\alpha\beta(1-d_i)k}{\mu l i} \int_{-\frac{1}{2}(\tau-\tau')}^{\frac{1}{2}(\tau-\tau')} 10^{(a-\frac{2k}{li})t - ctt} dt$$

Setzt man T für $\frac{1}{2}(\tau+\tau')$ und $T+z$ für t , so verwandelt das noch zu suchende Integral sich in:

$$-10^{-\frac{2k}{li} T} \cdot 10^{aT-cT^2} \int_{-\frac{1}{2}(\tau-\tau')}^{\frac{1}{2}(\tau-\tau')} 10^{(a-\frac{2k}{li}-2cT)z - cz^2} dz$$

Wenn man, um abzukürzen,

$$u = \frac{2\alpha\beta(1-d_i)k}{li} 10^{aT-cT^2} \int_{-\frac{1}{2}(\tau-\tau')}^{\frac{1}{2}(\tau-\tau')} 10^{(a-\frac{2k}{li}-2cT)z - cz^2} dz$$

schreibt, hat man also

$$P \cdot 10^{-\frac{2k}{li} t} - P' \cdot 10^{-\frac{2k}{li} t'} = -\frac{u}{\mu} 10^{-\frac{2k}{li} T}$$

oder

$$P \cdot 10^{-\frac{2k}{li}(\tau-\tau')} + \frac{u}{\mu} 10^{-\frac{2k}{li}(\frac{\tau-\tau'}{2})} = P'$$

woraus folgt:

$$10^{-\frac{2k}{li}(\tau-\tau')} = \frac{P'}{P} \frac{\sqrt{[4\mu^2 PP' + uu]} - u}{\sqrt{[4\mu^2 PP' + uu]} + u}$$

und, wenn man die *Briggschen* Logarithmen beider Glieder dieser Gleichung nimmt und bis uu incl. richtig entwickelt:

$$\frac{2k}{li}(\tau-\tau') = \log \frac{P}{P'} + \frac{u}{\sqrt{(PP')}}.$$

Der angewandten Relation zwischen der Wärme und der Höhe zufolge, ist aber (Art. 2):

$$\frac{2k}{i}(\tau-\tau') = \frac{H'-H}{1+kT};$$

wodurch man erhält

$$(10) \dots \log \frac{P}{P'} = \frac{1}{l} \frac{H'-H}{1+kT} - \frac{u}{\sqrt{(PP')}}.$$

Das in dem Ausdrucke von u vorkommende Integral findet man, durch Reihenentwicklung der Exponentialgröße:

$$= (\tau-\tau') \left\{ 1 + \frac{(\tau-\tau')^2}{24\mu^2} \left[\left(a - \frac{2k}{li} - 2cT \right)^2 - 2c\mu \right] + \text{etc.} \dots \right\}$$

Um die Größe des zweiten Gliedes dieser Reihe einigermaßen zu schätzen, kann man annehmen, daß der Stand des Centesimalthermometers für 25 Toisen der Zunahme der Höhe um einen Grad abnimmt. Dann ist dieses Glied für $H'-H = n \cdot 1000$ Toisen und für $T' = 0$, $= n \cdot 0,0093$; es ist also für kleine Höhenunterschiede ein unbedeutender Theil des ersten Gliedes, während es selbst für die größten, welche noch zugänglich sind, nicht auf ein Zehntel desselben steigt. Die Voraussetzung über die Vertheilung des Wasserdampfes in der Atmosphäre, worauf die gegenwärtige Rechnung beruht, besitzt weit größere Unsicherheit; weshalb ich glaube, daß es wenig Interesse haben kann, ihr durch eine zusammengesetztere Rechnung ganz treu zu bleiben. Ich vereinfache diese daher und nehme:

$$u = \frac{2\alpha\beta(1-d_i)k(\tau-\tau')}{li} 10^{aT-cT^2}$$

an. Nach der Angabe von *Berzelius* ist $d_i = 0,62$, und oben ist gezeigt worden, daß

$$\begin{aligned} \beta &= 0,0067407 \\ \frac{2k(\tau-\tau')}{i} &= \frac{H'-H}{1+kT} \end{aligned}$$

ist. Hierdurch wird

$$u = \alpha \frac{H'-H}{l} \frac{10^{aT-cT^2}}{1+kT} 0,002561$$

und man erhält, durch die Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichung (10):

$$\log \frac{P}{P'} = \frac{H'-H}{l(1+kT)} \left\{ 1 - \alpha \cdot \frac{0,002561}{\sqrt{(PP')}} 10^{aT-cT^2} \right\} \dots (11)$$

Will man die Berechnung des Höhenunterschiedes der beiden Punkte, wo der Druck und die Wärme der Luft beobachtet sind, auf die Voraussetzung des mittleren Zustandes zwischen Trockenheit und größter Feuchtigkeit der Luft gründen, so muß man $\alpha = \frac{1}{2}$ annehmen. Es scheint aber, daß man, auch ohne unmittelbare Bestimmung der jedesmal wirklich vorhandenen Menge des Wasserdampfes, durch Berücksichtigung äußerer Umstände, in geeigneten Fällen größere Genauigkeit erlangen kann, als durch die Voraussetzung $\alpha = \frac{1}{2}$; wenn es z. B. in der ganzen Luftmasse zwischen beiden Punkten regnet, so ist $\alpha = 1$; wenn die beiden Punkte sich in einem weit von dem Meere entfernten, schon als ausgezeichnet trocken bekannten Lande *) befinden, so wird es angemessen sein, α

*) Dieses ist z. B. der Fall mit einem großen Theile von Nordasien, wie aus *A. Ermans* Reise um die Erde B. II S. 67 u. s. w. hervorgeht. Man lernt daselbst nicht nur die Thatsache kennen, sondern auch die geographischen Verhältnisse, wovon sie die Folge ist.

kleiner als $\frac{1}{3}$ anzunehmen. Damit man unmittelbar übersehe, wie groß der Einfluss der Feuchtigkeit auf barometrische Höhenmessungen werden kann, werde ich ihn weiter entwickeln. Die Vergrößerung, welche ein, unter der Voraussetzung trockener Luft berechneter Höhenunterschied, durch die Berücksichtigung des Wasserdampfes erfährt, ist, der Gleichung (14) zufolge:

$$= \frac{\alpha \omega}{1 - \alpha \omega} (H' - H)$$

wo ω für

$$\frac{0,002561}{\sqrt{(PP')}} 10^{aT - cT^2}$$

geschrieben ist. Vernachlässigt man das Quadrat dieser Größe und setzt man

$$P' = P 10^{-\frac{(H' - H)}{T(1 + kT)}},$$

was gleichfalls nur einen Fehler von der Ordnung ω^2 erzeugt, so wird

$$\omega = \frac{0,002561}{P} 10^{\frac{H - H'}{2T(1 + kT)}} \cdot 10^{aT - cT^2}$$

und daher der Einfluss des Wasserdampfes:

$$12) \dots = \alpha \cdot \frac{0,002561}{P} (H' - H) 10^{\frac{H - H'}{2T(1 + kT)}} \cdot 10^{aT - cT^2}$$

Nimmt man den in dieser Formel vorkommenden Druck in der Höhe $h = 1$, oder den Barometerstand daselbst $= 336^{\circ},905$ und $k = 0,00375$ an, so findet man die in α zu multiplicirende Größe für verschiedene Werthe von $H' - H$ und T , so wie folgende Tafel sie angiebt:

$\frac{H' - H}{T}$	$T = \frac{1}{2}(\tau + \tau')$		
	0°	10°	20°
500	1,36	2,55	4,64
1000	2,90	5,41	9,83
1500	4,62	8,61	15,60
2000	6,55	12,18	22,02
2500	8,70	16,15	29,14
3000	11,10	20,55	37,02

Man kann aus diesen Zahlen beurtheilen, wie groß der Einfluss einer Unsicherheit über den Werth von α , in einem vorkommenden Falle ist.

4.

Seit der Erfindung des *Daniellschen* Hygrometers und des *Augustschen* Psychrometers kann man die jedesmal in der Luft enthaltene Menge des Wasserdampfes leicht und mit hinreichender Genauigkeit erkennen. Die Forderung, dass an beiden Punkten, deren Höhenunterschied barometrisch gemessen werden soll, außer dem Barometer und Thermometer, auch das Psychrometer beobachtet werde, kann leicht erfüllt werden, und gewährt dann dem Resultate der Beobachtungen den Vortheil, von einer willkürlichen Annahme über die vorhandene Menge

des Wasserdampfes, etwa in derselben Art frei zu sein, als es, durch die Beobachtung der Luftwärme an beiden Punkten, von einer Willkür in dieser Beziehung befreit wird. Ich werde daher die Rechnungsvorschrift aufsuchen, welche anzuwenden ist, wenn man auch die Beobachtungen des Psychrometers besitzt.

Das Psychrometer beruht auf der Vergleichung des Standes τ , eines Thermometers, dessen Kugel befeuchtet wird, mit dem Stande τ' eines anderen nicht befeuchteten Thermometers. Wenn der größte Druck, welchen Wasserdampf von der Wärme t ausüben kann, durch ϕt und der in Pariser Linien ausgedrückte Barometerstand durch b bezeichnet werden, so ist der Druck, welchen der in der Luft wirklich vorhandene Wasserdampf ausübt:

$$= \phi \tau, - \frac{0,558 (\tau - \tau') b}{336,905 (m - \tau')}$$

wo, in dem Falle eines positiven Werthes von τ , $m = 640$; in dem Falle eines negativen, einen Eisüberzug der befeuchteten Thermometerkugel bedingenden Werthes aber, $m = 715$ ist. Diese Formel ist von dem Erfinder des Psychrometers, *August*, gegeben, und stützt sich auf die Vergleichung von Versuchen mit physischen Betrachtungen *). Den Ausdruck von ϕt durch t leitet *August* aus Beobachtungen über den Druck, welchen Wasserdampf von verschiedener Wärme ausübt, ab, indem er ein, von *Kämpfz* aus den von *Dalton*, *Ure*, *Schmidt* und *Artzberger* darüber angestellten, gezogenes mittleres Resultat anwendet. Diese Beobachtungen sind aber, mit Ausnahme der beiden zuerst angeführten Reihen, so wenig übereinstimmend untereinander, dass es zweifelhaft wird, ob man alle vier vereinigen darf. Ich ziehe daher vor, bei dem oben schon angewandten, von *Laplace* gegebenen, sich an *Daltons* Beobachtungen, also auch an die ihnen nahe kommenden von *Ure*, anschließenden Ausdrücke zu bleiben. Es ist im Allgemeinen meine Meinung, dass man sehr bekannt gewordene und häufig angewandte Formeln nicht eher ändern sollte, als bis die Nothwendigkeit der Aenderung als entschieden betrachtet werden kann; was in dem gegenwärtigen Falle keinesweges statt findet. Die ausgezeichneten späteren Untersuchungen *Aragos* über denselben Gegenstand, betreffen nur die Elasticität des Wasserdampfes in sehr hohen Wärmegraden, und es ist nicht darauf zu rechnen, dass dieselbe Interpolationsformel, welche diese befriedigend darstellt, auch auf weit geringere anwendbar sei.

Wenn man den *Laplaceschen* Ausdruck anwendet, erhält man den Druck, welchen der in der Luft enthaltene Wasser-

*) *Poggendorff Annalen der Physik* Bd. 81. S. 69 und Bd. 90 (14 der neuen Folge) S. 137.

dampf ausübt, der angeführten Formel zufolge:

$$p_r = 0,0064707 \cdot 10^{a_r - c r_r} - 0,0016562 \frac{(\tau - \tau_r) b}{m - \tau_r}$$

und wenn man ihn durch

$$(p_r) = 0,0064707 \cdot 10^{a_r - c r_r},$$

oder durch den Druck dividirt, den der Wasserdampf ausüben würde, wenn die Luft damit gesättigt wäre, das oben durch α bezeichnete Verhältniß, also:

$$(13) \dots a = \frac{10^{a_r - c r_r}}{10^{a_r - c r_r}} - 0,2457 \frac{b}{m - \tau_r} \frac{\tau - \tau_r}{10^{a_r - c r_r}}$$

t	ft	ψt	
— 20°	9,4155	7,1086	
— 19	9,4459	7,0788	298
— 18	9,4762	7,0491	297
— 17	9,5064	7,0195	296
— 16	9,5364	6,9900	295
— 15	9,5663	6,9607	293
— 14	9,5961	6,9315	292
— 13	9,6258	6,8925	290
— 12	9,6553	6,8735	290
— 11	9,6847	6,8447	288
— 10	9,7140	6,8160	287
— 9	9,7432	6,7875	285
— 8	9,7722	6,7590	285
— 7	9,8011	6,7307	283
— 6	9,8299	6,7025	282
— 5	9,8586	6,6745	280
— 4	9,8871	6,6466	279
— 3	9,9155	6,6188	278
— 2	9,9438	6,5911	277
— 1	9,9720	6,5635	276
0	0,0000	6,5361	274
+ 1	0,0279	6,5842	279
2	0,0557	6,5570	272
3	0,0884	6,5299	271
4	0,1109	6,5029	270
5	0,1383	6,4761	268
		6,4493	268

Zur Erleichterung der Berechnung von α theile ich hier eine Tafel mit, deren erste Spalte, für alle Werthe von t , von — 20 bis + 30,

$$\log 10^{a_t - c t t} = f t$$

die zweite

$$\log \frac{0,2457}{m - t} 10^{-a_t + c t t} = \psi t$$

enthält. Man erlangt dadurch

$$\log A = f \tau_r - f \tau$$

$$\log B = \log A + \psi \tau_r + \log(\tau - \tau_r) + \log b$$

und das gesuchte $\alpha = A - B$.

t	ft	ψt	
+ 5°	0,1383	6,4493	
6	0,1656	6,4227	266
7	0,1927	6,3963	264
8	0,2198	6,3699	264
9	0,2467	6,3437	262
10	0,2735	6,3176	261
11	0,3001	6,2916	260
12	0,3266	6,2658	258
13	0,3530	6,2401	257
14	0,3793	6,2145	256
15	0,4055	6,1890	255
16	0,4315	6,1637	253
17	0,4574	6,1385	252
18	0,4832	6,1134	251
19	0,5089	6,0885	249
20	0,5344	6,0636	249
21	0,5598	6,0389	247
22	0,5851	6,0143	246
23	0,6102	5,9899	244
24	0,6353	5,9656	243
25	0,6602	5,9414	242
26	0,6849	5,9173	241
27	0,7096	5,8934	239
28	0,7341	5,8695	239
29	0,7585	5,8458	237
30	0,7828	5,8223	235

Bestimmt man auf diese Art die Werthe von α für beide Höhen, so wird man sie selten von gleicher Größe finden. Da man das Gesetz des Ueberganges von dem einen zu dem

anderen nicht kennt, so ist die Willkür unvermeidlich. Ich halte für das Angemessenste, das Mittel aus beiden Werthen von α zur Berechnung der Formel (11) anzuwenden.

5.

Es scheint mir nöthig, die verschiedenen Voraussetzungen näher zu untersuchen, durch welche ich die Formel (11) erlangt habe. Die erste Voraussetzung aller Untersuchungen, welche den Druck und die Dichte der Atmosphäre in unbestimmten Höhen betreffen, ist die ihres Gleichgewichts. Dafs sie nicht richtig ist, darf nicht erst hier gesagt werden. Ihre Unrichtigkeit zeigt sich sowohl in den Schwankungen des Barometerstandes um seinen mittleren Werth für jeden Punkt der Erde, als auch in der Verschiedenheit dieses Werthes für verschiedene Punkte, selbst wenn sie in der Oberfläche des Meeres angenommen werden. Die Kenntniß dieser Verschiedenheit haben wir erst im J. 1831 durch eine Untersuchung *Adolph Ermans* erlangt *), durch welche er, theils aus eigener, auf einer Reise um die Erde gemachten Beobachtungen, theils aus fremden, sowohl im nördlichen Asien und Amerika gesammelten, als auch auf der Russischen Corvette *Krotkoi*, unter der Leitung des Capitains *Hagemeister* angestellten, gezeigt hat, dafs die von dem Aequator entferntere Grenze der Zone der Passatwinde, einen höheren-Barometerstand hat, als die ihm nähere; und ferner, dafs dieser Stand auch unter verschiedenen Meridianen verschieden ist. Das erstere Resultat beruhet auf Beobachtungen, welche während des achtmaligen Durchschiffens der Passatzzone gesammelt worden sind, und ist auch später auf der, für die Astronomie denkwürdigen Reise *Herschels* nach dem Vorgebirge der guten Hoffnung hervorgetreten; das andere beruhet auf einer Vergleichung der in dem atlantischen und dem stillen Meere gemachten Beobachtungen. Die Unterschiede gehen bis auf mehrere Linien und lassen nicht zweifelhaft, dafs der mittlere Barometerstand an verschiedenen Punkten der wahren Oberfläche der Erde, von der geographischen Länge und Breite dieser Punkte ab hängig ist.

Die als zufällig zu betrachtenden Schwankungen des Barometerstandes müssen Abweichungen einzelner barometrischer Bestimmungen eines Höhenunterschiedes, von dem Mittel aus vielen, hervorbringen; die mittleren Verschiedenheiten welche von der Länge und Breite abhängen, müssen aber, wenn man sie nicht kennt, Fehler zur Folge haben, welche selbst aus dem Mittel vieler Beobachtungen nicht verschwinden, aufer in dem Falle, dafs beide Punkte, deren Höhenunterschied bestimmt werden soll, in einer Lothlinie lägen. Es geht aus der erlangten Kenntniß dieser Verschiedenheiten hervor, dafs die barometrische Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Punkte, selbst wenn sie auf jahrelang wieder-

holten Beobachtungen beruhet, desto zweifelhafter bleibt, je weiter die Punkte voneinander entfernt sind. Denkt man sich Oberflächen, in welchen der mittlere Luftdruck gleich ist, um die Erde gelegt, so kann durch das Barometer nichts anders erlangt werden, als die Bestimmung des auf diese Oberflächen bezogenen Höhenunterschiedes; ob aber diese Oberflächen da wo die beiden Punkte sich befinden, sich mehr oder weniger von dem Parallelismus mit der Oberfläche der Erde entfernen, bleibt gänzlich unbekannt, so lange man die Function der Länge und Breite nicht kennt, welche die beziehungsweise Lage beider bestimmt. Hierdurch wird den Beobachtungen über den Luftdruck ein neuer Gesichtspunkt eröffnet, indem durch sie die Absicht verfolgt werden mufs, an allen Punkten der Erde, die Höhe der Oberfläche eines bestimmten Druckes zu erfahren. Allein für jetzt kann die, aus der allenthalben gleichen Annahme dieser Höhe hervorgehende Gröfse der Unsicherheit noch nicht näher bestimmt werden; gleichfalls kann die, von der als zufällig zu betrachtenden Schwankungen erzeugte, nicht näher angegeben werden; und selbst wenn man, um sie näher kennen zu lernen, lange fortgesetzte Beobachtungen an Punkten in verschiedener Höhe machen wollte, so würden ihre Unterschiede untereinander immer nur als der Erfolg der Vermischung dieser Ursache, mit anderen, gleichfalls unvermeidlich fehlerhaften Voraussetzungen, zu betrachten sein.

Die Beschaffenheit der trockenen Luft ist so vorausgesetzt worden, wie sie zu der Zeit war, als *Biot* und *Arago* für ihre Dichtigkeit die im 1^{ten} Art. angeführte Bestimmung erhielten. Aenderte sich der Sauerstoffgehalt derselben um n Hundertel, so würde sich ihre Dichtigkeit um $n \cdot 0,001337$ verändern, und ein, unter der Annahme $D = \frac{1}{10466,8}$ bestimmter Höhenunterschied müfste in dem Verhältnisse $1:1 + n \cdot 0,001337$ geändert werden. *Humboldt* und *Gay-Lussac* haben aber an 19 Tagen, zwischen dem 17^{ten} Novbr. und 23^{ten} Decbr. 1804, keine merkliche Veränderung des Sauerstoffgehaltes der Luft gefunden, weshalb die Voraussetzung eines beständigen Verhältnisses der beiden hauptsächlichen Bestandtheile der atmosphärischen Luft, als gerechtfertigt betrachtet werden darf.

Indessen hat *Dalton* bekanntlich für wahrscheinlich gehalten, dafs jeder der Bestandtheile der Luft nur von den höheren Schichten seiner eigenen Materie, nicht aber von der ganzen höheren Masse, zusammengedrückt werde, also in verschiedenen Höhen die Dichtigkeit besitze, welche er besitzen würde, wenn er ausschliesslich vorhanden wäre. Hieraus mufs ein mit der Höhe veränderliches Mischungsverhältnifs, und damit auch ein anderes Verhältnifs der Drucke der Luft in verschiedenen Höhen entstehen, als aus der älteren im 2^{ten} Art. verfolgten Annahme. Die barometrischen Höhenmessungen sind deshalb als ein Mittel vorgeschlagen, zwischen beiden Annahmen zu

*) *Poggendorff Annalen der Physik und Chemie* Bd. 99 (23 der neuen Folge) S. 144.

entscheiden. Die Aufmerksamkeit, welche die Ansichten eines Physicus, wie *Dalton*, erheischen, fordert, daß ich auch hier die seinige verfolge.

Die Formel (6) ist nun nicht mehr für die atmosphärische Luft, sondern nur für jeden ihrer Bestandtheile richtig; sie bezieht sich auf den einen oder den anderen derselben, jenachdem man seine specifische Schwere, statt der der Luft im Allgemeinen, darin voraussetzt. Setzt man die Drücke, welche die drei Bestandtheile der Luft in den Höhen h und h' äußern, $= p, p_i, p_{ii}$ und p', p'_i, p'_{ii} und ihre specifischen Schweren Dd, Dd_i, Dd_{ii} , und schreibt man, um abzukürzen, U für

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{H'-H}{1+kT}$$

so wird, der Formel (6) gemäß:

$$p' = p \cdot 10^{-Ud}$$

$$p'_i = p_i \cdot 10^{-Ud_i}$$

$$p'_{ii} = p_{ii} \cdot 10^{-Ud_{ii}}$$

und da

$$P = p + p_i + p_{ii}$$

$$P' = p' + p'_i + p'_{ii}$$

$$p = vP; \quad p_i = v_iP; \quad p_{ii} = v_{ii}P$$

ist,

$$P' = P \{ v \cdot 10^{-Ud} + v_i \cdot 10^{-Ud_i} + v_{ii} \cdot 10^{-Ud_{ii}} \}$$

oder

$$P' = P \cdot 10^{-U} \{ v \cdot 10^{U(1-d)} + v_i \cdot 10^{U(1-d_i)} + v_{ii} \cdot 10^{U(1-d_{ii})} \}$$

wofür ich, um abzukürzen,

$$(10) \dots \dots \dots P' = P \cdot 10^{-U} \cdot \psi$$

schreiben werde. Die Größe ψ ist, in allen zugänglichen Höhen, wenig von 1 verschieden, wie die folgende, nach den im 1^{sten} Art. angeführten Werthen:

$$\begin{array}{ll} v = 0,78605 & d = 0,9711 \\ v_i = 0,21325 & d_i = 1,1048 \\ v_{ii} = 0,00070 & d_{ii} = 0,5260 \end{array}$$

berechnete Tafel zeigt:

U	ψ	$\log \psi$
0,0	1,0000000	0,0000000
0,1	1,0000840	0365
0,2	1,0003334	1148
0,3	1,0007444	3232
0,4	1,0013135	5701
0,5	1,0020375	8840

Wenn das Verhältniß $P':P$ aus der Beobachtung hervorgegangen ist und daraus das dem Höhenunterschiede proportionale U gesucht wird, so findet es sich, wie diese Tafel zeigt, nach der *Dalton*'schen Ansicht etwas größer, als nach der älteren, in einem Verhältnisse, welches die Tafel (deren Zahlen nahe wie das Quadrat des Arguments fortschreiten) ergibt.

Will man mit einer, in allen vorkommenden Fällen kaum von der Wahrheit abweichenden Näherung zufrieden seyn, so kann man (14) weiter entwickeln. Man hat nämlich:

$$U = \log \frac{P}{P'} + \log \psi$$

und wenn man für $\log \psi$ das erste Glied seiner Entwicklung, oder

$$\frac{UU}{2\mu} \{ v(1-d)^2 + v_i(1-d_i)^2 + v_{ii}(1-d_{ii})^2 \} = UU \cdot 0,003675$$

und für U seinen Ausdruck schreibt:

$$\frac{H'-H}{T(1+kT)} = \log \frac{P}{P'} + \left\{ \frac{H'-H}{T(1+kT)} \right\}^2 0,003675.$$

Die Aenderung, welche die Befolgung der *Dalton*'schen Ansicht von der Zusammensetzung der Luft, in dem nach der älteren berechneten Werthe von $H'-H$ hervorbringt, ist also:

$$+ \frac{(H'-H)^2}{T^2(1+kT)^2} 0,003675$$

und, wenn man $H'-H = n \cdot 1000$ Toisen setzt

$$= + \frac{nn \cdot 0^T,391}{1+kT} \dots \dots \dots (15)$$

Diese Aenderung ist viel zu klein, als daß man je hoffen dürfte, durch barometrische Höhenmessungen eine Entscheidung für oder wider die Ursache, aus welcher sie hervorgeht, zu erhalten. Sie wird weit überwogen von dem Einflusse der immer vorhandenen Störungen des Gleichgewichtes der Atmosphäre, so wie auch von der Unsicherheit des im 2^{ten} Art. angewandten Gesetzes der Wärmeänderung zwischen beiden Höhen, wo der Thermometerstand beobachtet ist. Selbst der geometrischen Messung des Höhenunterschiedes würde äußerst schwer eine Sicherheit gegeben werden können, welche groß genug wäre, um ein Urtheil über eine Größe zu gewähren, welche so klein ist, als die, auf welcher die Entscheidung zwischen beiden Annahmen beruht.

6.

Die nothwendige Verfolgung der *Dalton*'schen Annahme in Beziehung auf die barometrischen Höhenmessungen giebt mir Veranlassung, auch meine Ansicht dieses vielbesprochenen Gegenstandes mitzutheilen. Diese Annahme stützt sich hauptsächlich auf das Verhalten des Wasserdampfes, sowohl für sich allein, als in seiner Vermischung mit Luft.

Wenn eine Flüssigkeit in einen leeren Raum gebracht wird, so entwickelt sie Dämpfe, so lange, bis diese eine bestimmte von der Wärme des Raumes abhängige Dichtigkeit erlangt haben. *Dalton* hat diese Dichtigkeit im Falle des Wasserdampfes, für alle Wärmeabstufungen zwischen den Wärmen des gefrierenden und des siedenden Wassers, bestimmt und durch unzweifelhafte Versuche gezeigt, daß die Dämpfe, eben-

sowohl wenn der Raum Anfangs mit trockener Luft von beliebiger Dichtigkeit gefüllt, als wenn er Anfangs leer ist, genau dieselbe Dichtigkeit erlangen. Jeder Versuch, diese Dichtigkeit (bei gleichbleibender Wärme) zu vergrößern, ist erfolglos: wird der mit reinem dichtesten Dampfe gefüllte Raum, im Verhältnisse $1:1-n$ verkleinert, so verwandelt sich ein Theil des Dampfes, welcher sich zu dem Ganzen verhält wie $n:1$, in Flüssigkeit; genau dieselbe Verwandlung tritt ein, wenn der mit der Mischung von dichtestem Dampfe und beliebig dichter Luft gefüllte Raum, in demselben Verhältnisse verkleinert wird; die Luft des Gemisches erfährt dadurch aber keine Verwandlung, sondern eine Vermehrung ihrer Dichtigkeit, in dem Verhältnisse $1-n:1$.

Dieses ist das reine Ergebniss von *Daltons* Versuchen. Es bestimmt den Unterschied zwischen Dampf und Luft, indem es jenem ein, von der Wärme abhängiges Maximum von Dichtigkeit beilegt, welches für diese nicht vorhanden ist. Es zeigt ferner, daß den Kräften an der Oberfläche der Flüssigkeit, welche ihre Verdampfung im leeren Raume bewirken, nicht durch den Druck entgegengewirkt wird, welchen diese Oberfläche von sie berührender Luft erfährt. In dieser letzteren Beziehung erinnere ich, daß *Poisson* aus ganz anderen Erscheinungen, den sogenannten capillaren, gefolgert hat, daß die Dichtigkeit der Oberfläche der Flüssigkeiten unendlich klein ist. Ob die Luftarten sämmtlich ein von der Wärme abhängiges Maximum der Dichtigkeit besitzen (wie von dem Kohlensäuregas schon bekannt ist), ob sie sich also von den Dämpfen nur durch die Größe dieses Maximums, oder specifisch, unterscheiden, kann für jetzt nicht entschieden werden, hier aber auch unberührt bleiben.

So lange die Dämpfe eine kleinere Dichtigkeit besitzen, als die größte, die sie in ihrer jedesmaligen Wärme erlangen können, sind sie nicht physisch von den Gasen verschieden. Sie befolgen nämlich das *Mariottesche* Gesetz, und *Gay-Lussac* hat gezeigt, daß sie dieselbe Ausdehnbarkeit durch die Wärme besitzen, welche allen Gasarten gemeinschaftlich ist. Sie verhalten sich also, so lange sie das Maximum ihrer Dichtigkeit nicht erreicht haben, sowohl für sich allein, als in der Vermischung mit Gasen, genau wie die letzteren. Ein Druck bringt, eben so wenig in den Dämpfen, als in den Gasen, eine Veränderung ihrer Beschaffenheit hervor, sondern diese tritt, die Dämpfe mögen rein, oder mit Gasen vermischt seyn, erst ein, wenn ein Versuch gemacht wird, ihre Dichtigkeit ihr Maximum überschreiten zu lassen; sie kann z. B. immer durch Verkleinerung des Raumes, in welchem sie sich befinden, hervorgebracht werden, und zwar in dem letzteren Falle ebenso, sowohl als in dem ersteren, indem die unbegrenzte Zusammenrückbarkeit der Gase die dazu erforderliche Verkleinerung des

Raumes jedesmal möglich macht. Wenn ferner ein Raum durch eine Luftart gefüllt ist, welche auf eine Einheit seiner Oberfläche einen Druck p ausübt, so hat die Hineinbringung einer andern Luftart, welche für sich allein, auf dieselbe Einheit, den Druck p , ausüben würde, keinen andern physischen Erfolg, als den, daß diese Einheit nun den Druck $p+p$, erfährt; genau denselben Druck erfährt sie aber, wenn statt der zweiten Luftart Dampf hineingebracht wird, welcher, gleichfalls für sich allein, den Druck p , ausüben würde. Endlich vermischen sich sowohl verschiedene Luftarten unter sich, als auch mit Dämpfen, in jedem beliebigen Verhältnisse.

Es ist also zwischen dem physischen Verhalten eines Gemisches eines Gases mit einem andern, und eines Gemisches des ersteren mit Dampf, durchaus kein Unterschied. Folglich kann dieses Verhalten des zweiten Gemisches nichts lehren, was durch das Verhalten des ersten nicht gelernt werden kann. Das Verhalten des mit Luft vermischten Wasserdampfes, welches *Daltons* Versuche vollständig an den Tag legen, ist also auch nicht lehrreicher, als das Verhalten jedes Gemisches zweier Gase, und eine Theorie, die auf das letztere nicht hätte gebauet werden können, kann auch in dem ersteren keine Stütze finden. Es würde auch, aus dem Verhalten eines Gemisches von Dampf und Luft nicht haben gefolgert werden können, daß die Luft den Dampf nicht drücke, wenn nicht, als sich von selbst verstehend, vorausgesetzt worden wäre, daß Druck den Dampf in Flüssigkeit verwandele, für welche Voraussetzung nichts destoweniger keine, ihre Rechtmäßigkeit andeutende Thatsache vorhanden ist.

Dieser Ansicht der über die Dämpfe erlangten Kenntnisse zufolge, geben sie keine Veranlassung zu der Annahme, Dampf werde nur von Dampf, nicht aber von Luft gedrückt. Mit dieser Veranlassung geht auch die Analogie verloren, welche für das ähnliche Verhalten des Gemisches verschiedener Gase geltend gemacht worden ist. Allein *Dalton* hat seine Annahme auch durch eine, von den Versuchen über den Wasserdampf unabhängige Wahrnehmung unterstützt, nämlich dadurch, daß ein specifisch schwereres Gas sich mit einem leichteren vermischt, selbst wenn dieses Anfangs höher liegt. Die *Dalton*-sche Annahme erklärt diese Wahrnehmung allerdings, allein damit kann nicht behauptet werden, daß sie allein sie begreiflich mache; das Aufsteigen von Flüssigkeiten in Röhren, welche durch sie benetzt werden, könnte z. B. durch die Annahme, die Schwere äußere innerhalb der Röhre ihre Wirkung unvollständig, erklärt werden; seine wahre Erklärung ist aber bekanntlich hiervon verschieden.

Wenn ich nicht irre, so ist auch die Kleinheit der Veränderung der Beschaffenheit der Luft in einem Raume, in welchem sich viele Personen befinden, deren Athmen das Sauer-

stoffgas vermindern und das Kohlensäuregas vermehren muß, als für die Richtigkeit der *Daltonschen* Annahme sprechend, angeführt worden. In der That muß das Sauerstoffgas sich vorzugsweise aus der äußeren Luft ersetzen und das Kohlensäuregas vorzugsweise in diese übergehen, wenn die einzelnen Bestandtheile der inneren Luft nur von den gleichartigen der äußeren gedrückt werden. Die ersten Versuche dieser Art sind in einem der Pariser Schauspielhäuser von *Humboldt* und *Gay-Lussac* vorgenommen *) und haben eine Verminderung des Sauerstoffgehaltes von 0,007, so wie einen nicht näher bestimmten Kohlelsäuregehalt ergeben. Neuerlich hat *Dalton* diese Versuche in Räumen wiederholt **), welche gleichfalls durch zahlreiche Versammlungen gefüllt waren, und den Sauerstoffgehalt = 0,20325 gefunden, während er ihn in freier Luft = 0,2090 fand; auch zeigte sich mehr Kohlensäuregas als in freier Luft; in einem Falle, in welchem es bestimmt wurde, betrug es 0,01. Diese Versuche zeigen also wirkliche Veränderungen der Beschaffenheit der Luft, und es kommt nur darauf an, zu untersuchen, ob sie kleiner sind als die Veränderungen, die man nach der älteren Theorie erwarten durfte. Wenigstens die früheren dieser Versuche scheinen nicht in der Absicht angestellt zu seyn, dadurch die Richtigkeit der *Daltonschen* Theorie zu prüfen; allen fehlen die näheren Angaben, welche einer Berechnung zum Grunde gelegt werden müßten, namentlich die Angaben des cubischen Inhalts der Räume, deren Luft untersucht worden ist; der Anzahl der darin befindlichen Menschen und Lichtflammen und der Stärke der letzteren; der Verbindungen zwischen dem Inneren und Aeußeren und der Wärme in verschiedenen Höhen; auch ist der untersuchte Fall wohl nicht einfach genug, um ihn streng richtig berechnen zu können. Um aber eine ohngefähre Uebersicht zu erhalten, bin ich von der in den Preussischen Städten beobachtet werdenden Regel, die Räume, welche Versammlungen aufnehmen sollen, nicht kleiner zu machen, als 100 Cubikfuß für jeden Menschen, ausgegangen, habe aber diesen Raum noch um ein Drittel vermindert; ferner habe ich nach *Davys* Versuchen ***) angenommen, daß jeder Mensch in einer Minute die Luft von 4,9 Cubiczoll Stickstoffgas und 19,5 Cubiczoll Sauerstoffgas vermindert, dagegen um 15,4 C. Z. Kohlensäuregas vermehrt. Wenn man das, bei der Verminderung von 9 C. Z. in einer Minute nothwendige Eindringen der äußeren Luft durch die jedesmal vorhandene Vermehrung der Wärme ausgeglichen annimmt, so findet man aus diesen Zahlen, daß das im 1^{sten} Art. angeführte Verhältniß der drei in

der Luft Anfangs befindlichen Gasarten, nämlich:

$$v = 0,78605, \quad v, = 0,21325, \quad v_{\text{H}} = 0,00070$$

sich nach Verlauf einer Stunde in

$$v = 0,78719, \quad v, = 0,20405, \quad v_{\text{H}} = 0,00876$$

ändert. Entzieht man der vermischten Luft das Kohlensäuregas, so ist das Verhältniß der beiden anderen Gase Anfangs = 0,7866 : 0,2134 und nach Verlauf der Stunde = 0,7941 : 0,2059. Dieses Resultat der Rechnung ist dem Resultate der Versuche nicht so unähnlich, daß man daraus schließen dürfte, die Voraussetzung, auf welche die erstere gebauet ist, sei unrichtig; vielmehr scheint es, daß man diese Vergleichung beider leichter gegen als für die *Daltonsche* Annahme geltend machen könnte. Ich glaube überhaupt, daß, wenn man Versuche zu haben wünscht, welche unmittelbar gegen oder für diese Annahme entscheiden, man sie am leichtesten erhalten wird, indem man das Eindringen atmosphärischer Luft in einen, mit einem ihrer Bestandtheile, oder auch mit beiden in einem anderen Verhältnisse gefüllten, nicht luftdicht verschlossenen Raum beobachtet. Um diese Versuche zu vereinfachen und die Grundlagen ihrer Berechnung leichter zu erhalten, müßte der Raum nicht das Innere eines Saales, sondern das Innere einer Glasglocke seyn.

Wenn keine besondere Hypothese über die moleculare Beschaffenheit der Gase und Dämpfe gemacht wird, so ist offenbar, daß ein Gastheilchen ein angrenzendes Theilchen von gleicher oder ungleicher Beschaffenheit, mit gleicher Kraft (mit derselben, womit es sich auszudehnen strebt) drücken muß. Ohne eine solche Hypothese ist also die *Daltonsche* Annahme im Widerspruche mit den Grundsätzen der Aerostatik. Unbedingt aber kann dieses nicht eher behauptet werden, als bis der Beweis geführt sein wird, daß keine Hypothese dieser Art mathematisch möglich sei. Die von mir entwickelte Ansicht des Verhaltens der Dämpfe bedarf dagegen nicht der Rechtfertigung durch eine besondere Hypothese, indem als unmittelbares Resultat der Erfahrung und als Unterscheidungszeichen zwischen Dämpfen und Gasen angesehen wird, daß die Dichtigkeit der Dämpfe nicht über einen gewissen, von der Wärme abhängigen Grad, gesteigert werden kann. Will man aber auch auf die moleculare Beschaffenheit eingehen, so ist leicht begreiflich, daß eine Entfernung der kleinsten Theilchen der Dämpfe stattfindet, für welche ihre Anziehungskraft der aus der Wärme hervorgehenden Abstosungskraft gleich wird, so daß jede kleinere Entfernung die erstere überwiegend macht und die Vereinigung der Theilchen zur Folge hat.

7,

Wenn ich die *Daltonsche* Annahme, trotz dem, was ich eben darüber gesagt habe, in Beziehung auf die trockenen Bestandtheile der Luft verfolgt habe (Art. 5), so darf ich noch

*) *Gilberts Annalen der Physik*. Bd. XX. S. 88.

**) *Phil. Transact.* 1837. P. II. p. 363.

***) Nach *Gilberts* Berechnung. *Annalen der Physik* Bd. XIX. S. 312

weniger unterlassen, zu untersuchen, was daraus, in Beziehung auf den in der Atmosphäre enthaltenen Wasserdampf hervorgeht. Auch muß man diese Untersuchung durchführen, wenn man erfahren will, ob Beobachtungen über die Vertheilung des Wasserdampfes in der Atmosphäre für oder wider die *Dalton'sche* Annahme geltend gemacht werden können.

Ich werde also nach *Dalton* annehmen, der Wasserdampf in der Atmosphäre werde nur durch höhere Schichten seiner eigenen Art zusammengedrückt, oder er bilde eine, durch ihr eigenes Gleichgewicht bestehende Atmosphäre. Die Aenderung des Druckes dieser Dampfatmosphäre, welche der Vergrößerung dx der Höhe x entspricht, ist, der Formel (4) zufolge:

$$dp = - \frac{(g) 864 \cdot \delta}{336 \cdot 905} \left(\frac{a}{a+x} \right)^2 dx$$

oder, nach später eingeführten Bezeichnungen,

$$dp = - \frac{\delta}{\mu l' D} dX$$

Ihre Dichtigkeit δ folgt, bis sie ihr Maximum erreicht, dem *Mariotteschen* Gesetze, oder entspricht der Gleichung (3), welche für den gegenwärtigen Fall:

$$\delta \cdot E = p_r D d,$$

ist; wozu noch die zum Gleichgewichte wesentlich erforderliche Bedingung hinzukommt, daß das aus dieser Gleichung hervorgehende δ in keiner Höhe größer werde, als das der Wärme angemessene Maximum der Dichtigkeit; oder, der Bezeichnung des 4^{ten} Art. zufolge, die Bedingung, daß

$$p_r \geq \varphi t$$

sei.

Eliminirt man δ , so erhält man

$$\frac{dp_r}{p_r} = - \frac{d_r}{\mu l'} \frac{dX}{1+kt};$$

ein ganz ähnliches Differential ist schon im 2^{ten} Art., unter der Voraussetzung integrirt, daß die Wärme zwischen den beiden Höhen, wo sie beobachtet ist, sich so verändere, wie *Laplace* es annimmt. Dieser Voraussetzung zufolge ist

$$\frac{dX}{1+kt} = - \frac{2k}{i} dt$$

und daher das von der Höhe h , wo der Thermometerstand τ ist, und für welche ich den Druck des Wasserdampfes durch P , bezeichnen werde, an gezählte Integral:

$$\log \frac{P_r}{P} = \frac{d_r}{l'} \frac{2k}{i} (\tau - t)$$

oder

$$(16) \dots \dots \dots p_r = P \cdot 10^{-\frac{d_r}{l'} \cdot \frac{2k}{i} (\tau - t)}$$

Nimmt man den Druck P , in der Höhe $h = \alpha \varphi \tau$ an, wo α nicht größer als 1 sein kann, so fordert die zu erfüllende Bedingung, daß für jeden Werth von t ,

$$\alpha \varphi \tau \cdot 10^{-\frac{d_r}{l'} \cdot \frac{2k}{i} (\tau - t)} \geq \varphi t$$

oder

$$\alpha \varphi \tau \cdot 10^{-\frac{d_r}{l'} \cdot \frac{2k}{i} \tau} \geq \varphi t \cdot 10^{-\frac{d_r}{l'} \cdot \frac{2k}{i} t} \dots \dots \dots (17)$$

und wenn für $\varphi \tau$ und φt der Ausdruck (9) gesetzt wird, daß

$$\alpha 10^{-(\frac{d_r}{l'} \cdot \frac{2k}{i} - a) \tau - c \tau} \geq 10^{-(\frac{d_r}{l'} \cdot \frac{2k}{i} - a) t - c t} \dots \dots (18)$$

sei.

Wenn man t , mit zunehmender Höhe, ohne Begrenzung kleiner werdend annimmt, so muß es zwar einen negativen Werth erlangen, für welchen, selbst bei dem kleinsten Werthe von α , diese Bedingung nicht mehr erfüllt wird; man darf aber hieraus nicht schließen, daß die *Dalton'sche* Annahme mit dem Vorhandensein einer im Gleichgewichte befindlichen Wasserdampfatmosphäre von nicht verschwindender Dichtigkeit, unter allen Umständen unvereinbar sei. Das Abnehmen von t geht nämlich nicht ins Unendliche, sondern nur bis zu dem Werthe, den es an der Grenze der Atmosphäre besitzt; auch ist die Formel (9), worauf der Ausdruck der Bedingung beruht, nur eine Interpolationsformel, deren Form nicht gerechtfertigt werden kann, und für welche nichts anders geltend gemacht wird, als ihre mehr oder weniger genügende Uebereinstimmung mit den *Dalton'schen*, zwischen $t = 0$ und $t = 100^\circ$ gemachten Beobachtungen.

Wenn man indessen die Logarithmen der beiden Größen, zwischen welchen die Bedingung stattfindet, nimmt, so folgt daraus

$$\log \alpha \geq \left(\frac{d_r}{l'} \cdot \frac{2k}{i} - a + c(\tau + t) \right) (\tau - t)$$

und man weiß überdies, daß $\alpha \geq 1$, also $\log \alpha$ nicht positiv sein muß. Hieraus geht hervor, daß die Bedingung erfüllt wird, oder die Wasserdampfatmosphäre möglich ist, auch das ihre Dichtigkeit in der Höhe h bestimmende $\alpha (< 1)$ willkürlich bleibt, wenn

$$\frac{d_r}{l'} \frac{2k}{i} > a - c(\tau + t) \dots \dots \dots (19)$$

ist, was bis zur Grenze der Atmosphäre stattfinden muß; ferner, daß im entgegengesetzten Falle, wenn also, selbst in der Höhe h ,

$$\frac{d_r}{l'} \frac{2k}{i} < a - c(\tau + t) \dots \dots \dots (20)$$

ist, zwar auch eine sich im Gleichgewichte befindende Wasserdampfatmosphäre möglich ist, ihre Dichtigkeit in der Höhe h aber durch die Bedingung beschränkt wird, daß α kleiner sein muß, als

$$10^{\left(\frac{d_r}{l'} \cdot \frac{2k}{i} - a + c(\tau + t) \right) (\tau - t)} \dots \dots \dots (21)$$

für den Werth von t ist, welcher an der Grenze der Atmosphäre stattfindet. In einem besonderen Falle der Wärmeabnahme kann die Wasserdampf-atmosphäre in allen Höhen so dicht sein, als ihre Wärme erlaubt; dieser Fall fordert, daß

$$\frac{dp_i}{p_i} = -\frac{d_i}{\mu l'} \frac{dX}{1+kt} = \frac{d\varphi_i}{\varphi_i}$$

oder, unter Voraussetzung des immer angewandten Ausdruckes

$$(22) \dots\dots\dots X-H = \frac{l'}{d_i} \left\{ (a-2c\tau)(1+k\tau)(\tau-t) - \left(\frac{ak}{2} - c + 2ck\tau \right) (\tau-t)^2 - \frac{2}{3} ck(\tau-t)^3 \right\}$$

Setzt man die oben schon angewandten Werthe von l' , d_i , a , c , k in diese Gleichung, so erhält man das Gesetz der Wärmeabnahme, welches, unter der Voraus-

$$X-H = 424,0 (1-\tau \cdot 0,00447) (1+\tau \cdot 0,00375) (\tau-t) + 0,15 (1-\tau \cdot 0,0463) (\tau-t)^2 - 0,003 (\tau-t)^3$$

Setzt man ferner, dem 2ten Art. zufolge,

$$\frac{2k}{i} = \frac{H'-H}{\tau-\tau'} \cdot \frac{1}{1+kT}$$

und bezeichnet man den Werth, welchen t an der äußersten Grenze der Atmosphäre hat, durch (t) , so verwandelt sich die Bedingung (19) in:

$$\frac{H'-H}{\tau-\tau'} > \frac{l'}{d_i} (1+kT) \left\{ a-c(\tau+(t)) \right\} > \left\{ 424,0 - 0,95 (\tau+(t)) \right\} (1+kT)$$

In der Wirklichkeit ist die Veränderung der Höhe, welche eine

$$\log \alpha < \left\{ \frac{H'-H}{\tau-\tau'} \frac{1}{1+kT} \cdot \frac{d_i}{l'} - a + c(\tau+(t)) \right\} (\tau-(t))$$

oder

$$(1+kT) \frac{l'}{d_i} \log \alpha < \left\{ \frac{H'-H}{\tau-\tau'} - [424,0 - 0,95 (\tau+(t))] (1+kT) \right\} (\tau-(t))$$

woraus

$$\tau-(t) < \frac{-\frac{l'}{d_i} \log \alpha \cdot (1+kT)}{[424,0 - 0,95 (\tau+(t))] (1+kT) - \frac{H'-H}{\tau-\tau'}}$$

folgt. Kennt man also das letzte Glied des Nenners und zugleich α , so kann man nach dieser Formel einen Werth von $\tau-(t)$ berechnen, der, unter der verfolgten Voraussetzung der *Daltonschen* Annahme, größer ist als der Wärmeunterschied zwischen der Höhe h und der Grenze der Atmosphäre. Nimmt man z. B. $\frac{H'-H}{\tau-\tau'} = 85$ Toisen und $T=0$, und setzt man die Atmosphäre an der Oberfläche der Erde, halb gesättigt mit Wasserdampf voraus, so erhält man näherungsweise $\tau-(t) < 13^{\circ}5$, was kaum die gewöhnliche Wärmeabnahme in 1200 T. Höhe, geschweige denn an der Grenze der Atmosphäre erreicht; ist die letztere $= n \cdot 13^{\circ}5$, so wird die größte Grenze von $\alpha = \frac{1}{2}n$. Die *Daltonsche* Annahme ist also nur mit einer sehr geringen Menge Wasserdampfes in der Atmosphäre, und nicht mit der wirklich darin vorkommenden ver-

von φ_i ,

$$-\frac{d_i}{l'} dX = (a-2ct) (1+kt) dt$$

sei. Hieraus folgt durch Integration:

$$a(\tau-t) + \left(\frac{ak}{2} - c \right) (\tau^2-t^2) - \frac{2}{3} ck(\tau^3-t^3) = \frac{d_i}{l'} (X-H)$$

wofür auch geschrieben werden kann:

setzung der *Daltonschen* Annahme, allein mit einer allent halben durch Wasserdampf gesättigten Atmosphäre verein bar ist:

Abnahme des Thermometerstandes von 1° hervorbringt, weit kleiner, etwa $= 85$ Toisen. Mit diesem wirklichen Zustande der Atmosphäre kann also, der *Daltonschen* Annahme zufolge, ihre Sättigung durch Wasserdampf, an der Oberfläche der Erde, nicht vereinigt werden. Wird aber die Bedingung (20) erfüllt, oder ist

$$\frac{H'-H}{\tau-\tau'} < (424,0 - 1,9\tau) (1+kT)$$

so ist, der Formel (21) zufolge, nachdem man darin den Ausdruck von $\frac{2k}{i}$ substituirt hat,

einbar. Wenn man die in dieser Untersuchung gemachte Voraussetzung des Gleichgewichtes der Atmosphäre als richtig ansehen könnte, so würde das Vorkommen einer beträchtlichen Menge Wasserdampfes in ihr, ein nicht zu beseitigendes Argument gegen die *Daltonsche* Annahme sein; dieses Gleichgewicht ist aber nie wirklich vorhanden, und namentlich verdanke ich Herrn Professor *Neumann* die Bemerkung, daß die Dichtigkeit von der Oberfläche der Erde aufsteigenden Wasserdampfes durch den Widerstand vermehrt werden muß, welchen die Luft ihm entgegensetzt.

8.

Ich komme nun zu der Untersuchung der Voraussetzung daß die Wärme zwischen beiden Höhen, wo sie beobachtet ist, sich nach dem von *Laplace* dafür angenommenen Gesetze

(Art. 2) verändere. Die Gleichung zwischen t und X , welche dieses Gesetz ausspricht, ist, wie aus dem 2^{ten} Art. hervorgeht:

$$(23) \dots (1+kt)^2 = (1+k\tau)^2 \frac{H'-X}{H-H} + (1+k\tau')^2 \frac{X-H}{H'-H}$$

Man hat aber keinen Grund, mäßige Abweichungen des Ueberganges der Wärme von τ zu τ' , von der durch diese Gleichung ertheilten Vorschrift, als unstatthaft zu betrachten; es bleibt z. B. gänzlich zweifelhaft, ob nicht zwischen den beiden Höhen ein Unterschied der wahren Wärme, von der aus dieser Vorschrift hervorgehenden, vorhanden ist, welcher bis auf ein Zehntel von $\tau - \tau'$ steigt. Es ist daher nicht überflüssig, den Einfluss solcher Abweichungen weiter zu verfolgen.

Ich werde voraussetzen, daß der wahre Werth von

$$\frac{1}{E} = \frac{1 - 4\alpha k \frac{(\tau-t)(t-\tau')}{\tau-\tau'}}{1+kt}$$

ist, wo t den der Gleichung (23) entsprechenden Werth des Thermometerstandes in der Höhe x , und α einen beständigen Coefficienten bezeichnet, dessen grössere oder kleinere Annahme die Grösse der Abweichung von dem Gesetze bestimmt. Dieser Ausdruck von $\frac{1}{E}$ ist so gewählt, daß er in den beiden Grenzen mit dem vorigen übereinstimmt, und daß die Abweichung der Wärme, welche er voraussetzt, von der aus der angenommenen Gleichung folgenden, etwa für $t = \frac{1}{2}(\tau + \tau')$, oder $x = \frac{1}{2}(h + h')$, ihr Maximum $= \alpha(\tau - \tau')$ erlangt. Man erhält dadurch

$$\left(\frac{a}{a+x}\right)^2 \frac{dx}{E} = -\frac{2k}{i} dt \left\{ 1 - 4\alpha k \frac{(\tau-t)(t-\tau')}{\tau-\tau'} \right\}$$

und das von h bis h' genommene Integral:

$$= \frac{2k}{i} (\tau - \tau') \left\{ 1 - \frac{2}{3}\alpha k (\tau - \tau') \right\}$$

$$(24) \dots \dots = \frac{H'-H}{1+kT'} \left\{ 1 - \frac{2}{3}\alpha k (\tau - \tau') \right\}$$

Ich glaube nicht, daß man in irgend einem vorkommenden Falle geneigt sein wird, für wahrscheinlich zu halten, daß α sich innerhalb sehr enger Grenzen, z. B. $\pm \frac{1}{10}$ befinde; erreicht es eine dieser Grenzen, so ist die daraus folgende Verbesserung des, unter der Voraussetzung des Gesetzes (23) gefundenen Höhenunterschiedes

$$= \pm \frac{H'-H}{1+kT'} \frac{\tau-\tau'}{4000},$$

also z. B. für einen Höhenunterschied von 1000 Toisen, für welchen $\tau - \tau'$ gewöhnlich 12° ist, etwa ± 3 Toisen. Man wird desto weniger geneigt sein, α als nothwendig sehr klein voranzusetzen, da man nicht übersehen wird, daß die Wärme der Luft, welche man an einem, in der Ebene oder auf einer Höhe liegenden Punkte beobachtet, immer an der Wärme der

Oberfläche der Erde an diesem Punkte Theil nimmt. Man sieht hieraus, wie wenig geeignet barometrische Höhenmessungen schon aus diesem Grunde allein sind, über Fragen zu entscheiden, deren Beantwortung auf kleinen Verschiedenheiten zwischen einer Theorie und der Erfahrung beruht. Es ist übrigens nicht unwahrscheinlich, daß spät in der Nacht vorgenommene barometrische Höhenmessungen besser untereinander übereinstimmen werden, als am Tage gemachte, wo die Sonne die Oberfläche der Erde erwärmt.

9.

Es ist bekannt, daß *Gay-Lussac* den hier durch k bezeichneten Werth, durch fast vollkommen untereinander übereinstimmende Versuche $= 0,00375$ gefunden hat; auch daß *Dalton*, aus den seinigen genau dasselbe Resultat erhalten hat. Beide große Physiker haben beabsichtigt, die Vergrößerung unmittelbar zu bestimmen, welche die Raumesinheit trockener Luft erfährt, indem man sie bei gleichbleibendem Drucke aus der Wärme des gefrierenden Wassers in die des siedenden bringt. Nicht nur die Uebereinstimmung der einzelnen Versuche beider Reihen untereinander, sondern auch der Resultate beider, hat die Annahme allgemein gemacht, daß die Bestimmung $k = 0,00375$ zu den sichersten gehöre, welche man besitzt; und es würde kein Grund, diese Annahme in Zweifel zu ziehen, vorhanden sein *), wenn nicht neuerlich eine Arbeit von *Rudberg* bekannt geworden wäre, welche sich durch große darauf verwandte Vorsicht, namentlich in der Austrocknung der angewandten Luft, auszeichnet, allein ein beträchtlich kleineres Resultat, nämlich $k = 0,003648$, ergibt. Indessen sollte jede neuere Bestimmung, welche gegen eine ältere, durch eigenes Gewicht und durch häufige allgemeine Anwendung gewissermaßen classisch gewordene, streitet, immer nur von einer genauen Critik der älteren begleitet, auftreten; nur wenn sich aus dieser Critik Gründe zum Mißtrauen gegen

*) Ich selbst habe zwar die Zahl, welche man statt k , bei der Berechnung der astronomischen Strahlenbrechungen, anwenden muß, aus meinen Beobachtungen bestimmt und $= 0,0036438$ gefunden; allein diese Zahl muß verschieden von k , und zwar kleiner sein, wie aus der VII. Abthl. meiner Beob. S. XI hervorgeht. Man könnte ihre Aufsuchung ersparen, wenn man, für die Zeit jeder Beobachtung einer Strahlenbrechung, auch die Beobachtung des Wasserdampfgehaltes der Luft besäße; der Mangel dieser Beobachtung sollte und mußte durch meine Untersuchung, in soweit er ohne Kenntniß des jedesmaligen, zufälligen Zustandes der Luft beseitigt werden kann, weniger nachtheilig gemacht werden. Als ein Beitrag zur Bestimmung von k ist ihr Resultat nicht anzusehen, sondern nur als ein Beitrag zur Kenntniß der astronomischen Strahlenbrechungen.

die ältere ergeben, darf billigerweise angenommen werden, daß die neuere den Vorzug verdient. *Rudberg* hat sich auf diese Critik nicht eingelassen. Da der Unterschied beider Bestimmungen nicht durch die zufälligen Fehler der Versuche, so wie sie sich aus der Uebereinstimmung der einzelnen, sowohl der früher als der später gemachten, ergeben, erklärt werden kann, also auf einen beständigen Fehler deutet, so darf von dem arithmetischen Mittel beider Resultate nicht die Rede sein. Meiner Meinung nach darf für jetzt nichts Anderes geschehen, als beide Resultate anzuwenden und über den Unterschied des dadurch Erlangten spätere Entscheidung abzuwarten.

10.

Nachdem ich die verschiedenen Voraussetzungen, welche der Formel (11) zum Grunde liegen, durchgegangen bin, kehre ich zu dieser Formel zurück und werde nun zeigen, welche Anwendung auf barometrische Höhenmessungen davon gemacht werden muß.

Die Drücke P und P' in den Höhen h und h' kann man aus den daselbst gemachten Barometerbeobachtungen ableiten.

$$= \log b - \log \frac{336,905 (53242 + (t))}{53242} - \mu t \left\{ \frac{1}{5550} - \frac{1}{53242} \right\} - \frac{2\mu}{a} H$$

Setzt man für a das geometrische Mittel beider halben Axen des Erdsphäroids (nach *Astron. Nachrichten* Nr. 333 ist sein $\log = 6,5140838$), und für (t) die Normaltemperatur des französischen Fußmaasses $= 16^\circ 25$, so wird

$$\log P = \log b - \log .337,008 - t . 0,000070095 - \frac{H}{3760707}$$

Man erhält also

$$\log \frac{P}{P'} = \log b_1 - \log b'_1 + \frac{H' - H}{3760707}$$

$$\log b_1 - \log b'_1 = \frac{(g)(H' - H)}{l(1 + kT)} \left\{ 1 - \frac{l(1 + kT)}{(g) \cdot 3760707} - \alpha \frac{0,863}{V(b, b')} 10^{aT - cT^2} \right\}$$

Verwechselt man (g) , im Nenner des zweiten Gliedes, mit 1, was keinen merklichen Einfluß hat, und nimmt man für α die halbe Summe seiner Werthe an beiden Beobachtungspunkten $= \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$, so wird die in den Klammern befindliche Größe

$$= \frac{399,17 - kT}{400,17} \left\{ 1 - (\alpha + \alpha') \frac{172,67}{V(b, b')} \cdot \frac{10^{aT - cT^2}}{399,17 - kT} \right\}.$$

Bezeichnet man daher

$$l(1 + kT) \frac{400,17}{399,17 - kT} \text{ durch } V$$

$$\frac{172,67 \cdot 10^{aT - cT^2}}{399,17 - kT} \text{ durch } W$$

so ergibt die Gleichung:

$$H' - H = \frac{\log b_1 - \log b'_1}{(g)} \frac{V}{1 - \frac{(\alpha + \alpha')W}{V(b, b')}}.$$

Bezeichnet man eine Barometerhöhe durch b , die Wärme des Quecksilbers und der Scale, auf welcher sie gemessen worden ist, durch t , und nimmt man an, daß diese, wie gewöhnlich, von Messing verfertigt ist, so erhält man die Masse Quecksilbers, welche jede Flächeneinheit trägt

$$= b \cdot \frac{53242 + t}{53242 + (t)} \cdot \frac{5550}{5550 + t'}$$

wo (t) die Normaltemperatur der Maasseinheit der Barometerscale bedeutet, und wo die Raumesinheit Quecksilber, in der Wärme des schmelzenden Eises, zur Einheit der Masse genommen ist. Diese Masse drückt im Verhältnisse der Schwere, welcher sie ausgesetzt ist, also mit der Kraft

$$(g) \left(\frac{a}{a + h} \right)^2,$$

und der Druck, den sie ausübt, ist das Product beider, durch die angenommene Einheit des Druckes ($= 336,905$) dividirt. Man erhält also

$$P = \frac{(g)b}{336,905} \left(\frac{a}{a + h} \right)^2 \cdot \frac{53242 + t}{53242 + (t)} \cdot \frac{5550}{5550 + t'}$$

und seinen, in der Formel (11) vorkommenden *Briggschen* Logarithmen, mit hinreichender Annäherung:

wo $\log b_1$ und $\log b'_1$, um abzukürzen, für $\log b - t \cdot 0,00007$ und $\log b' - t' \cdot 0,00007$ gesetzt sind. Ferner erhält man, ohne merklichen Fehler:

$$V(P, P') = \frac{V(b, b')}{337,008}.$$

Setzt man beides in (11) und überdies $\frac{l}{(g)}$ für l' , so wird diese Gleichung:

$$1 - \frac{l(1 + kT)}{(g) \cdot 3760707} - \alpha \frac{0,863}{V(b, b')} 10^{aT - cT^2}$$

und da

$$H' - H = \frac{ah'}{a + h'} - \frac{ah}{a + h} = h' - h - \frac{h'h'}{a} + \frac{hh}{a}$$

ist:

$$h' - h - \frac{h'h'}{a} + \frac{hh}{a} = \frac{\log b_1 - \log b'_1}{(g)} \frac{V}{1 - \frac{(\alpha + \alpha')W}{V(b, b')}} \dots (25)$$

Dieses ist die zur Anwendung bequemste Umformung der Gleichung (11). Sie kann nicht weiter abgekürzt werden, wenn die Freiheit nicht aufgeopfert werden soll, den Wasserdampfgehalt der Luft, so wie man ihn jedesmal durch das Psychrometer erkennen kann, richtig in Rechnung zu bringen. Man kann auch den, zur Erleichterung der Rechnung bestimmten Hilfstafeln, eine Einrichtung geben, welche die Mühe, den Wasserdampf gehörig zu berücksichtigen, höchst unbedeutend macht.

11.

Ich werde noch diese Hülftafeln erklären. Sie sind logarithmisch eingerichtet, so wie die kleinen, sehr bequemen Tafeln von *Gaußs*. Sie sind aber etwas weitläufiger; sowohl weil sie das gesuchte Resultat unter den beiden Annahmen von k , nämlich $= 0,00375$ und $0,003648$ ergeben sollen, als auch weil der Einfluss des Wasserdampfes vollständiger in Rechnung gebracht werden soll, als nach der von *Laplace* gewählten Formel geschieht.

Bezeichnet man

$$\log Br \{ \log b, - \log b' \} \text{ durch } B$$

$$\frac{1}{1 - \frac{(\alpha + \alpha') W}{\sqrt{(b, b')}}} = V'$$

$$\frac{1}{(g)} \dots \dots = G$$

$$\text{so ist der Logarithme von } h' - h - \frac{h' h'}{a} + \frac{h h}{a}$$

$$= B + \log V + \log V' + \log G$$

Die Tafel I enthält in ihrer ersten Spalte für $k = 0,00375$, in der letzten für $k = 0,003648$ berechnet:

$$\log V = \log \frac{9397,74 \cdot 400,17 (1 + kT)}{399,17 - kT}$$

ihr Argument ist $2T = \tau + \tau'$; in der zweiten Spalte enthält sie

$$\log W = \log \frac{172,67 \cdot 10^{\alpha T - c T^2}}{399,17 - kT}$$

und zwar hat die Verschiedenheit der beiden Annahmen von k keinen Einfluss auf die letzte Decimalstelle von $\log W$, weshalb nur eine Spalte damit gefüllt werden durfte. Wenn man von dem daraus entnommenen Werthe von $\log W$ die halbe Summe der (schon aufgesuchten) Logarithmen von b und b' abzieht, so ist der Rest der Logarithme von

$$\frac{(\alpha + \alpha') W}{\sqrt{(b, b')}}$$

unter der Voraussetzung $\alpha = \alpha' = \frac{1}{2}$; sollen α und α' anders angenommen werden, so muß noch $\log(\alpha + \alpha')$ addirt werden. Hierdurch hat man das Argument von Tafel II, welche $\log V'$ enthält. Tafel III enthält, mit dem Argumente $\varphi = \text{Polhöhe}$:

$$\log G = \log \frac{1}{1 - 0,0026257 \cos 2\varphi}$$

welche Formel auf dem Werthe der Zunahme der Secundenpendellänge von dem Aequator bis zu den Polen beruht, welchen Herr *Baily*, aus der Berechnung aller bekannt gewordenen Beobachtungen des Pendels, im VII. Bande der Schriften der Astr. Society p. 94, abgeleitet hat.

Die Summe von B und der [aus den drei Tafeln genommenen Zahlen ist $= \log \left\{ h' - h - \frac{h' h'}{a} + \frac{h h}{a} \right\}$; um aus dem hierdurch bekannt werdenden Werthe dieser Gröfse, $h' - h$ selbst zu finden, muß man $\frac{h' h'}{a}$ addiren und $\frac{h h}{a}$ subtrahiren, welche beide durch Tafel IV gegeben werden, indem man mit h' und mit h in sie eingeht.

Um alle Bezeichnungen und Vorschriften beisammen zu haben, setze ich sie noch einmal her:

b, b' Barometerstände, auf einer in Pariser Linien getheilten Scale abgelesen.

t, t' Stände des Centesimalthermometers am Barometer.

τ, τ' Stände des Centesimalthermometers in freier Luft.

α, α' Sättigungsgrade der Luft durch Wasserdampf.

Die Berechnung des Höhenunterschiedes der Punkte, wo diese Beobachtungen gemacht worden sind, fordert die Aufsuchung von:

1. $\log b, = \log b - t \cdot 0,00007$; $\log b' = \log b' - t' \cdot 0,00007$.

2. $B = \log \{ \log b, - \log b' \}$

3. $\log V$ und $\log W$, welche mit dem Argumente $\tau + \tau'$, aus Tafel I genommen werden.

4. $\log V'$, welchen Tafel II, mit dem Argumente $\log \frac{(\alpha + \alpha') W}{\sqrt{(b, b')}}$ ergibt.

5. $\log G$, welchen Tafel III mit dem Argumente Polhöhe $= \varphi$ ergibt.

6. $\log$ des genäherten Höhenunterschiedes $= B + \log V + \log V' + \log G$.

7. Der wahre Höhenunterschied ist der genäherte $\pm$ dem Unterschied der kleinen Verbesserungen, welche man aus Tafel IV, mit den Argumenten gröfsere und kleinere Höhe, erhält.

Zum Beispiele wähle ich eine von *d'Aubuissons* Messungen der Höhe des Monte-Gregorio über einem Punkte, dessen Höhe $h = 128,3$ Toisen ist; sie findet sich im *Traité de Géognosie* I p. 481. Da der Wasserdampfgehalt der Luft nicht beobachtet ist, so nehme ich $\alpha = \alpha' = \frac{1}{2}$.

$$b = 329,013, \quad t = 19^{\circ}85, \quad \tau = 19^{\circ}95$$

$$b' = 268,215, \quad t' = 10,5, \quad \tau' = 9,9$$

$$\log b = 2,51721; \quad 7.t = 139; \quad \log b, = 2,51582 \quad \left. \begin{array}{l} \log b' = 2,42848; \quad 7.t' = 73,5; \quad \log b', = 2,42774,5 \end{array} \right\} \text{ halbe Summe *)}$$

$$\log \frac{b,}{b',} = 0,088075$$

$$B = 8,94485$$

Tafel	$B = 8,94485$	
I. $\tau + \tau' = 29^{\circ} 85' (k = 0,00375)$	$\log V = 3,99782$	$\log W = 0,0397$
II. Arg. = 7,5679.....	$\log V' = 161$	$^*) \dots 2,4718$
III. $\varphi = 45^{\circ} 32'$	$\log G = -2$	$7,5679$
	$2,94426$	
genäherter Höhenunterschied.....	$879^{\circ} 54$	
IV. $h' = 1007,8$, $h = 128,3$	$+0,31$	
	$h' - h \dots \dots 879^{\circ} 85$	

D'Aubuisson berechnet selbst $879^{\circ} 7$; aus den *Gauß'schen* Tafeln erhält man $879^{\circ} 63$. Will man $k = 0,003648$ annehmen, so erhält man $1^{\circ} 26$ weniger. Nimmt man die Luft ganz trocken an, so erhält man $3^{\circ} 24$ weniger; nimmt man sie ganz feucht an, $3^{\circ} 28$ mehr.

Bessel.

Schreiben des Herrn *Dumouchel*, Directors der Sternwarte auf dem Collegio Romano, an den Herausgeber.

Rom 1838. Aug. 9.

Après un trop long silence, il y a pourtant déjà quelque tems que je me propose de vous écrire pour vous communiquer plusieurs observations intéressantes, dont la lecture de votre journal a fourni l'occasion. Je n'ai différé un peu que pour donner plus de certitude à nos conclusions, leur concilier plus de confiance, et pour éloigner jusqu'au soupçon même de précipitation. Les observations faites par Mr *Encke* sur l'anneau de Saturne, avec un excellent oculaire achromatique, firent naître à mon très-cher Collègue le Père *De Vico*, l'espoir de voir quelque chose de semblable avec notre grande lunette, il ne fut pas trompé, car profitant de quelques nuits très-claires et sereines, qui ne sont pas rares actuellement sous notre beau ciel de Rome, Saturne se trouvant à peu près à sa moindre distance de la terre, avec son excellente vue et en employant nos plus forts oculaires, quoique non achromatiques, le soir du 29 mai il aperçut très-distinctement et fit voir à ses élèves et amis outre les 2 anneaux déjà connus, 3 autres divisions, ou lignes noires, l'une presque au milieu de l'anneau extérieur et deux sur l'anneau intérieur. Les observations des jours suivans donnèrent quelque variation dans le nombre des zones selon que l'air était plus ou moins pur et serein. Vers la culmination de la planète, on voyait quelques fois jusqu'à 6 anneaux (si l'on peut leur donner ce nom); la distinction étoit telle, qu'on n'y pouvoit soupçonner aucun illusion d'optique.

Mais ce qui nous paroît plus important encore, à l'occasion et dans le cours de ces observations, ils apperçurent très-bien les 7 satellites de Saturne, même les deux voisins de la planète, qu'on dit n'avoir encore été vus que par *Herschel*. Ceux-ci paroisoient auprès de l'anneau, et se voyoient très-bien, pendant quelque tems, vers la culmination: à mesure que la planète s'abaissoit, on les distinguoit toujours plus difficilement et on finissoit par les perdre de vue. Le Père *De Vico* n'a pu instituer d'observations sur le 1^{er} satellite, à partir de Saturne, avec les moyens que nous avons (J'ai écrit de suite à Mr *Cauchois* pour avoir 1 ou 2 bons oculaires achromatiques munis de micromètres j'attends sa réponse.) mais il a déjà fait un assez grand nombre d'observations sur le second ayant soin de déterminer d'avance sa position approchée, pour plus de sûreté: ce qui l'a engagé en de très-longes calculs (car nous manquons de secours pour cet objet) et lui a donné lieu de déployer une grande capacité, avec une rare patience et une persévérance à toute épreuve. Ce sera l'objet d'un mémoire au quel il travaille sans relâche.

A partir du mois de juillet les 2 prem. satell. se voyant plus difficilement il y avoit pourtant encore dans ce mois, quelques belles nuits où on les voyait très-bien tous les sept chacun à sa place.

E. G. Dumouchel,
Pr. de la Cie de Jésus.

Inhalt.

Bemerkungen über barometrisches Höhenmessen. Von Herrn Geheimen-Rath und Ritter *Bessel*. p. 329.

Schreiben des Herrn *Dumouchel*, Directors der Sternwarte auf dem Collegio Romano, an den Herausgeber. p. 359.