CONTRIBUTION À LA THÉORIE D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA PHYSIQUE.

Par M. S. ZAREMBA, à Cracovie.

Adunanza del 27 novembre 1904.

1. Considérons dans un espace à n dimensions un domaine déterminé (D), ne s'étendant pas à l'infini, ainsi qu'une fonction donnée $G(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ des deux systèmes de variables $x_1, \dots, x_n$ et $\xi_1, \dots, \xi_n$, définie pour tous les systèmes de positions distinctes des points $(x_1, \dots, x_n)$ et $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, dans le domaine (D) ou sur sa frontière. On peut se proposer de déterminer deux fonctions $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ et $\psi(x_1, \dots, x_n)$ vérifiant, dans tout le domaine (D), les équations fonctionnelles suivantes :

$$(1) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \int_{(D)} \dots \int G(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n) \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

et

$$(2) \quad F(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_n) - \lambda \int_{(D)} \dots \int G(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n) \psi(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

où $f(x_1, \dots, x_n)$ et $F(x_1, \dots, x_n)$ représentent des fonctions données, la lettre λ désignant un paramètre variable.

M. FREDHOLM *) le premier a mis en évidence, par sa remarquable solution de l'équation (2), les propriétés générales de cette équation dans le cas où l'on n'assujettit la fonction G qu'à des restrictions d'une nature très générale.

Les travaux de M. FREDHOLM ont été le point de départ de ceux

*) IVAR FREDHOLM, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du Problème de DIRICHLET* (Översigt of Köngl. Vaternskaps-Akademiens Förhandlingar, 1900, Stockholm); *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (Acta Mathematica, t. XXVII).

de M. HILBERT *), de M. PLEMELJ **) et de quelques autres mathématiciens, sur la théorie des équations (1) et (2) ou sur les applications de cette théorie. M. HILBERT, en développant d'une façon systématique, dans un brillant exposé, les applications variées de l'équation (2), a mis en lumière toute la portée de la théorie de M. FREDHOLM. M. HILBERT, en adoptant, en principe, la belle méthode de M. STEKLOFF ***), a étendu à de nouvelles séries les résultats obtenus précédemment par ****) M. STEKLOFF, M. KORN, M. KNESER et moi-même dans des recherches sur certaines séries analogues à la série de FOURIER et dont la théorie a été fondée par les travaux célèbres de M. POINCARÉ. C'est à M. HILBERT aussi que l'on doit la remarque suivante: lorsque la fonction $G(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ représente la fonction de GREEN ordinaire relative au domaine (D) , ou une des généralisations de cette fonction introduite dans ces derniers temps en analyse, lorsqu'en outre la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ possède des dérivées secondes continues et lorsqu'elle satisfait à des conditions aux limites appropriées, la fonction $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est égale à une certaine combinaison linéaire de la fonction f et de ses dérivées jusqu'au second ordre inclusivement. Cette remarque est en réalité la réciproque (immédiate d'ailleurs) du théorème que, dans le cas de la fonction de GREEN ordinaire, on peut énoncer de la façon suivante: la fonction u s'annulant sur la frontière du domaine (D) et vérifiant à l'intérieur de ce domaine l'équation aux dérivées partielles

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

peut être représentée par la formule suivante:

$$(4) \quad u = \mu \int_{(D)} \dots \int \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) G(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n,$$

*) DAVID HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, erste und zweite Mittheilung* (Göttinger Nachrichten, 1904, Hefte 1 und 3).

**) PLEMELJ, *Ueber die Anwendung der FREDHOLM'schen Funktionalgleichungen in der Potentialtheorie* (Sitzungsberichte, Wien 1903); *Zur theorie der FREDHOLM'schen Funktionalgleichung*; *Ueber lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie* (Monatshefte für Mathematik und Physik, XV. Jahrg., p. 93 u. p. 337).

***) STEKLOFF, *Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. H. POINCARÉ* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2^e série, t. II).

****) Consulter les mémoires cités par M. HILBERT dans le travail cité plus haut.

en désignant par μ un facteur numérique (égal à $\frac{1}{2\pi}$ pour $n = 2$ et à $\frac{1}{4\pi}$ pour $n = 3$) et en supposant que la fonction φ vérifie les conditions voulues pour que la fonction représentée par la formule (4) admette des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre inclusivement.

Pour que la solution de l'équation (1) donnée par M. HILBERT soit applicable, il faut:

1) Que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ satisfasse à certaines conditions aux limites.

2) Que cette fonction admette des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre inclusivement.

La première de ces restrictions est manifestement une condition de possibilité du problème, du moins dans le cas où la fonction $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, doit être finie, il est donc impossible de s'en débarrasser. Il n'en est au contraire pas de même de la seconde. Je me propose, et ce sera l'objet principal de ce travail, d'établir le théorème suivant:

Lorsque la fonction G représente la fonction de GREEN ordinaire relative au domaine (D) , ou l'une des fonctions de GREEN généralisées considérées par M. HILBERT et lorsque la fonction f vérifie la première des deux conditions qui viennent d'être énoncées, il est nécessaire et suffisant, pour qu'il existe une fonction continue φ vérifiant l'équation (1), que l'expression

$$\Delta(f, h) = \frac{\sum_{k=1}^n [f(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_k - h, \dots, x_n)] - 2nf(x_1, \dots, x_n)}{h^2}$$

ait pour limite, lorsque h tend vers zéro, une fonction $f_1(x_1, \dots, x_n)$, continue dans le domaine (D) ; lorsque cette condition est vérifiée, on obtiendra la fonction demandée $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ en remplaçant dans la formule de M. HILBERT *) l'expression:

$$\Delta(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

par la fonction $f_1(x_1, \dots, x_n)$.

Rien d'essentiel ne distingue les uns des autres les cas qui corres-

*) Loc. cit., pag. 238.

pondent aux différentes valeurs du nombre de dimensions n de l'espace considéré *). Nous prendrons $n = 3$ et nous établirons dans les n^{os} suivants une série de propositions d'où il sera aisé de déduire le théorème que nous venons d'énoncer.

2. Désignons par x, y, z et x', y', z' les coordonnées rectangulaires de deux points dans l'espace, par r leur distance, par $\varphi(x, y, z)$ une fonction continue dans tout le domaine (D) et par $d\tau'$ l'élément de volume relatif au point (x', y', z') . Posons ensuite

$$\Phi(x, y, z) = \int_{(D)} \varphi(x', y', z') \frac{d\tau'}{r},$$

où, comme l'indique l'indice (D) , l'intégration doit être étendue à tout le domaine (D) . Je dis que l'on aura

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \Delta(\Phi, h) = -4\pi\varphi(x, y, z),$$

quelle que soit la position du point (x, y, z) à l'intérieur du domaine (D) .

J'observe tout d'abord que l'on a

$$\Delta(\Phi, h) = \Delta(\Phi, -h)$$

quel que soit h ; on peut donc, sans nuire à la généralité de la démonstration, admettre que

$$h > 0.$$

Cela posé, envisageons, en même temps que les points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, les points $A(x+h, y, z)$, $B(x, y+h, z)$ et $C(x, y, z+h)$, ainsi que leurs symétriques A' , B' et C' par rapport au point M ; nous aurons :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\left(\frac{1}{r}, h\right) \\ = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{AM'} + \frac{1}{BM'} + \frac{1}{CM'} + \frac{1}{A'M'} + \frac{1}{B'M'} + \frac{1}{C'M'} - \frac{6}{r} \right] \end{array} \right.$$

et

$$(8) \quad \Delta(\Phi, h) = \int_{(D)} \varphi(x', y', z') \Delta\left(\frac{1}{r}, h\right) d\tau'.$$

Soient α, β et γ les cosinus directeurs du vecteur MM' et $P_{\alpha}(u)$ le

*) Je fais abstraction du cas $n = 1$ où mon théorème ne présenterait aucun intérêt.

polynôme de LEGENDRE de degré n en u . La formule (7) nous donnera :

$$(9) \quad \Delta\left(\frac{1}{r}, h\right) = 2 \sum_{m=2}^{\infty} [P_{2m}(\alpha) + P_{2m}(\beta) + P_{2m}(\gamma)] \frac{h^{2m-2}}{r^{2m+1}}$$

lorsque

$$r > h;$$

et

$$(10) \quad \Delta\left(\frac{1}{r}, h\right) = \frac{6}{h^2} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{r} \right) + 2 \sum_{m=2}^{\infty} [P_{2m}(\alpha) + P_{2m}(\beta) + P_{2m}(\gamma)] \frac{r^{2m}}{h^{2m+3}}$$

lorsque

$$r < h.$$

Désignons par ε un nombre positif non nul dont nous nous réservons de disposer plus tard.

La fonction $\varphi(x, y, z)$ étant continue, on pourra faire correspondre au nombre ε , si petit qu'il soit, un nombre positif ρ , différent de zéro, tel que l'inégalité

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \leq \rho^2$$

entraîne l'inégalité

$$(11) \quad |\varphi(x, y, z) - \varphi(x', y', z')| < \varepsilon.$$

Décrivons du point $M(x, y, z)$ comme centre une sphère (Σ) de rayon ρ et supposons que l'on ait pris ρ assez petit pour que cette sphère soit située toute entière à l'intérieur du domaine (D) . La sphère (Σ) décomposera le domaine (D) en deux autres (D_1) et (D_2) dont l'un, soit (D_1) , sera intérieur à cette sphère. Désignons par $I_1(h)$ et $I_2(h)$ les deux parties de l'intégrale (8) qui correspondent aux domaines (D_1) et (D_2) .

Nous aurons

$$(12) \quad \Delta(\Phi, h) = I_1(h) + I_2(h).$$

D'ailleurs

$$(13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} I_2(h) = \int_{(D_2)} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \varphi(x', y', z') d\tau' = 0.$$

Posons

$$A(h) = \int_{(D_1)} \Delta\left(\frac{1}{r}, h\right) \varphi(x, y, z) d\tau' = \varphi(x, y, z) \int_{(D_1)} \Delta\left(\frac{1}{r}, h\right) d\tau'$$

et

$$B(h) = \int_{(D_1)} \Delta\left(\frac{1}{r}, h\right) [\varphi(x', y', z') - \varphi(x, y, z)] d\tau';$$

nous aurons

$$(14) \quad I_1(h) = A(h) + B(h).$$

Supposons, comme nous en avons le droit, que

$$(15) \quad h < \rho.$$

On s'assurera au moyen d'un calcul facile que

$$(16) \quad A(h) = -4\pi\varphi(x, y, z).$$

Cherchons une limite supérieure de la valeur absolue de $B(h)$ et désignons à cet effet par δ une longueur inférieure à chacune des longueurs h et $\rho - h$. Cela posé, envisageons deux sphères (Σ_1) et (Σ_2) , de rayons $h - \delta$ et $h + \delta$, concentriques à la sphère (Σ) . Ces sphères décomposeront le domaine (D_1) en trois parties dont l'une sera limitée par la sphère (Σ_1) , la seconde par les sphères (Σ_1) et (Σ_2) et la troisième par les sphères (Σ_2) et (Σ) . Soient $\psi_1(h)$, $\psi_2(h)$ et $\psi_3(h)$ les parties correspondantes de l'intégrale $B(h)$; nous aurons

$$(17) \quad B(h) = \psi_1(h) + \psi_2(h) + \psi_3(h).$$

Considérons le point d'intersection M'' du rayon MM' avec la sphère (Σ') , de rayon un, concentrique aux sphères (Σ_1) , (Σ_2) et (Σ) et désignons par $d\sigma'$ l'élément de surface de la sphère (Σ') relatif au point M'' . L'inégalité (11) étant vérifiée pour toutes les positions du point $M'(x', y', z')$ à l'intérieur de la sphère (Σ) , les formules (9) et (10) donneront :

$$\begin{aligned} |\psi_3| &< 2\varepsilon \sum_{m=2}^{\infty} h^{2m-2} \int_{h+\delta}^{\rho} \frac{dr}{r^{2m-1}} \int_{(\Sigma')} \{|P_{2m}(\alpha)| + |P_{2m}(\beta)| + |P_{2m}(\gamma)|\} d\sigma' \\ \text{et} \quad |\psi_1| &< \frac{6\varepsilon}{h^2} \int_0^{h-\delta} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{h} \right) r^2 dr \int_{(\Sigma')} d\sigma' \\ &+ 2\varepsilon \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{h^{2m+3}} \int_0^{h-\delta} r^{2m+2} dr \int_{(\Sigma')} \{|P_{2m}(\alpha)| + |P_{2m}(\beta)| + |P_{2m}(\gamma)|\} d\sigma'. \end{aligned}$$

Une inégalité bien connue, due à M. SCHWARZ, nous donne :

$$\left\{ \int_{(\Sigma')} |P_{2m}(\alpha)| d\sigma' \right\}^2 < \int_{(\Sigma')} \{P_{2m}(\alpha)\}^2 d\sigma' \int_{(\Sigma')} d\sigma',$$

d'où

$$\int_{(\Sigma')} |P_{2m}(\alpha)| d\sigma' < \frac{4\pi}{\sqrt[4]{4m+1}} < \frac{4\pi}{\sqrt[4]{2m-2}}.$$

On peut évidemment remplacer, dans cette inégalité, la fonction $P_{2m}(\alpha)$ par chacune des fonctions $P_{2m}(\beta)$ et $P_{2m}(\gamma)$. D'ailleurs :

$$\int_{h+\delta}^{\rho} \frac{dr}{r^{2m-1}} < \frac{1}{(2m-2)h^{2m-2}},$$

$$\int_0^{h-\delta} r^{2m+2} dr < \frac{h^{2m+3}}{2m+3} < \frac{h^{2m+3}}{2m-2},$$

$$\int_0^{h-\delta} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{h} \right) r^2 dr < \frac{h^2}{6}.$$

On aura donc

$$(18) \quad |\psi_1| + |\psi_3| < N \cdot \varepsilon,$$

en désignant par N un facteur *purement numérique* déterminé au moyen de l'équation suivante :

$$N = 4\pi \left(1 + 6 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(2m-2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Je fais maintenant les remarques suivantes :

1) L'inégalité (18) a lieu, quelque petite que soit la valeur attribuée à δ .

2) Il est évident que l'on a :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \psi_2 = 0.$$

Il résulte de là que l'inégalité (18) et l'équation (17) entraînent l'inégalité suivante :

$$|B(h)| < N\varepsilon,$$

d'où l'on conclura, en tenant compte des relations (14) et (16), l'inégalité suivante :

$$|I_1(h) + 4\pi\varphi(x, y, z)| < N\varepsilon,$$

inégalité qui, faisons-le remarquer, a lieu sous la seule condition que l'inégalité (15) soit vérifiée. Le nombre ε pouvant être pris aussi petit que l'on voudra, on pourra, puisque N représente un facteur purement numérique, choisir ε de façon à avoir

$$N\varepsilon = v,$$

en désignant par v un nombre positif différent de zéro mais d'ailleurs aussi petit que l'on voudra. Nous avons donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_1(h) = -4\pi\varphi(x, y, z).$$

En s'appuyant sur cette équation, on déduira immédiatement des équations (12) et (13) la relation (6), relation qu'il s'agissait précisément de démontrer.

3. Pour aller plus loin, considérons une fonction continue $u(x, y, z)$ vérifiant dans toute l'étendue du domaine (D) l'équation suivante :

$$(19) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \Delta(u, h) = 0.$$

Je dis que la fonction u possédera des dérivées de tous les ordres continues à l'intérieur du domaine (D) et qu'elle satisfera, dans toute l'étendue de ce domaine, à l'équation de LAPLACE :

$$(20) \quad \Delta(u) = 0.$$

Ce théorème n'est que l'extension à plusieurs variables du théorème bien connu de M. SCHWARZ sur lequel repose la démonstration de M. CANTOR d'un théorème fondamental dans la théorie des séries trigonométriques *).

Pour établir le théorème que nous venons d'énoncer, désignons par v la fonction vérifiant dans toute l'étendue du domaine (D) l'équation

$$\Delta(v) = 0$$

et prenant sur la frontière de ce domaine des valeurs égales à celles de la fonction u . Soit en outre w la fonction vérifiant dans le domaine (D) l'équation

$$\Delta(w) = 1$$

et se réduisant à zéro à la frontière de ce domaine. Désignons enfin par η un nombre égal à $+1$ ou à -1 et par t une indéterminée réelle. Cela posé, considérons la fonction :

$$\psi(x, y, z) = \eta(u - v) + t^2 w.$$

Nous aurons :

$$\lim_{h=0} \Delta(\psi, h) = t^2.$$

Cette équation prouve que la fonction ψ ne peut avoir de maximum en aucun point situé à l'intérieur du domaine (D). Il en résulte que la fonction ψ est négative ou nulle dans le domaine D . En effet, si elle pouvait devenir positive dans ce domaine, elle aurait un maximum puisqu'elle s'annule sur la frontière et qu'elle est continue. Ceci devant avoir lieu quelque petit que soit t et quelque soit le signe de η , la différence $u - v$ doit être nulle identiquement.

On a donc :

$$u = v$$

et le théorème est démontré.

4. Voici une conséquence importante des propositions établies dans les n^{os} précédents : lorsque pour une certaine fonction u , l'équation

$$\lim_{h=0} \Delta(u, h) = f(x, y, z),$$

*) Voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, 1^{re} éd., p. 244 et 245.

où f représente une fonction continue, est vérifiée dans toute l'étendue du domaine (D) , la fonction u admet des dérivées premières continues en chaque point situé à l'intérieur de ce domaine. En effet, posons

$$(21) \quad \psi(x, y, z) = u + \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} f(x', y', z') \frac{d\tau'}{r},$$

où l'on a désigné par r la distance des points (x, y, z) et (x', y', z') et par $d\tau'$ l'élément de volume relatif au point (x', y', z') . D'après le théorème du n° 2 on aura

$$\lim_{h=0} \Delta(\psi, h) = 0$$

dans toute l'étendue du domaine (D) .

Donc, en vertu du théorème du n° précédent, la fonction ψ possédera, à l'intérieur du domaine (D) , des dérivées de tous les ordres et satisfera à l'équation

$$\Delta(\psi) = 0.$$

Il s'ensuit, à cause de l'équation (21), que la fonction u possédera bien des dérivées premières continues.

Il ne sera pas inutile de faire la remarque suivante: si l'on désigne par $(u_1)_A$ la valeur d'une dérivée première de la fonction u en un point A situé à l'intérieur du domaine (D) et par $(u_1)_B$ la valeur de la même dérivée en un autre point de ce domaine, on aura:

$$|(u_1)_B - (u_1)_A| < M\sqrt{\overline{AB}}$$

en désignant par M un nombre positif fini, indépendant des coordonnées du point B mais pouvant dépendre de la plus courte distance du point A à la frontière du domaine (D) .

5. Désignons par a, b, c et p trois fonctions données des variables x, y, z possédant des dérivées premières continues dans toute l'étendue du domaine (D) et même sur la frontière de ce domaine et supposons qu'une fonction $u(x, y, z)$ jouisse des propriétés suivantes:

1) L'expression

$$(22) \quad \lim_{h=0} \Delta(u, h) = f(x, y, z)$$

représente une fonction continue dans toute l'étendue du domaine (D) .

2) On a

$$(23) \quad \lim_{h=0} \Delta(u, h) + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + pu = 0.$$

Je dis que la fonction u possédera des dérivées secondes continues à l'intérieur du domaine (D) et qu'elle satisfera à l'équation aux dérivées partielles

$$(24) \quad \Delta(u) + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + pu = 0.$$

En effet, d'après ce que l'on a vu au n° précédent, nous aurons :

$$(25) \quad u = -\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} f(x', y', z') \frac{d\tau'}{r'} + \psi(x, y, z)$$

en donnant aux symboles r' et $d\tau'$ le même sens que plus haut et en désignant par ψ une intégrale de l'équation

$$\Delta(\psi) = 0.$$

D'ailleurs la comparaison des équations (22) et (23) nous donne

$$f(x, y, z) = -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} - c \frac{\partial u}{\partial z} - pu.$$

Il s'ensuit, en tenant compte de la remarque faite à la fin du n° précédent, que l'on aura :

$|f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)| < M \sqrt[4]{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$,
en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point situé à l'intérieur du domaine (D) et par M un nombre positif jouissant des mêmes propriétés que le nombre représenté par cette lettre au n° précédent. Donc, en vertu de la formule (25), la fonction u possédera des dérivées secondes continues à l'intérieur du domaine (D) . Dès lors on aura :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(u, h) = \Delta u.$$

Cela prouve que la fonction u satisfera bien à l'équation (24).

En s'appuyant sur ce théorème ainsi que sur les propositions établies dans les n°s précédents, on établira, avec un peu d'attention, le théorème énoncé à la fin du n° 1.

6. Sans insister sur les applications de ce théorème, je voudrais seulement faire remarquer qu'il permet d'étendre les conditions de validité des développements en séries dont j'ai parlé au n° 1 de ce travail. En effet pour établir la légitimité d'un de ces développements pour une fonction donnée $f(x, y, z)$, on peut, en s'appuyant sur mon théorème, se dispenser d'admettre, comme on l'a fait jusqu'à présent, que la quantité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

existe; il suffit de supposer, sans rien changer aux autres hypothèses sur lesquelles reposent les démonstrations des auteurs cités au n° 1, que l'expression

$$\lim_{h=0} \Delta(f, h)$$

représente une fonction continue. Cette hypothèse, rappelons-le, entraîne l'existence des dérivées premières de la fonction $f(x, y, z)$, mais *nullement* celle des dérivées secondes à moins que la fonction f ne dépende que d'une seule variable.

Cracovie, le 17 Novembre 1904.

S. ZAREMBA.