Ueber die hypergeometrische Function mit einem Nebenpunkt*).

(Mit einer Figurentafel.)

Von

E. RITTER † in Göttingen.

In seiner Arbeit: „Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen“**) basirt Riemann die ganze Betrachtung der von ihm mit

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & c & \\ P & \alpha & \beta & \gamma & x \\ & a' & \beta' & \gamma' & \end{array}$$

benannten Function auf folgenden in Nr. 1 der genannten Arbeit ausgesprochenen, zur Definition dienenden Eigenschaften:

1) Sie ist für alle Werthe von x ausser a, b, c einädrig und endlich.

*) Die vorliegende Arbeit meines Freundes Dr. Ernst Ritter, Privatdocent in Göttingen, der am 22. September 1895 in New-York unerwartet verstarb, fand sich in seinem Nachlasse in einer deutschen und einer die ersten 4 Paragraphen enthaltenden englischen Bearbeitung vor. Dieselbe ist mir von der Redaction der Annalen übergeben worden, um sie für den Druck fertig zu stellen. Indem die spätere englische Bearbeitung im Einzelnen sich besser durchgearbeitet zeigte, habe ich in den §§ 1–4 im wesentlichen eine Uebertragung derselben vorgenommen unter möglichster Berücksichtigung des deutschen Textes. Die wenigen Anmerkungen, die ich selbst hinzufügen möchte, sind als solche bemerkt gemacht. Im übrigen ist an dieser oder jener Stelle eine Kürzung der Darstellung eingetreten; dies gilt insbesondere für die Figuren des § 4, wie in der Anm. pag. 27 noch näher ausgeführt ist. Eine Ungenauigkeit ist von mir bemerkt worden, wegen der man die Anm. pag. 30 vergleichen wolle. Die Beziehung dieser Abhandlung zu meiner eigenen pag. 15 erwähnten Arbeit „Die geometrische Theorie der symmetrischen S -Functionen mit einem einfachen oder zweifachen Nebenpunkt“, die ich bald zu veröffentlichen gedenke, behalte ich mir daselbst zu besprechen vor.

Aachen, im Januar 1896.

Schilling.

**) Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1857. Gesammelte Werke pag. 67.

2) Zwischen je 3 Zweigen P', P'', P''' besteht eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten:

$$e' P' + e'' P'' + e''' P''' = 0.$$

3) Die Function lässt sich in die Form $c_\alpha P^{(\alpha)} + c_{\alpha'} P^{(\alpha')}$ setzen, so dass $(x-a)^{-\alpha} P^{(\alpha)}$ und $(x-a)^{-\alpha'} P^{(\alpha')}$ für $x=a$ einädrig bleiben und weder Null noch unendlich werden; das Analoge gilt für die Stellen $x=b$ und $x=c$.

4) Für die Summe der 6 Exponenten gilt:

$$\alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' = 1.$$

Ferner wird die Voraussetzung gemacht, die man aber mit einer gewissen Modification der Angabe 3 fallen lassen kann, dass keine der Differenzen $\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma'$ eine ganze Zahl sei.

Durch diese Riemann'schen Bedingungen ist die Function P so weit bestimmt, dass sie eine beliebige Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung ist:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dx^2} + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c} \right) \frac{dP}{dx} \\ + \left(\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\beta\beta'(b-a)(b-c)}{x-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{x-c} \right) \\ \cdot \frac{P}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0. \end{aligned}$$

Aus zwei linear unabhängigen Lösungen P_1 und P_2 desselben setzt sich das allgemeinste Paar linear unabhängiger Lösungen mit 4 willkürlichen Constanten zusammen in der Form:

$$\begin{aligned} c_{11} P_1 + c_{12} P_2, \\ c_{21} P_1 + c_{22} P_2, \end{aligned}$$

wo

$$c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \neq 0$$

ist. Wir sagen in diesem Sinne: *Das Riemann'sche Bedingungssystem definiert uns in eindeutiger Weise eine „binäre Functionsschaar $P=(P_1, P_2)$ “, d. h. die Gesamtheit der linearen homogenen Combinationen der Functionen P_1, P_2 .*

Aendern wir nun die Bedingung 4 in der Weise, dass wir die Summe $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma'$ eine beliebige ganze Zahl sein lassen, die kleiner als 1 ist, etwa $1-q$, so kann man die übrigen Bedingungen noch aufrecht erhalten, bekommt aber statt einer einzigen vielmehr ∞^q verschiedene Functionsschaaren, welche einer Differentialgleichung mit q willkürlichen Parametern genügen, nämlich einer solchen, die ausser den singulären Stellen a, b, c noch q weitere singuläre Stellen $r_1, r_2 \dots r_q$ besitzt, bei deren Umkreisung aber die Lösungen P_1, P_2 sich reproduciren. Solche singuläre Stellen nenne

ich nach dem Vorgange von Herrn Klein „*Nebenpunkte*“ der Differentialgleichung*).

Eine derartige Verallgemeinerung der Function P hat bereits Riemann selbst in Betracht gezogen. In seiner nachgelassenen Abhandlung: „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung“**) bezeichnet er mit

$$Q \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{vmatrix}$$

eine in entsprechender Weise wie P definirte Function, nur dass die Exponentensumme gleich -1 anstatt $+1$ ist, so dass jene also eine Functionsschaar mit zwei Nebenpunkten ist.

Ich stelle mir nun in dieser Mittheilung die Aufgabe, die entsprechenden Functionen mit nur einem Nebenpunkt, also mit der Exponentensumme 0, genauer zu untersuchen.

§ 1.

Die hypergeometrische Differentialgleichung mit einem Nebenpunkt.

Es werde allgemein mit

$$Q \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}$$

eine nur bei a, b, c verzweigte Functionsschaar bezeichnet, welche mit Ausnahme der Stellen a, b, c überall holomorph ist und an den Stellen a, b, c bezw. die Exponenten $\lambda', \lambda''; \mu', \mu''; \nu', \nu''$ besitzt. Es wird vorausgesetzt, dass

$$(1) \quad \lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 0$$

sei. Dann muss die Functionsschaar Q noch einen Nebenpunkt s besitzen, d. h. einen Punkt mit den Exponenten 0 und 2, während jeder gewöhnliche Punkt die Exponenten 0 und 1 hat. s ist dann also ein singulärer Punkt für die Differentialgleichung der Functionsschaar Q .

Die allgemeinste Differentialgleichung mit den singulären Punkten a, b, c, s und den Exponenten $\lambda', \lambda''; \mu', \mu''; \nu', \nu''; 0, 2$ lautet:

$$(2) \quad \frac{d^2 Q}{dz^2} + \left(\frac{1 - \lambda' - \lambda''}{z - a} + \frac{1 - \mu' - \mu''}{z - b} + \frac{1 - \nu' - \nu''}{z - c} - \frac{1}{z - s} \right) \frac{dQ}{dz} \\ + \left(\frac{\lambda' \lambda'' (a - b)(a - c)}{z - a} + \frac{\mu' \mu'' (b - a)(b - c)}{z - b} + \frac{\nu' \nu'' (c - a)(c - b)}{z - c} + \frac{A}{z - s} \right) \\ \cdot \frac{Q}{(z - a)(z - b)(z - c)} = 0.$$

*) Man sehe Klein, Vorlesung über die hypergeometrische Function. W. S. 1893/94, pag. 225.

**) Gesammelte Werke pag. 323.

In unserem Falle ist die willkürliche Constante A so zu bestimmen, dass in der Entwicklung der Lösungen Q an der Stelle s keine logarithmischen Glieder auftreten.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass A als Function von s der folgenden quadratischen Gleichung genügt:

$$(3) \quad A^2 - A(s-a)(s-b)(s-c) \left(\frac{\lambda' + \lambda''}{s-a} + \frac{\mu' + \mu''}{s-b} + \frac{\nu' + \nu''}{s-c} \right) \\ + (s-a)(s-b)(s-c) \left(\frac{\lambda' \lambda'' (a-b)(a-c)}{s-a} + \frac{\mu' \mu'' (b-a)(b-c)}{s-b} \right. \\ \left. + \frac{\nu' \nu'' (c-a)(c-b)}{s-c} \right) = 0.$$

Es entsprechen also jeder vorgegebenen Lage s des Nebenpunktes im Allgemeinen zwei Werthe A und somit zwei verschiedene Functionsschaaren Q . Die Functionsschaar Q ist gewissermassen eine zweideutige Function der Lage des Nebenpunktes s . Will man eindeutige Bestimmtheit derselben durch die Lage des Nebenpunktes s haben, so muss man s statt in der schlichten z -Ebene in einer zweifach überdeckten Riemann'schen Fläche deuten, und zwar wird dieselbe, wie wir sogleich sehen werden, zwei Verzweigungspunkte haben.

Wir können die Lösung A der Gl. (3) mittelst der Relation

$$\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 0$$

und der Abkürzungen

$$\lambda' - \lambda'' = \lambda, \quad \mu' - \mu'' = \mu, \quad \nu' - \nu'' = \nu$$

in der Gestalt schreiben:

$$(4) \quad A = \frac{\lambda' + \lambda''}{2} (bc + as) + \frac{\mu' + \mu''}{2} (ac + bs) + \frac{\nu' + \nu''}{2} (ab + cs) \\ + \frac{1}{2} \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c) \left(\frac{\lambda^2 (a-b)(a-c)}{s-a} + \frac{\mu^2 (b-a)(b-c)}{s-b} + \frac{\nu^2 (c-a)(c-b)}{s-c} \right)}.$$

Die Verzweigungspunkte S der Riemann'schen Fläche erhalten wir jetzt, indem wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich Null setzen. Es ergibt sich:

$$(5) \quad S = \frac{(b+c)(a-b)(a-c)\lambda^2 + (a+c)(b-a)(b-c)\mu^2 + (a+b)(c-a)(c-b)\nu^2}{2((a-b)(a-c)\lambda^2 + (b-a)(b-c)\mu^2 + (c-a)(c-b)\nu^2)} \\ + \frac{(a-b)(a-c)(b-c) \sqrt{-(\lambda + \mu + \nu)(-\lambda + \mu + \nu)(\lambda - \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu)}}{2((a-b)(a-c)\lambda^2 + (b-a)(b-c)\mu^2 + (c-a)(c-b)\nu^2)}.$$

Es möge nun der Punkt s mit irgend einem der singulären Punkte a, b, c zusammenfallen. Für $s = a$ z. B. ergibt sich:

$$A_1 = \lambda' (a-b)(a-c),$$

$$A_2 = \lambda'' (a-b)(a-c).$$

Setzt man diese Werthe $s=a$, $A=A_1$, bzw. $A=A_2$ in die Gl. (2) ein, so geht sie über in die Differentialgleichung der gewöhnlichen Riemann'schen Function:

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} \quad \text{für } A=A_1,$$

bzw.

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda'+1 & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} \quad \text{für } A=A_2.$$

Das Entsprechende gilt für $s=b$ oder $s=c$. Es ergibt sich also das Resultat:

Die Function

$$Q \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}$$

enthält als Specialfälle 6 verschiedene P -Functionen, welche sich ergeben, wenn s in dem einen oder anderen Blatte der Riemann'schen Fläche mit einem der singulären Punkte a, b, c zusammenfällt. Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} s=a \left\{ \begin{array}{l} A=\lambda''(a-b)(a-c); \quad Q=P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda'+1 & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}, \\ A=\lambda'(a-b)(a-c); \quad Q=P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}, \end{array} \right. \\ \\ s=b \left\{ \begin{array}{l} A=\mu''(b-a)(b-c); \quad Q=P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu'+1 & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}, \\ A=\mu'(b-a)(b-c); \quad Q=P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu''+1 & \nu'' \end{vmatrix}, \end{array} \right. \\ \\ s=c \left\{ \begin{array}{l} A=\nu''(c-a)(c-b); \quad Q=P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu'+1 & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}, \\ A=\nu'(c-a)(c-b); \quad Q=P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''+1 \end{vmatrix}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Die angegebenen Formeln werden, freilich unter Verzicht auf ihre Symmetrie, sehr vereinfacht, wenn man das Doppelverhältniss von z mit den Punkten a, b, c als unabhängige Variable einführt

$$x = \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}$$

und dementsprechend zugleich

$$r = \frac{(s-a)(c-b)}{(s-b)(c-a)}$$

setzt. Durch diese Substitution geht

$$Q \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}$$

über in

$$Q \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}.$$

Die Differentialgleichung erhält die Form:

$$(2') \quad \frac{d^2 Q}{dx^2} + \left(\frac{1-\lambda'-\lambda''}{x} + \frac{1-\nu'-\nu''}{x-1} - \frac{1}{x-r} \right) \frac{dQ}{dx} \\ + \left(-\frac{\lambda'\lambda''}{x} + \mu'\mu'' + \frac{\nu'\nu''}{x-1} + \frac{A'}{x-r} \right) \frac{Q}{x(x-1)} = 0,$$

wo A' der Gleichung genügt:

$$(3') \quad A'^2 - A'r(r-1) \left(\frac{\lambda'+\lambda''}{r} + \frac{\nu'+\nu''}{r-1} \right) \\ + r(r-1) \left(-\frac{\lambda'\lambda''}{r} + \mu'\mu'' + \frac{\nu'\nu''}{r-1} \right) = 0.$$

Die Lösungen derselben sind:

$$(4') \quad A' = -\frac{\lambda'+\lambda''}{2} - r \cdot \frac{\mu'+\mu''}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2)r + \mu^2 r^2}.$$

Die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche endlich sind:

$$(5') \quad R = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 \pm \sqrt{-(\lambda + \mu + \nu)(-\lambda + \mu + \nu)(\lambda - \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu)}}{2\mu^2}.$$

§ 2.

Zusammenfallen der beiden Verzweigungspunkte.

Die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche fallen zusammen, und die Fläche selbst zerfällt in zwei Blätter, wenn irgend eine der 4 Summen

$\lambda + \mu + \nu, \quad -\lambda + \mu + \nu, \quad \lambda - \mu + \nu, \quad \lambda + \mu - \nu$
verschwindet.

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen, dass gerade die Summe $\lambda + \mu + \nu$ verschwindet, indem wir ja die Exponenten λ', μ', ν' bezw. mit λ'', μ'', ν'' vertauschen können, ohne dass sich in der Definition der Functionsschaar Q etwas ändert. Die Bedingung $\lambda + \mu + \nu = 0$ liefert aber in Rücksicht auf die Gl. (1) die beiden Relationen:

$$\lambda' + \mu' + \nu' = 0$$

und

$$\lambda'' + \mu'' + \nu'' = 0.$$

Die Formeln (4) und (5) gehen jetzt über in

$$(8) \quad \begin{cases} A_1 = \lambda''(s-b)(s-c) + \mu''(s-a)(s-c) + \nu''(s-a)(s-b) \\ \quad = \lambda''(bc+as) + \mu''(ac+bs) + \nu''(ab+cs), \\ A_2 = \lambda'(s-b)(s-c) + \mu'(s-a)(s-c) + \nu'(s-a)(s-b) \\ \quad = \lambda'(bc+as) + \mu'(ac+bs) + \nu'(ab+cs), \end{cases}$$

$$(9) \quad S = -\frac{bc\lambda + ac\mu + ab\nu}{a\lambda + b\mu + c\nu}.$$

Während man ferner im allgemeinen Falle durch Wandernlassen des Nebenpunktes s von jeder der unter (6) angeführten P -Functionen zu jeder anderen gelangen kann, zerfallen in unserem Ausnahmefalle die 6 Functionen in zwei getrennte Tripel von der Art, dass man von jeder Function eines Tripels nur zu den Functionen desselben Tripels gelangen kann.

Wir erhalten sie für $s = a, b, c$, indem wir für A entweder den Werth A_1 oder A_2 substituiren:

Erstes Tripel, $A = A_1$:

$$(10) \quad \begin{cases} s = a, A = \lambda''(a-b)(a-c), Q = P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' + 1 & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ s = b, A = \mu''(b-a)(b-c), Q = P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' + 1 & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ s = c, A = \nu''(c-a)(c-b), Q = P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' + 1 & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Zweites Tripel, $A = A_2$:

$$(11) \begin{cases} s = a, A = \lambda'(a-b)(a-c), Q = P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda''+1 & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ s = b, A = \mu'(b-a)(b-c), Q = P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu''+1 & \nu'' & \end{vmatrix}, \\ s = c, A = \nu'(c-a)(c-b), Q = P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''+1 & \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die Formeln (4') und (5') gehen über in:

$$(8') \quad \begin{cases} A_1' = -\lambda'' - \mu''r, \\ A_2' = -\lambda' - \mu'r, \end{cases}$$

$$(9') \quad R = -\frac{\lambda}{\mu},$$

und die beiden Tripel der P -Functionen ergeben sich für folgende Werthe von r und A' .

Das erste Tripel ist bestimmt durch:

$$(10') \quad \begin{cases} r = 0, & A' = -\lambda'', \\ r = \infty, & A' = \infty, \quad \text{während jedoch } \lim_{r=\infty} \frac{A'}{r} = -\mu'' \text{ ist,} \\ r = 1, & A' = +\nu''; \end{cases}$$

das zweite Tripel durch:

$$(11') \quad \begin{cases} r = 0, & A' = -\lambda', \\ r = \infty, & A' = \infty, \quad \text{während } \lim_{r=\infty} \frac{A'}{r} = -\mu' \text{ ist,} \\ r = 1, & A' = +\nu'. \end{cases}$$

Diese Thatsache, dass im Ausnahmefalle die 6 in derselben Q -Function allgemein enthaltenen P -Functionen in zwei getrennte Tripel zerfallen, gestattet uns ferner einige wichtige Sätze der Theorie der P -Function selbst aufzustellen.

Wir nennen allgemein solche P -Functionen

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \end{vmatrix}, \quad \alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' = 1,$$

„verwandte“, welche man aus einander erhalten kann, indem man den

Nebenpunkt von Verzweigungspunkt zu Verzweigungspunkt wandern lässt*), entsprechend der Gauss'schen Definition in seinen „Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \dots$ “, die allgemein solche hypergeometrische Reihen als „verwandt“ bezeichnet, deren Grössen α, β, γ sich um ganze Zahlen unterscheiden. Wir werden sehen, dass diejenigen P -Functionen, die nach unserer Definition verwandt sind, gerade auch zu solchen hypergeometrischen Reihen gehören, die im Gauss'schen Sinne verwandt sind.

Solche P -Functionen, die man als Grenzfälle derselben Q -Function mit einem einfachen Nebenpunkt ansehen kann, will ich in einen „Kreis verwandter P -Functionen“ zusammenfassen. Demgemäss bilden die 6 P -Functionen der Formelgruppe (6) einen „Kreis“.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass man im allgemeinen Falle, wenn keine der Exponentensummen

$$\alpha' + \beta' + \gamma', \quad \alpha'' + \beta' + \gamma', \quad \alpha' + \beta'' + \gamma', \quad \alpha' + \beta' + \gamma''$$

ganzzählig ist, durch Wandernlassen eines Nebenpunktes eine beliebig vorgegebene P -Function

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

in jede andere Function

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha' + l' & \beta' + m' & \gamma' + n' & z \\ \alpha'' + l'' & \beta'' + m'' & \gamma'' + n'' \end{vmatrix},$$

wo $l', l'', m', m'', n', n''$ ganze Zahlen sind, für die

$$l' + l'' + m' + m'' + n' + n'' = 0$$

gilt, überführen kann. Denn es ist auf dem angegebenen Wege stets möglich, jeden einzelnen Exponenten der P -Function um eine Einheit zu vermehren, wenn man gleichzeitig einen anderen Exponenten, etwa γ'' , um eine Einheit vermindert. Indem wir diesen Process dann l' mal mit α' vornehmen, gelangen wir von

*) Die allgemeine, alle Specialfälle umfassende Definition nennt P -Functionen verwandt, wenn ihnen dieselbe Gruppe linearer Substitutionen zugehört. Ritter's Darstellung ist daher insofern unvollständig, als noch zu zeigen bleibt (insbesondere in den Fällen ganzzahliger Exponenten), dass sich seine Definition in der That mit der eben gegebenen deckt. Hierzu ist nachzuweisen nothwendig, dass einmal die einzelnen Individuen jeder Classe dieselbe Gruppe besitzen, andererseits aber denen der verschiedenen Classen, die sich nach Ritter ergeben, auch verschiedene Gruppen zugehören. (Man vergl. meine bereits in der Anm. pag. 1 erwähnte Arbeit, woselbst ich von geometrischem Standpunkt aus auf die analoge Frage eingehe).

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

zu

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha' + l & \beta' & \gamma' & z \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' - l' \end{vmatrix}.$$

Analog können wir dann mit den Exponenten $\alpha'', \beta', \beta'', \gamma', \gamma''$ verfahren und gelangen somit schliesslich unter Berücksichtigung der Bedingung $l' + l'' + m' + m'' + n' + n'' = 0$ zu der zweiten oben angeführten P -Function.

Diesem Vorgehen würde sich nur dann ein Hinderniss entgegen stellen können, wenn die Summe von 3 entsprechend zu a, b, c gehörigen Exponenten, gleich 0 würde. Doch kann dies ja im allgemeinen Falle niemals eintreten. Wir erhalten daher das Resultat:

Ist keine der Summen

$$\alpha' + \beta' + \gamma', \quad \alpha'' + \beta' + \gamma', \quad \alpha' + \beta'' + \gamma', \quad \alpha' + \beta' + \gamma''$$

eine ganze Zahl, so sind zwei Functionen unserer Definition gemäss stets dann und nur dann mit einander verwandt, wenn die entsprechenden Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, deren Summe gleich 0 ist.

Dieser Satz gilt in dieser Fassung jedoch nicht mehr, falls irgend eine der erwähnten Summen eine ganze Zahl ist. Da es, wie wir schon sagten, gleichgültig ist, welchen Exponenten jedes Punktes wir von vornherein mit einem oder zwei Strichen auszeichnen, so wollen wir, um jetzt den Ausnahmefall zu behandeln, wieder die Bezeichnung so gewählt denken, dass in unserer Ausgangsfunction

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

$\alpha' + \beta' + \gamma'$ und $\alpha'' + \beta'' + \gamma''$ ganzzahlig sind. Wir setzen ferner zunächst noch voraus, dass keine der Differenzen

$$\alpha = \alpha' - \alpha'', \quad \beta = \beta' - \beta'', \quad \gamma = \gamma' - \gamma''$$

eine ganze Zahl ist. Dann sind $\alpha' + \beta' + \gamma'$ und $\alpha'' + \beta'' + \gamma''$ zugleich auch die *einzigsten* ganzzahligen Summen von 3 zu verschiedenen Punkten gehörenden Exponenten. Alle Functionen P , deren entsprechende Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, lassen sich nun in 2 Classen sondern, je nachdem das erste oder zweite der folgenden Bedingungssysteme erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad \begin{cases} \alpha' + \beta' + \gamma' > 0, & \text{und damit} \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' \leq 0, \end{cases} \\ \text{II.} & \quad \begin{cases} \alpha' + \beta' + \gamma' \leq 0, \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Jede Function

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

kann ferner betrachtet werden als Grenzfall einer Function

$$Q \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix},$$

deren Exponenten man erhält, wenn man irgend einen der Exponenten für P um die Einheit vermindert.

Dementsprechend haben die Exponenten der Function Q , die aus einer P -Function der Classe I fließt, den folgenden Bedingungen zu genügen:

$$\text{I'.} \quad \begin{cases} \lambda' + \mu' + \nu' \geq 0, \\ \lambda'' + \mu'' + \nu'' \leq 0, \end{cases}$$

wo stets die oberen oder unteren Zeichen gelten, da ja die Summe aller Exponenten gleich 0 sein muss.

Ist nun

$$\lambda' + \mu' + \nu' > 0$$

und damit

$$\lambda'' + \mu'' + \nu'' < 0,$$

dann erhält man aus dieser Q -Function wieder eine neue P -Function, indem man irgend einen der 6 Exponenten um die Einheit vermehrt. Für die neue P -Function, deren Exponenten wir wieder mit $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \gamma', \gamma''$ bezeichnen, muss also entweder:

$$\begin{aligned} \alpha' + \beta' + \gamma' &= \lambda' + \mu' + \nu' + 1, \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' &= \lambda'' + \mu'' + \nu'' \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha' + \beta' + \gamma' &= \lambda' + \mu' + \nu' \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' &= \lambda'' + \mu'' + \nu'' + 1 \end{aligned}$$

sein.

In beiden Fällen folgt aus den Bedingungen I', dass

$$\begin{aligned} \alpha' + \beta' + \gamma' &> 0, \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' &\leq 0 \end{aligned}$$

ist, d. h. die neue P -Function gehört nothwendig wieder zur Classe I.

Ist aber

$$\lambda' + \mu' + \nu' = 0$$

und

$$\lambda'' + \mu'' + \nu'' = 0,$$

so ist Q eine Function des Ausnahmefalles. Dann verbindet sie die vorhergehende Function P , für welche $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$, $\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 0$ gilt, allein mit *zwei* anderen P -Functionen, deren Exponenten den gleichen Bedingungen genügen, so dass auch dann wieder die neue P -Function zur Classe I gehört. Das Analoge gilt für die P -Functionen der Classe II.

Irgend eine Function der Classe I oder II ist daher nur mit Functionen derselben Classe verwandt.

Hieraus folgt dann leicht der folgende Satz:

Jede Function der Classe I bezw. II ist mit jeder anderen derselben Classe verwandt.

Unser Ausnahmefall ist daher folgendermassen charakterisirt:

Die Function P der Form

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha' + l' & \beta' + m' & \gamma' + n' & z \\ \alpha'' + l'' & \beta'' + m'' & \gamma'' + n'' \end{vmatrix},$$

woselbst $l', l'', \dots$ ganze Zahlen sind mit der Bedingung

$$l' + l'' + m' + m'' + n' + n'' = 0,$$

bilden zwei getrennte Classen verwandter Functionen, wenn zwischen den nicht ganzzahligen Differenzen

$$\alpha = \alpha' - \alpha'', \quad \beta = \beta' - \beta'', \quad \gamma = \gamma' - \gamma''$$

irgend eine Relation

$$\pm \alpha \pm \beta \pm \gamma = 2r + 1$$

besteht, wo r eine beliebige ganze Zahl ist.

Es ist nämlich in der That zunächst gleichgültig, welche Auswahl der Vorzeichen in dieser Relation statthat, indem wir ev. stets durch geeignete Vertauschung der Exponentenbezeichnungen bewirken können, dass gerade $\alpha + \beta + \gamma = 2r + 1$ und damit in Rücksicht auf die Gleichung $\alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' = 1$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = r + 1,$$

$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = r$$

wird. Wenn aber umgekehrt diese Summen, wie oben gezeigt ist, sich als ganze Zahlen ergeben, so muss nothwendig die eine von ihnen ungerade, die andere gerade, folglich ihre Differenz stets ungerade sein.

Wenn jetzt jedoch weiter ausser den Summen $\alpha' + \beta' + \gamma'$ und $\alpha'' + \beta'' + \gamma''$ irgend eine der Differenzen α, β, γ eine ganze Zahl ist,

z. B. α , so werden auch die Summen $\alpha' + \beta' + \gamma'$ und $\alpha' + \beta'' + \gamma''$ ganze Zahlen sein. Dann wird der Weg, der uns von irgend einer P -Function durch Wandern des Nebenpunktes zu einer andern führen soll, nicht nur durch die Bedingung

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 1,$$

$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 0,$$

sondern auch durch

$$\alpha'' + \beta' + \gamma' = 1,$$

$$\alpha' + \beta'' + \gamma'' = 0$$

in der bekannten Weise begrenzt. Wir finden als Resultat:

Wenn ausser den Summen $\alpha' + \beta' + \gamma'$, $\alpha'' + \beta'' + \gamma''$ eine der Differenzen α , β , γ gleichfalls ganzzahlig ist, so haben wir 3 getrennte Classen verwandter Functionen; dieselben lassen sich, falls α eine ganze Zahl ist, folgendermassen umgrenzen:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \left\{ \begin{array}{ll} \alpha' + \beta' + \gamma' > 0 & \text{und} \quad \alpha'' + \beta' + \gamma' > 0, \\ \alpha' + \beta'' + \gamma'' \leq 0 & \alpha' + \beta'' + \gamma'' \leq 0 \\ \text{oder} & \text{oder} \\ \alpha + \beta + \gamma > 0, & -\alpha + \beta + \gamma > 0. \end{array} \right. \\ \\ \text{II.} & \left\{ \begin{array}{ll} \alpha' + \beta' + \gamma' > 0 & \text{und} \quad \alpha'' + \beta' + \gamma' \leq 0, \\ \alpha' + \beta'' + \gamma'' \leq 0 & \alpha' + \beta'' + \gamma'' > 0 \\ \text{oder} & \text{oder} \\ \alpha + \beta + \gamma > 0, & -\alpha + \beta + \gamma < 0. \end{array} \right. \\ \\ \text{III.} & \left\{ \begin{array}{ll} \alpha' + \beta' + \gamma' \leq 0 & \text{und} \quad \alpha'' + \beta' + \gamma' \leq 0, \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' > 0 & \alpha' + \beta'' + \gamma'' > 0 \\ \text{oder} & \text{oder} \\ \alpha + \beta + \gamma < 0, & -\alpha + \beta + \gamma < 0. \end{array} \right. \end{array}$$

Es möchte scheinen, als wenn es noch eine vierte Classe gäbe, die durch die Bedingungen bestimmt wäre:

$$\text{IV.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha' + \beta' + \gamma' \leq 0 & \text{und} \quad \alpha'' + \beta' + \gamma' > 0, \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' > 0 & \alpha' + \beta'' + \gamma'' \leq 0 \\ \text{oder} & \text{oder} \\ \alpha + \beta + \gamma < 0, & -\alpha + \beta + \gamma > 0. \end{array} \right.$$

Doch ist jede Function dieser Classe identisch mit einer bestimmten der Classe II, so dass erstere keine neue Classe darstellt.

Wenn endlich zwei der Differenzen α , β , γ und damit auch die dritte ganzzahlig sind, so ist jede Summe dreier bezw. zu a , b , c gehöriger Exponenten eine ganze Zahl. Es werden dann die einzelnen Classen durch solche Functionen begrenzt, für die eine der 4 Differenzen

$\alpha' + \beta' + \gamma'$, $\alpha'' + \beta' + \gamma'$, $\alpha' + \beta'' + \gamma''$, $\alpha' + \beta' + \gamma''$ gleich 1 ist. Es würden so zunächst 16 Classen möglich zu sein scheinen, je nachdem jede einzelne dieser Summen > 0 oder ≤ 0 ist. Doch sind die folgenden beiden Classen von vornherein unmöglich:

$\alpha' + \beta' + \gamma' > 0$, $\alpha'' + \beta' + \gamma' \leq 0$, $\alpha' + \beta'' + \gamma' \leq 0$, $\alpha' + \beta' + \gamma'' \leq 0$
und

$\alpha' + \beta' + \gamma' \leq 0$, $\alpha'' + \beta' + \gamma' > 0$, $\alpha' + \beta'' + \gamma' > 0$, $\alpha' + \beta' + \gamma'' > 0$,
weil sie mit der Gleichung $\alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' = 1$ im Widerspruch stehen. Ferner sind manche der übrigen Classen mit einander identisch, so dass sich schliesslich als Resultat ergibt:

Wenn α, β, γ ganzzahlig sind, während sie zugleich eine ungerade Summe haben, dann giebt es 4 Classen verwandter Functionen, welche sich durch die folgenden Bedingungen umgränzen lassen:

$$\text{I. } \begin{cases} \alpha' + \beta' + \gamma' > 0, & \alpha'' + \beta' + \gamma' > 0, & \alpha' + \beta'' + \gamma' > 0, & \alpha' + \beta' + \gamma'' > 0, \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' \leq 0, & \alpha' + \beta'' + \gamma'' \leq 0, & \alpha'' + \beta' + \gamma'' \leq 0, & \alpha'' + \beta'' + \gamma' \leq 0, \\ \text{oder} & \text{oder} & \text{oder} & \text{oder} \\ \alpha + \beta + \gamma > 0, & -\alpha + \beta + \gamma < 0, & \alpha - \beta + \gamma > 0, & \alpha + \beta - \gamma > 0. \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} \alpha' + \beta' + \gamma' > 0, & \alpha'' + \beta' + \gamma' \leq 0, & \alpha' + \beta'' + \gamma' > 0, & \alpha' + \beta' + \gamma'' > 0, \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' \leq 0, & \alpha' + \beta'' + \gamma'' > 0, & \alpha'' + \beta' + \gamma'' \leq 0, & \alpha'' + \beta'' + \gamma' \leq 0, \\ \text{oder} & \text{oder} & \text{oder} & \text{oder} \\ \alpha + \beta + \gamma > 0, & -\alpha + \beta + \gamma < 0, & \alpha - \beta + \gamma > 0, & \alpha + \beta - \gamma > 0. \end{cases}$$

$$\text{III. } \begin{cases} \alpha' + \beta' + \gamma' > 0, & \alpha'' + \beta' + \gamma' > 0, & \alpha' + \beta'' + \gamma' \leq 0, & \alpha' + \beta' + \gamma'' > 0, \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' \leq 0, & \alpha' + \beta'' + \gamma'' \leq 0, & \alpha'' + \beta' + \gamma'' > 0, & \alpha'' + \beta'' + \gamma' \leq 0, \\ \text{oder} & \text{oder} & \text{oder} & \text{oder} \\ \alpha + \beta + \gamma > 0, & -\alpha + \beta + \gamma > 0, & \alpha - \beta + \gamma < 0, & \alpha + \beta - \gamma > 0. \end{cases}$$

$$\text{IV. } \begin{cases} \alpha' + \beta' + \gamma' > 0, & \alpha'' + \beta' + \gamma' > 0, & \alpha' + \beta'' + \gamma' > 0, & \alpha' + \beta' + \gamma'' \leq 0, \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' \leq 0, & \alpha' + \beta'' + \gamma'' \leq 0, & \alpha'' + \beta' + \gamma'' \leq 0, & \alpha'' + \beta'' + \gamma' > 0, \\ \text{oder} & \text{oder} & \text{oder} & \text{oder} \\ \alpha + \beta + \gamma > 0, & -\alpha + \beta + \gamma > 0, & \alpha - \beta + \gamma > 0, & \alpha + \beta - \gamma > 0. \end{cases}$$

Es ist bemerkenswerth, dass Riemann selbst (der ja ganzzahlige Exponentendifferenzen ausschliesst) die Eigenart des Ausnahmefalles übersehen hat, dass die eine Classe verwandter Functionen, die es im allgemeinen Falle giebt, sich in zwei solche Classen scheidet. Auf diese Lücke in den Betrachtungen Riemann's hat zuerst Herr Klein aufmerksam gemacht in seiner Vorlesung über die hypergeometrische

Function, W. S. 93/94, pag. 413. Das Criterium für die Verwandtschaft zweier Functionen des Ausnahmefalles hat dann Frl. Winston im Annalen Bd. 46, pag. 157—160 aufgestellt und zwar mittelst der Darstellung der P -Function durch hypergeometrische Reihen. Jedoch ist der höhere singuläre Fall, in dem einer oder alle drei Exponentendifferenzen ganzzahlig sind, von ihr nicht behandelt worden. Das vollständige Criterium für verwandte Functionen im Ausnahmefalle, also auch für ganzzahlige Exponenten, giebt dann Herr Schilling im § 7 seiner Arbeit: Die geometrische Theorie der Schwarz'schen s -Function für complexe Exponenten (Zweite Abhandlung) Math. Ann. Bd. 46, pag. 538, 1895. Dort findet er dieselben Resultate wie ich, jedoch auf ganz anderem Wege.

§ 3.

Lineare Darstellung durch zwei specielle Q -Functionen.

Es seien Q' , Q'' , Q''' drei „benachbarte“ Q -Functionen, d. h. man soll jede aus den anderen durch Wandernlassen des Nebenpunktes s mit Festhalten der Stellen a , b , c und ihrer Exponenten erzeugen können. Hierfür genügt im allgemeinen Falle, dass die Exponenten derselben übereinstimmen, im Ausnahmefalle dagegen müssen die Differentialgleichungen, denen Q' , Q'' , Q''' genügen, denselben der beiden hier analytisch getrennten Ausdrücke A_1 , A_2 enthalten, die auf Seite 7 angegeben sind.

Im *allgemeinen* Falle ist ferner durch die Exponenten λ' , λ'' , μ' , μ'' , ν' , ν'' die Gruppe der Substitutionen, welche zwei Zweige Q_1 , Q_2 der Schaar Q bei Umläufen von z erleiden, so weit bestimmt, dass man sie durch eine geeignete Auswahl der Zweige Q_1 , Q_2 immer auf eine einzige wohlbestimmte Normalform bringen kann. Dementsprechend kann man aus jeder Functionsschaar Q' , Q'' , Q''' zwei Zweige Q'_1 , Q'_2 ; Q''_1 , Q''_2 ; Q'''_1 , Q'''_2 so auswählen, dass sie bei irgend welchen Umläufen von z geradezu stets dieselben Substitutionen erleiden.

Anders im *Ausnahmefalle*, wenn eine der Summen $\lambda' + \mu' + \nu'$, $\lambda'' + \mu'' + \nu''$, $\lambda' + \mu'' + \nu'$, $\lambda'' + \mu' + \nu''$ gleich 0 ist. Dann ist die Gruppe durch Angabe der Exponenten noch nicht eindeutig bestimmt, sondern sie kann immer nur auf eine von zwei möglichen Normalformen gebracht werden, die nicht durch eine lineare Transformation in einander überführbar sind.

Genauerer hierüber wird man in einer demnächst erscheinenden Abhandlung*) von Herrn Schilling finden, der die Gruppen der

*) „Die geometrische Theorie der symmetrischen S -Functionen mit einem einfachen oder zweifachen Nebenpunkt“. — Die im Texte von Ritter angeführten Gruppensätze sind jedoch nur im Allgemeinen richtig, indem sie in gewissen

Q-Functionen von geometrischer Seite her zu untersuchen unternommen hat; ich werde daher in dieser Arbeit von den geometrischen Beziehungen nur das Nothwendigste bringen, was zum Verständniss der analytischen Unterscheidungen unumgänglich nöthig ist, und auch dies nur beispielsweise. Die geometrischen Figuren mögen gleichsam nur zur Illustration dienen, nicht zum Beweise der Resultate, die auf analytischem Wege gefunden sind. —

Wir kehren sogleich zu unserem Gegenstande zurück. Mögen ein oder zwei Möglichkeiten für die Gruppe der *Q*-Functionen vorliegen, wenn man den Nebenpunkt *s* continuirlich wandern lässt, kann man die Auswahl der Zweige Q_1, Q_2 in jedem Augenblicke so treffen, dass ihre Substitutionen dieselben bleiben, wie zu Anfang. Daraus folgt:

Wenn Q', Q'', Q''' in dem oben definirten Sinne benachbarte Q-Functionen sind, so kann man drei entsprechende Zweigpaare $Q'_1, Q'_2; Q''_1, Q''_2; Q'''_1, Q'''_2$ so auswählen, dass sie bei denselben Umläufen von z immer dieselben Substitutionen erleiden.

Bildet man nun mit den irgendwie ausgewählten entsprechenden Zweigen die Determinanten D_{12}, D_{23}, D_{31} der Matrix

$$\begin{vmatrix} Q'_1 & Q''_1 & Q'''_1 \\ Q'_2 & Q''_2 & Q'''_2 \end{vmatrix},$$

so folgt aus der Gleichheit der Gruppe, dass es „multiplicative Functionen“*) in der *z*-Ebene sind, die sich bei Umlauf des Argumentes um einen der drei Punkte *a, b, c* nur mit der Determinante der zugehörigen Substitution multipliciren.

Des Genaueren folgt aus dem definitionsgemässen Verhalten der Q', Q'', Q''' an den einzelnen Stellen der *z*-Ebene und aus der Gleichung $\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 0$, dass die D_{ik} von der Gestalt sind:

$$D_{ik} = \alpha_{ik} \cdot (z-a)^{\lambda'+\lambda''} (z-b)^{\mu'+\mu''} (z-c)^{\nu'+\nu''},$$

unter α_{ik} Constante verstanden, die sämmtlich von Null verschieden sind, wenn die drei Schaaren Q', Q'', Q''' wirklich von einander verschieden sind.

Bedeutet Q', Q'', Q''' drei beliebige, aber entsprechende Zweige der drei Schaaren, so ist identisch:

$$\begin{vmatrix} Q' & Q'' & Q''' \\ Q'_1 & Q''_1 & Q'''_1 \\ Q'_2 & Q''_2 & Q'''_2 \end{vmatrix} = 0,$$

Fällen ganzzahliger Exponenten Ausnahmen erleiden. Vgl. den diesbezüglichen Paragraphen meiner Arbeit. — Ich habe übrigens bisher nur die Gruppen für den sogenannten „symmetrischen“ Fall behandelt.

Schilling.

*) Wegen der Bezeichnung vgl. meine Arbeit in Math. Ann. Bd. 44, 1894. Appell, Journal de Math. III, 9, Acta math. 13, 1890, spricht von „fonctions à multiplicateurs“.

also

$$\alpha_{23} Q' + \alpha_{31} Q'' + \alpha_{12} Q''' = 0.$$

Zwischen irgend drei benachbarten Q -Functionen besteht also eine lineare Relation mit constanten Coefficienten. Infolgedessen kann man die Q -Function mit beliebiger Lage des Nebenpunktes s durch irgend zwei Functionen Q' , Q'' mit specieller Lage des Nebenpunktes in der Form zusammensetzen:

$$(12) \quad Q = \alpha_1 Q' + \alpha_2 Q'',$$

wo α_1 und α_2 Constante sind.

Umgekehrt ist jede solche lineare Verbindung zweier Q -Schaaren wieder eine Schaar, die allen in der Definition der Q -Schaaren angegebenen Bedingungen genügt, also selbst eine Q -Schaar.

Als Fundamentalschaaren Q' , Q'' kann man etwa irgend zwei der sechs, bezw. im Ausnahmefalle der drei als Specialfälle der Q -Function auftretenden P -Functionen wählen. Wir wollen zunächst den *allgemeinen Fall* behandeln. Es sei, um eine bestimmte Wahl zu treffen:

$$(13) \quad \begin{cases} Q' = P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' + 1 & \mu' & \nu' & z \\ & \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}, \\ Q'' = P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu' + 1 & \nu' & z \\ & \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Greife ich irgend einen Zweig Q'_1 von Q' heraus, so ist hierdurch der entsprechende Zweig Q''_1 von Q'' erst bis auf eine beliebige multiplicative Constante bestimmt; lege ich diese aber einmal für irgend ein Paar entsprechender Zweige Q'_1 , Q''_1 fest, so ist zu jedem beliebigen Zweige Q' der ersten Schaar der entsprechende Zweig Q'' der zweiten Schaar vollständig bestimmt. Eine solche Festlegung der entsprechenden Zweige ist in unserem Falle deswegen nothwendig, weil erst dann zu jedem Werte des Verhältnisses $\alpha_1 : \alpha_2$ eine bestimmte Functionsschaar Q gehören kann*).

Wenn dies aber geschehen ist, so gehört zu jedem Werte des Verhältnisses $\alpha_1 : \alpha_2$ eine und nur eine Schaar Q , also auch nur eine Lage des Punktes s ; umgekehrt gehören zu jeder Lage des Punktes s im Allgemeinen zwei Scharen Q , also zwei Werte des Verhältnisses

*) Doch wolle man beachten, dass die Werte α_1 und α_2 selbst für die beiden linear unabhängigen Zweige keineswegs dieselben zu sein brauchen, wenn nur ihr Verhältniss das nämliche ist. Wir können also sehr wohl für die Zusammensetzung aus den zweiten Zweigen noch einen beliebigen constanten Proportionalitätsfactor zu α_1 und α_2 hinzufügen; dies wird späterhin für uns noch wichtig sein. Vgl. die Anm. zu pag. 30.

$\alpha_1 : \alpha_2$. Daraus folgt, dass zwischen s und $\alpha_1 : \alpha_2$ eine Relation dieser Art bestehen muss:

$$s = \frac{A_1 \alpha_1^2 + 2 B_1 \alpha_1 \alpha_2 + C_1 \alpha_2^2}{A_2 \alpha_1^2 + 2 B_2 \alpha_1 \alpha_2 + C_2 \alpha_2^2}.$$

Als entsprechende Zweige Q' und Q'' will ich folgende beiden durch hypergeometrische Reihen dargestellten Functionen auswählen:

$$(14) \quad \begin{cases} Q_1' = (\lambda' + \mu' + \nu') \cdot x^{\lambda'+1} (1-x)^{\nu'} \cdot F(\lambda' + \mu' + \nu' + 1, \lambda' + \mu'' + \nu' + 1, \lambda + 2, \\ Q_1'' = (\lambda + 1) \cdot x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'} \cdot F(\lambda' + \mu' + \nu' + 1, \lambda' + \mu'' + \nu', \lambda + 1, x), \end{cases}$$

wo $x = \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}$ ist.

Wir können nun durch Reihenvergleichung leicht diejenigen speciellen Werthe des Verhältnisses $\alpha_1 : \alpha_2$ finden, für welche sich die übrigen 4 im Kreise enthaltenen P -Functionen ergeben. Die dem Zweige Q_1' oder Q_1'' entsprechenden Zweige Q_1 aller 6 P -Functionen sind nämlich bis auf beliebige constante Factoren durch folgende hypergeometrische Reihen auszudrücken:

$$P_1 \begin{vmatrix} \lambda' + 1 & \mu' & \nu' & x \\ & \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} \\ = x^{\lambda'+1} (1-x)^{\nu'} \cdot F(\lambda' + \mu' + \nu' + 1, \lambda' + \mu'' + \nu' + 1, \lambda + 2, x),$$

$$P_1 \begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ & \lambda'' + 1 & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} \\ = x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'} \cdot F(\lambda' + \mu' + \nu', \lambda' + \mu'' + \nu', \lambda, x),$$

$$P_1 \begin{vmatrix} \lambda' & \mu' + 1 & \nu' & x \\ & \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} \\ = x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'} \cdot F(\lambda' + \mu' + \nu' + 1, \lambda' + \mu'' + \nu', \lambda + 1, x),$$

$$P_1 \begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ & \lambda'' & \mu'' + 1 & \nu'' \end{vmatrix} \\ = x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'} \cdot F(\lambda' + \mu' + \nu', \lambda' + \mu'' + \nu' + 1, \lambda + 1, x),$$

$$P_1 \begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu' + 1 & x \\ & \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} \\ = x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'+1} \cdot F(\lambda' + \mu' + \nu' + 1, \lambda' + \mu'' + \nu' + 1, \lambda + 1, x),$$

$$P_1 \begin{vmatrix} \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ & \lambda'' & \mu'' & \nu'' + 1 \end{vmatrix} \\ = x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'} \cdot F(\lambda' + \mu' + \nu', \lambda' + \mu'' + \nu', \lambda + 1, x).$$

Durch Reihenvergleichung findet man, dass sich diese 6 Reihen aus denen für Q_1' und Q_1'' ergeben, wenn man der Reihe nach setzt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 &= 1 : 0 \\ \alpha_1 : \alpha_2 &= (\lambda' + \mu'' + \nu') : \lambda \\ &= (\lambda - \mu + \nu) : 2\lambda \end{aligned} \right\} s = a, \quad r = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 &= 0 : 1 \\ \alpha_1 : \alpha_2 &= \mu : (\lambda'' + \mu' + \nu') \\ &= 2\mu : (-\lambda + \mu + \nu) \end{aligned} \right\} s = b, \quad r = \infty,$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 &= 1 : 1 \\ \alpha_1 : \alpha_2 &= (\lambda' + \mu'' + \nu') : (\lambda' + \mu'' + \nu'') \\ &= (\lambda - \mu + \nu) : (\lambda - \mu - \nu) \end{aligned} \right\} s = c, \quad r = 1,$$

wo

$$r = \frac{(s-a)(c-b)}{(s-b)(c-a)}$$

ist.

Aus diesen Beziehungen bestimmen sich dann leicht die Constanten der Relation zwischen s oder r und $\alpha_1 : \alpha_2$. Man findet:

$$(16) \quad s = \frac{(-\lambda + \mu + \nu)a(b-c)\alpha_1^2 - 2(\mu a(b-c) + \lambda b(c-a))\alpha_1\alpha_2 + (\lambda - \mu + \nu)b(c-a)\alpha_2^2}{(-\lambda + \mu + \nu)(b-c)\alpha_1^2 - 2(\mu(b-c) + \lambda(c-a))\alpha_1\alpha_2 + (\lambda - \mu + \nu)(c-a)\alpha_2^2}$$

$$(16') \quad r = \frac{-2\lambda\alpha_1\alpha_2 + (\lambda - \mu + \nu)\alpha_2^2}{(-\lambda + \mu + \nu)\alpha_1^2 - 2\mu\alpha_1\alpha_2}.$$

Durch Auflösung nach $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ findet man:

$$(17) \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{-(\mu a(b-c) + \lambda b(c-a)) + s(\mu(b-c) + \lambda(c-a))}{(\lambda - \mu + \nu)(s-b)(c-a)} + \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)\left(\lambda^2 \frac{(a-b)(a-c)}{s-a} + \mu^2 \frac{(b-a)(b-c)}{s-b} + \nu^2 \frac{(c-a)(c-b)}{s-c}\right)}}{(\lambda - \mu + \nu)(s-b)(c-a)},$$

$$(17') \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\lambda - \mu r \pm \sqrt{\lambda^2 - (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2)r + \mu^2 r^2}}{\lambda - \mu + \nu}.$$

Das Verhältniss $\alpha_2 : \alpha_1$ ist eine eindeutige, einwerthige Function auf der oben definirten Riemann'schen Fläche; dementsprechend lässt sich jede algebraische Function von s , welche gleichfalls auf der Fläche eindeutig ist, rational durch $\alpha_2 : \alpha_1$ ausdrücken. Dies gilt insbesondere für die Grösse A der Formel (3) und (4), und zwar muss A ebenso wie s ein in $\alpha_2 : \alpha_1$ quadratischer Ausdruck sein, da A eine ganze algebraische Function zweiten Grades von s ist. Am einfachsten stellt man den Ausdruck auf, indem man berücksichtigt, dass A nur dann unendlich wird, wenn s unendlich wird, und demnach denselben Nenner wie s besitzen muss. A hat also die Gestalt:

$$A = \frac{L\alpha_1^2 + 2M\alpha_1\alpha_2 + N\alpha_2^2}{(-\lambda + \mu + \nu)(b-c)\alpha_1^2 - 2(\mu(b-c) + \lambda(c-a))\alpha_1\alpha_2 + (\lambda - \mu + \nu)(c-a)\alpha_2^2}.$$

L, M, N findet man aus den Bedingungen, dass für

$$\alpha_2 : \alpha_1 = 0 : 1, \quad A = \lambda''(a - b)(a - c),$$

$$\alpha_2 : \alpha_1 = 1 : 0, \quad A = \mu''(b - a)(b - c),$$

$$\alpha_2 : \alpha_1 = 1 : 1, \quad A = \nu''(c - a)(c - b)$$

wird.

Es ergibt sich so:

$$(18) \quad A = (a - b)(a - c)(b - c) \cdot \frac{\lambda''(-\lambda + \mu + \nu)(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2) + \mu''(\lambda - \mu + \nu)(\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2) + \nu''(\lambda + \mu - \nu)\alpha_1\alpha_2}{(-\lambda + \mu + \nu)(b - c)\alpha_1^2 - 2(\mu(b - c) + \lambda(c - a))\alpha_1\alpha_2 + (\lambda - \mu + \nu)(c - a)\alpha_2^2}$$

und analog für $a = 0, b = \infty, c = 1$

$$(18) \quad A' = - \frac{\lambda''(-\lambda + \mu + \nu)(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2) + \mu''(\lambda - \mu + \nu)(\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2) + \nu''(\lambda + \mu - \nu)\alpha_1\alpha_2}{(-\lambda + \mu + \nu)\alpha_1^2 - 2\mu\alpha_1\alpha_2}$$

Im Ausnahmefalle, um nun die Formeln für ihn zusammenzustellen, vereinfachen sich diese bedeutend. Es sei die Benennung der Exponenten so gewählt, dass

$$\lambda' + \mu' + \nu' = 0$$

und damit auch

$$\lambda'' + \mu'' + \nu'' = 0$$

ist. Dann sind die im allgemeinen Falle ausgewählten Schaaren Q', Q'' der Formel (13) auch im Ausnahmefalle brauchbar. Zu dem Kreise benachbarter P -Functionen, die sich für specielle Werthe von $\alpha_1 : \alpha_2$ in $Q = \alpha_1 Q' + \alpha_2 Q''$ ergeben, gehören aber nur:

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' + 1 & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}, \quad P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' + 1 & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix},$$

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' + 1 & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix},$$

die sich, wie im allgemeinen Falle, für die besonderen Werthe:

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 0, \quad s = a,$$

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 0 : 1, \quad s = b,$$

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 1, \quad s = c$$

ergeben.

Aber diese drei Angaben genügen wieder, um s als Function von $\alpha_1 : \alpha_2$ vollkommen zu bestimmen. Wir haben nämlich für die Bewegung von s jetzt nur ein schlichtes Blatt, da sich dasjenige Blatt, in dem im allgemeinen Fall die drei anderen P -Functionen liegen, durch Zusammenrücken der beiden Verzweigungspunkte abgeschnürt hat. Infolgedessen entspricht jetzt jeder Lage von s nur eine Q -Function,

also nur ein Werth von $\alpha_1 : \alpha_2$, während natürlich auch umgekehrt jedem Werthe von $\alpha_1 : \alpha_2$ nur ein Werth s entspricht. s ist also eine lineare Function von $\alpha_1 : \alpha_2$:

$$s = \frac{A_1 \alpha_1 + B_1 \alpha_2}{A_2 \alpha_1 + B_2 \alpha_2}.$$

Man findet:

$$(19) \quad s = \frac{a(b-c)\alpha_1 + b(c-a)\alpha_2}{(b-c)\alpha_1 + (c-a)\alpha_2},$$

$$(19') \quad r = \frac{(s-a)(c-b)}{(s-b)(c-a)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$(20) \quad A = (a-b)(a-c)(b-c) \cdot \frac{\lambda'' \alpha_1 + \mu'' \alpha_2}{(b-c)\alpha_1 + (c-a)\alpha_2}$$

und für $a = 0$, $b = \infty$, $c = 1$

$$(20') \quad A' = -\lambda'' - \mu'' \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Nun drängt sich die Frage auf, wenn man vom allgemeinen Falle stetig zum Ausnahmefall übergeht, was wird dann aus den drei Functionen

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' + 1 & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}, \quad P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' + 1 & \nu'' \end{vmatrix},$$

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' + 1 \end{vmatrix},$$

welche sich im allgemeinen Falle für die Parameterwerthe

$$\alpha_1 : \alpha_2 = (\lambda' + \mu'' + \nu') : \lambda, \quad \alpha_1 : \alpha_2 = \mu : (\lambda'' + \mu' + \nu'),$$

$$\alpha_1 : \alpha_2 = (\lambda' + \mu'' + \nu') : (\lambda' + \mu'' + \nu'')$$

ergeben?

Diese drei Verhältnisse rücken im Ausnahmefalle in das einzige $\alpha_1 : \alpha_2 = -\mu : \lambda$ zusammen*). Die genannten drei P -Functionen

*) Wie überhaupt jeder Werth der Formel (17') für beliebige Lage von r bei Gültigkeit des oberen Vorzeichens in $-\frac{\lambda}{\mu}$ übergeht. — Wir haben hier ein elementares Beispiel vor uns, wie die Abbildung einer mehrblättrigen ebenen Fläche vom Geschlechte 0 auf die schlichte Ebene bei geeigneter Normirung sich verhält, wenn ein Blatt durch Zusammenrücken zweier Verzweigungspunkte sich abschnürt. Die Formel (17') vermittelt in der That im allgemeinen Falle die Abbildung der zweiblättrigen r -Ebene auf die schlichte $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ -Ebene. Wird dann das eine Blatt der r -Ebene beim Grenzübergang $\lim \lambda + \mu + \nu = 0$ abgeschnürt, so entsprechen eben vor Eintreten der Grenze selbst alle Punkte dieses Blattes der unmittelbaren

arten also in eine einzige bestimmte Q -Function aus, die entsteht, wenn der Nebenpunkt s an die Abschnürungsstelle rückt. Es wird interessant sein, die Natur dieser Ausartungsfunction Q genauer zu untersuchen, die in sich die Eigenschaften aller 3 P -Functionen des allgemeinen Falles zu vereinigen hat, ohne selbst eine solche zu sein. Die Zweige Q_1' , Q_1'' der beiden Fundamentalschaaren schreiben sich zufolge der Relation $\lambda' + \mu' + \nu' = 0$ jetzt so:

$$Q_1' = -\lambda x^{\lambda'+1} (1-x)^{\nu'} \cdot F(1, 1-\mu, 2+\lambda, x),$$

$$Q_1'' = (1+\lambda) x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'} \cdot F(1, -\mu, 1+\lambda, x).$$

Dann ergibt sich für den ihnen entsprechenden Zweig von Q :

$$Q_1 = -\mu Q_1' + \lambda Q_1'' = \lambda(\lambda+1) \cdot x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'}$$

$$= \lambda(\lambda+1) \cdot (b-c)^{\lambda'} (a-c)^{\mu'} (a-b)^{\nu'} \cdot (z-a)^{\lambda'} (z-b)^{\mu'} (z-c)^{\nu'}.$$

Dies ist eine bei a, b, c mit den Exponenten λ', μ', ν' verzweigte multiplicative Function von z .

Diese Function muss aber mit einem zweiten Zweig Q_2 zusammen immer noch dieselbe Gruppe*) besitzen, wie Q_1' mit dem Q_2 entsprechenden Zweige Q_2' oder Q_1'' mit Q_2'' zusammen. Daraus können wir sofort schliessen, dass jeder Zweig Q , der nicht ein Multiplum von Q_1 ist, nothwendig identisch verschwindet.

Man bestätigt dies Resultat leicht, indem man wirklich zwei entsprechende Zweige Q_2' und Q_2'' bildet und zusammensetzt. Man kann etwa wählen:

$$Q_2' = -\lambda x^{\lambda''} (1-x)^{\nu''} \cdot F(\lambda'' + \mu' + \nu'', \lambda'' + \mu'' + \nu'', -\lambda, x),$$

$$Q_2'' = (\lambda' + \mu'' + \nu') x^{\lambda''} (1-x)^{\nu''} F(\lambda'' + \mu' + \nu'' + 1, \lambda'' + \mu'' + \nu'', 1-\lambda, x),$$

und diese liefern im Ausnahmefalle:

$$Q_2' = -\lambda x^{\lambda''} (1-x)^{\nu''} \cdot F(\mu, 0, -\lambda, x) = -\lambda x^{\lambda''} (1-x)^{\nu''}$$

$$= -\lambda (b-c)^{\lambda''} (a-c)^{\mu''} (a-b)^{\nu''} (z-a)^{\lambda''} (z-b)^{\mu''} (z-c)^{\nu''},$$

$$Q_2'' = -\mu x^{\lambda''} (1-x)^{\nu''} \cdot F(1+\mu, 0, 1-\lambda, x) = -\mu x^{\lambda''} (1-x)^{\nu''}$$

$$= -\mu (b-c)^{\lambda''} (a-c)^{\mu''} (a-b)^{\nu''} (z-a)^{\lambda''} (z-b)^{\mu''} (z-c)^{\nu''},$$

so dass in der That

$$Q_2 = -\mu Q_2' + \lambda Q_2'' = 0$$

ist.

Umgebung eines einzigen Punktes der $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ -Ebene, während das andere Blatt dem ganzen übrigen Theil der letzteren entspricht. Man vgl. den analogen Fall der Abbildung der Lemniscatenfläche, den ich in Schlömilch's Zeitschrift Bd. 40, pag. 370 (1895) behandelt habe.

Schilling.

*) Diese Annahme ist nicht zutreffend; in dem fraglichen Grenzfalle braucht die Gruppe keineswegs dieselbe zu bleiben. (Vgl. die Anm. pag. 30). Dem entsprechend haben auch die folgenden im Text gegebenen Entwicklungen Ritter's nur bedingte Gültigkeit.

Schilling.

Wir haben also das merkwürdige Resultat:

Wenn der allgemeine Fall stetig in den Ausnahmefall übergeht, so gehen die drei verwandten P-Functionen

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' + 1 & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}, \quad P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' + 1 & \nu'' \end{vmatrix},$$

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' + 1 \end{vmatrix}$$

alle in eine und dieselbe Functionsschaar über, deren linear unabhängige Zweige eine multiplicative Function mit den Exponenten λ' , μ' , ν' und eine identisch verschwindende Function sind.

Der erste Zweig behält also seinen guten Sinn, nur der zweite verschwindet bei allen dreien identisch, und das muss er auch. Denn in der allgemeinen Functionsschaar Q wird bei willkürlicher Lage von s Q_2 eine multiplicative Function, die an allen von a, b, c verschiedenen Punkten holomorph ist. Dies müsste also auch der Fall sein mit dem zweiten Zweige von

$$P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & z \\ \lambda'' + 1 & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}.$$

Nun sind aber die Exponenten dieses zweiten Zweiges an den Stellen a, b, c bzw. $\lambda'' + 1, \mu'', \nu''$, deren Summe gleich 1 ist. Eine multiplicative Function von positiver Exponentensumme kann aber an jeder von a, b, c verschiedenen Stelle nicht anders holomorph sein, als indem sie identisch verschwindet.

§ 4.

Die conforme Abbildung im symmetrischen Falle.

Ich bilde jetzt den Quotienten zweier linear unabhängiger Zweige einer Q -Function

$$\xi = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

ξ hängt dann nicht mehr von den Exponenten selbst, sondern nur noch von den Quadraten der Exponentendifferenzen ab. Wir betrachten nun die conforme Abbildung, welche die Function $\xi(z)$ von der passend zerschnittenen z -Ebene entwirft. Wir legen von irgend einem Punkte O der z -Ebene einander nicht überkreuzende Schnitte nach den

Punkten a, b, c , etwa in der Anordnung der Figur 1, d. h. so, dass man bei positivem Umlauf um den Punkt O die Schnitte in der Reihenfolge A, B, C jeden von $-$ nach $+$ überschreitet. In der so zerschnittenen z -Ebene ist ξ eindeutig, doch so, dass seine Werthe auf dem positiven Ufer eines Querschnittes aus den Werthen auf dem negativen Ufer je durch eine bestimmte lineare Substitution hervorgehen. Das Abbild der zer-

Fig. 1.

schnittenen z -Ebene in der ξ -Ebene, der „Fundamentalebene“ der Function, wird daher durch einen aus 6 Stücken bestehenden Curvenzug begrenzt, von denen immer je zwei auf einander folgende durch eine lineare Substitution zusammengeordnet sind. Die Fläche des Abbilds muss nun diesen Curvenzug so ausfüllen, dass der Umgebung der Punkte a, b, c der z -Ebene je eine Ecke des Bereiches mit der Winkelöffnung $|R(\lambda)|2\pi$, $|R(\mu)|2\pi$, $|R(\nu)|2\pi$ entspricht, dass die Umgebung des Nebenkpunktes s sich auf die doppelt überdeckte Umgebung eines Punktes o im ξ -Bereich abbildet, und dass die Umgebung jedes anderen Punktes der z -Ebene conform in die ξ -Ebene abgebildet wird. Ein Beispiel dieser Art giebt Fig. 2 für $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{4}$.*)

Fig. 2.

Die Lage des Verzweigungspunktes im Fundamentalebene hängt natürlich von der Lage des Nebenkpunktes in der z -Ebene oder vielmehr von seinem Doppelverhältniss zu den Punkten a, b, c ab. Die analytische Untersuchung dieser Abhängigkeit wird den Gegenstand des nächsten

Paragraphen bilden. Hier mögen einige geometrische Betrachtungen ihre Stelle finden, die sich nur auf symmetrische Fälle beziehen sollen, ohne indess diesen Gegenstand zu erschöpfen, sondern sie mögen eben nur als Beispiele dienen. Eine genaue und erschöpfende geometrische

*) Um die in symmetrischer Begrenzung dargestellte Figur zu construiren, hat man in Rücksicht darauf, dass die successive Aufeinanderfolge der drei Substitutionen die Identität erzeugen muss, zunächst die 6 Fixpunkte der Substitutionen zu bestimmen. Am einfachsten geschieht dies, indem man die drei Kreise zeichnet, welche als Begrenzung der dieselben Fundamentalsubstitutionen besitzenden Kreisbogendreiecke ohne Nebenkpunkt dienen. Mit Hülfe der 3 Fixpunktpaare ist es dann leicht die 6 Kreisbogen der Fig. 2 zu zeichnen, indem jene gerade die Schnittpunktpaare der einander zugeordneten Kreisbogen bezw. ihrer Verlängerung darstellen.

Untersuchung aller möglichen Gestalten wird man in der Arbeit von Schilling finden, auf die ich schon oben hingewiesen habe.

Es seien jetzt λ, μ, ν als reelle positive Zahlen vorausgesetzt. Statt z führe ich als unabhängige Variable das Doppelverhältniss

$$x = \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}$$

ein. Die singulären Punkte a, b, c rücken so in die Punkte $0, \infty, 1$, und an die Stelle von s tritt das Doppelverhältniss

$$r = \frac{(s-a)(c-b)}{(s-b)(c-a)}.$$

ξ genügt als Function von x der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 \xi}{dx^3} : \frac{d\xi}{dx} - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} : \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1-\lambda^2)}{x^2} + \frac{1 + \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2)}{x(x-1)} + \frac{\frac{1}{2}(1-\nu^2)}{(x-1)^2} - \frac{3}{2(x-r)^2} \\ & \quad + \frac{B + 2r - 1}{x(x-1)(x-r)}, \end{aligned}$$

wo

$$B = \pm \sqrt{\lambda^2 - (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2)r + \mu^2 r^2}$$

ist.

Wenn alle Coefficienten auf der rechten Seite dieser Differentialgleichung reell sind, so bilden sich die einzelnen Theile der reellen Zahlenaxe in der x -Ebene auf Kreisbogen ab. Wenn man daher die x -Ebene durch die reelle Axe in eine positive und negative Halbebene zerschneidet, so bildet ein beliebiger Zweig von ξ die positive Halbebene auf ein von Kreisbogen begrenztes Gebiet in der ξ -Ebene ab, und man findet die Abbilder der negativen Halbebene, sowie diejenigen der positiven Halbebene, die durch andere Zweige von ξ entworfen werden, wie überhaupt die ganze analytische Fortsetzung der Function ξ , indem man das zuerst erhaltene Kreisbogenpolygon an seinen einzelnen Seiten beliebig oft durch reciproke Radien spiegelt. Die Schlussweise ist eben ganz genau dieselbe, wie sie zuerst von Hrn. H. A. Schwarz auf den Fall der gewöhnlichen P -Function angewandt ist in seiner fundamentalen Abhandlung: „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Argumentes darstellt“ *).

Damit die Coefficienten auf der rechten Seite der Differentialgleichung alle reell seien, müssen die Exponentendifferenzen λ, μ, ν entweder reelle oder rein imaginäre Zahlen, r und B reell sein. Dann

* Crelle's Journal, Bd. 75, 1873, pag. 292—335, Ges. Abh. II, pag. 211—259 und 172—174.

besteht das Abbild der positiven x -Halbebene aus einem Kreisbogenviereck ohne Windungspunkte im Innern, von dem drei Winkel die Werthe $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ haben, während der vierte, der dem Nebenkpunkt r entspricht, die Grösse 2π hat und so beschaffen ist, dass die beiden in ihm zusammentreffenden Seiten auf demselben Kreise liegen, dass also die eine Seite sich auf demselben Wege entfernt, auf dem die andere ankommt. Dabei müssen die Ecken mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, 2π auf dem Rande des Vierecks in demselben Sinne auf einander folgen, wie die Punkte 0 , ∞ , 1 , r auf dem Rande der positiven Halbebene x , also die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ im Uhrzeigersinne. Lässt man den Punkt r auf der x -Axe wandern — aber nur in solchen Intervallen, dass B reell bleibt —, so bleibt die Gruppe dieselbe, das Viereck also in dasselbe System von 3 Kreisen eingehängt, nur der dem Nebenkpunkte r entsprechende Rückkehrpunkt, den ich mit ρ bezeichnen will, ändert seine Lage in stetiger Weise, während die den Punkten 0 , ∞ , 1 entsprechenden Ecken entweder fest bleiben oder auch sich in der Weise unstetig ändern können, dass sie von einem Schnittpunkt zweier Kreise plötzlich in den anderen Schnittpunkt übergehen.

Wir haben für reelle λ , μ , ν jetzt folgende 3 Fälle zu unterscheiden:

1) *Die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche für r sind conjugirt complex, also*

$$(\lambda + \mu + \nu)(-\lambda + \mu + \nu)(\lambda - \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu) > 0.$$

2) *Die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche sind reell und getrennt, d. h.*

$$(\lambda + \mu + \nu)(-\lambda + \mu + \nu)(\lambda - \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu) < 0.$$

3) *Die Verzweigungspunkte fallen in einem Punkte der reellen Axe zusammen:*

$$(\lambda + \mu + \nu)(-\lambda + \mu + \nu)(\lambda - \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu) = 0.$$

Ich will die Benennungen jetzt so gewählt denken, dass immer $\lambda \geq \mu \geq \nu$ ist. Dann kann man die drei Fälle auch einfacher so charakterisiren:

$$1) \quad \lambda < \mu + \nu,$$

$$2) \quad \lambda > \mu + \nu,$$

$$3) \quad \lambda = \mu + \nu.$$

Im ersten Falle $\lambda < \mu + \nu$ ist B für jeden reellen Werth von r reell. Ich kann also r die ganze reelle Axe durchlaufen lassen; um aber alle möglichen Vierecke der ξ -Ebene zu bekommen, muss r dieselbe zweimal durchlaufen, da man bei einmaligem Durchlaufen auf der Riemann'schen Fläche noch keinen geschlossenen Weg beschreibt.

Diese doppelt überdeckte reelle Axe der x -Ebene zerfällt durch die singulären Punkte $0, \infty, 1$ (bezw. a, b, c) in 6 Segmente, und der geometrische Charakter der Figur in der ξ -Ebene wird davon abhängen, in welchem der 6 Segmente der Nebenpunkt liegt. Man erhält so bei der zweimaligen Durchlaufung der reellen Axe einen Cyklus von 6 Figuren. Die Uebergänge zwischen den einzelnen Figuren werden durch 6 verschiedene demselben System von drei Kreisen eingehängte Kreisbogendreiecke gebildet, welche den $6P$ -Functionen entsprechen, die aus unserer Q -Function entstehen, wenn der Nebenpunkt in einen der singulären Punkte tritt. In den 6 Vierecken besitzen die Ecken a_1, b_1, c_1 stets die Winkel $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ und dieselbe Lage in der Configuration der begrenzenden Kreise. In den Dreiecken ist einer dieser Winkel um π vermehrt oder vermindert, z. B. erhalten wir für $r=0$ zwei Dreiecke mit den Winkeln $(\lambda+1)\pi, \mu\pi, \nu\pi$ und $(\lambda-1)\pi, \mu\pi, \nu\pi$ und analog für $r=\infty, r=1$.

Fig. 3a.

Fig. 3b.

Je nachdem $(\lambda-1)\pi$ positiv oder negativ d. h. $\lambda \geq 1$ ist, hat die Ecke im Dreieck dieselbe Lage wie in dem Viereck oder ist in den zweiten Schnittpunkt der bezüglichen Kreisbogen gerückt. Man wolle sich diese Verhältnisse an den Vierecken (Fig. 3a, b) klar machen, indem man den Nebenpunkt r in den Punkt 0 oder a hineinrücken lässt. Die gleiche Bemerkung gilt für die beiden folgenden Fälle. Ein Beispiel der 12 Figuren giebt für $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}, \nu = \frac{1}{3}$ die beigefügte Tafel unter Nr. I*).

*) In Ritter's Bearbeitung fanden sich für jeden der drei Fälle je 4 Serien von Figurenskizzen, den 4 Bedingungssystemen entsprechend:

- 1) $\lambda > 1, \mu > 1, \nu > 1,$
- 2) $\lambda > 1, \mu > 1, \nu < 1,$
- 3) $\lambda > 1, \mu < 1, \nu < 1,$
- 4) $\lambda < 1, \mu < 1, \nu < 1.$

Doch bieten diese keine wesentlichen Unterschiede. Ich glaubte daher die über-grosse Figurenzahl für den Druck in der Weise reduciren zu sollen, dass ich die

Im zweiten Falle $\lambda > \mu + \nu$ ist B nur reell für Werthe von r ausserhalb der Strecke zwischen den beiden Verzweigungspunkten:

$$R_1 = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - \sqrt{(\lambda + \mu + \nu)(\lambda - \mu - \nu)(\lambda - \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu)}}{2\mu^2},$$

$$R_2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 + \sqrt{(\lambda + \mu + \nu)(\lambda - \mu - \nu)(\lambda - \mu + \nu)(\lambda + \mu - \nu)}}{2\mu^2}.$$

Diese liegen beide im Intervall zwischen 1 und ∞ . Um das zu beweisen, brauche ich nur zu zeigen, dass $R_1 > 1$ ist. Ich kann schreiben:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - \sqrt{(\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)^2 - 4\mu^2\nu^2}}{2\mu^2} \\ &> \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - \sqrt{(\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)^2}}{2\mu^2}. \end{aligned}$$

Nun ist $\lambda > \mu + \nu$, also auch $\lambda^2 > (\mu + \nu)^2 > \mu^2 + \nu^2$, folglich $\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 > 0$, d. h.

$$\sqrt{(\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)^2} = \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2,$$

und so ergibt sich:

$$R_1 > \frac{(\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2) - (\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)}{2\mu^2} = 1, \text{ w. z. b. w.}$$

Um alle möglichen Vierecke und Dreiecke zu erhalten, haben wir r nur ausserhalb der Strecke $R_1 R_2$ zu variiren, aber so, dass wir jeden Punkt zweimal überstreichen, einmal im oberen, einmal im unteren Blatt der Riemann'schen Fläche. Während der Punkt r bei R_1 oder R_2 in's andere Blatt übergeht und umkehrt, läuft der Rückkehrpunkt ρ in der ξ -Figur auf derselben Kreislinie, auf der er sich befindet, in demselben Sinne weiter, ohne dass die Figur ihren morphologischen Charakter ändert. Ich werde dementsprechend für die Lage von r in dem Intervalle $1 < r \leq R_1$ und in dem Intervalle $R_2 \leq r < \infty$ nur je eine Figur zu zeichnen haben, während den Intervallen $-\infty < r < 0$ und $0 < r < 1$, ebenso den speciellen Lagen $r = 0, 1, \infty$ je zwei morphologisch verschiedene Dreiecke entsprechen. Der Cyklus besteht also wieder aus 12 Figuren, die durch stetiges Wandern des Rückkehrpunktes ρ aus einander folgen. Ein Beispiel für $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $\nu = \frac{1}{4}$ giebt die Tafel unter Nr. II.

Figuren 3a, b dem Texte hinzufügte, die den in Frage stehenden Unterschied angeben, dann jedoch allemal nur eine der Figurenserien beibehielt. Dieselben habe ich in derselben Weise, wie die Figurentafeln meiner eigenen citirten Arbeit, gezeichnet und angeordnet. Jedem Beispiel habe ich die doppelt überdeckte Axe hinzugefügt. Soweit sie zu reellem B gehört, ist sie stark ausgezogen; durch Zahlen ist angegeben, zu welchem Intervall bezw. welchem singulären Punkt die einzelne Figur gehört.

Schilling.

Im dritten Falle $\lambda = \mu + \nu$ endlich lassen sich die Figuren immer geradlinig darstellen, eine Eigenschaft, die indess auch in den vorigen Fällen unter Umständen statt haben kann. Denken wir uns das System der drei geraden Linien gegeben, zeichnen in dasselbe irgend ein Viereck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ und einem Rückkehrpunkte ein und lassen letzteren stetig wandern, so bekommen wir nicht mehr einen Cyklus von Figuren, sondern eine Reihe, die beiderseits durch je eine Figur begrenzt ist, die nicht aus einem Viereck oder einem Dreieck, sondern entweder aus einem Winkelraum oder aus zwei getrennten Winkelräumen besteht. Ein Wandernlassen des Rückkehrpunktes über diese Grenzfiguren hinaus ist unmöglich. Durchläuft man die Figurenreihe von der einen Grenzfigur bis zur anderen, so läuft der Nebenpunkt r von der Stelle $\frac{1}{\mu}$ aus längs der ganzen reellen Axe über ∞ hinweg, bis er wieder von der anderen Seite her in den Punkt $\frac{\lambda}{\mu}$ einläuft. $\frac{\lambda}{\mu}$ ist der Punkt, in dem sich beim stetigen Uebergang vom allgemeinen zum Ausnahmefall die Blätter der Riemannschen Fläche abschnüren,

Wir erhalten also, wenn wir die Figuren etwa mit denen des zweiten allgemeinen Falles $\lambda > \mu + \nu$ vergleichen, von den Figuren seines Cyklus nur die dem einen Blatte angehörende Hälfte. Versuchen wir, auch die dem anderen Blatte des allgemeinen Falles entsprechenden Figuren zu zeichnen, so findet man, dass sie sich in das gegebene System gerader Linien nur mit umgekehrter Aufeinanderfolge der Ecken, also bei richtiger Aufeinanderfolge nur in ein anderes, symmetrisch gebildetes System dreier gerader Linien einzeichnen lassen. Wir bekommen somit statt des ursprünglich geschlossenen Figurencyklus zwei gänzlich von einander getrennte Figurenreihen, die zu verschiedenen, nämlich symmetrisch gebauten Gruppen gehören, entsprechend der früher analytisch gefundenen Thatsache, dass der Cyklus verwandter Q -Functionen in zwei getrennte Reihen untereinander verwandter Functionen zerfällt *). Der geometrische Grund hierfür liegt, wie man sieht, darin, dass ein System dreier Kreise, welche nicht durch einen Punkt gehen, zu jedem Dreieck auch ein symmetrisches enthält, dass also eine Figur, wenn sie mit der einen Aufeinanderfolge von Ecken eingezeichnet werden kann, immer auch mit der anderen Aufeinanderfolge einzuzichnen ist. Gehen aber die drei Kreise durch einen Punkt, sind es z. B. gerade Linien, so ist das symmetrische Dreieck in dem System nicht mit enthalten. Ein Beispiel für $\lambda = 1\frac{5}{12}$, $\mu = \frac{3}{4}$, $\nu = \frac{2}{3}$ sehe man auf der Tafel unter Nr. III.

*) Vgl. pag. 12 dieser Arbeit, sowie Schilling, geometrische Theorie der s -Function mit complexen Exponenten II. Math. Ann. Bd. 46 pag. 536 f. (1895.)

Bei der einen Figurenreihe liegt die Ecke a_1 , wie man sieht, im Allgemeinen, d. h. wenn r nicht gleich 0, ∞ , 1 ist, im Unendlichen, die Ecken b_1 und c_1 im Endlichen, bei der anderen umgekehrt b_1 und c_1 im Unendlichen und a_1 im Endlichen*).

*) Von Ritter ist übersehen worden, dass auch für die Lage $\frac{\lambda}{\mu}$ des Nebenpunktes stets ein wohl brauchbarer Bereich existirt. Ich habe denselben in dem Beispiel III der Tafel sogleich in Figur 15 hinzugefügt. Für ihn gehen alle drei Kreise durch dieselben beiden Punkte. Dem entspricht, dass jetzt die Gruppe nicht mehr dieselbe ist, wie für die übrigen Lagen des Nebenpunktes s . Genauer über diese Verhältnisse wolle man in meiner bereits öfter genannten Arbeit nachsehen. Hier möchte ich im Anschluss an die von Ritter pag. 21 ff. gegebenen Entwicklungen nur noch den einfachen analytischen Grenzübergang für die zugehörigen Functionen geben, den man vorzunehmen hat, um continuirlich von den Bereichen, für die s in der Nähe von $\frac{\lambda}{\mu}$ liegt, zu unserem speciellen Bereich für $s = \frac{\lambda}{\mu}$ zu gelangen, ohne eine unbrauchbare Ansartung zu passiren.

Im Ausnahmefalle, d. h. für $\lambda + \mu + \nu = 0$ ist nach pag. 22.

$$Q_1' = -\lambda x^{\lambda'+1} (1-x)^{\nu'} \cdot F(1, 1-\mu, 2+\lambda, x),$$

$$Q_1'' = (1+\lambda) x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'} \cdot F(1, -\mu, 1+\lambda, x)$$

und

$$Q_2' = -\lambda x^{\lambda''} (1-x)^{\nu''},$$

$$Q_2'' = -\mu x^{\lambda''} (1-x)^{\nu''}.$$

Wir bilden nun

$$Q_1 = \alpha_1 Q_1' + \alpha_2 Q_1'',$$

$$Q_2 = \frac{\alpha_1}{\kappa} Q_2' + \frac{\alpha_2}{\kappa} Q_2'',$$

wo κ einen beliebigen von x unabhängigen Factor bezeichnet, den wir gemäss der Anm. zu pag. 17 noch frei zur Verfügung haben. Es sei nun am einfachsten $\alpha_2 = \lambda$, $\alpha_1 = -\mu + \varepsilon$, $\kappa = \varepsilon$ gesetzt, wo ε allgemein einen endlichen Werth haben möge, der bei Bewegung des Nebenpunktes s zu variiren ist und erst in der Grenze gegen 0 convergirt. Rückt also der Nebenpunkt s in die Stelle $\frac{\lambda}{\mu}$ hinein, so wird $\lim \varepsilon = 0$, d. h. $\alpha_1 : \alpha_2 = -\frac{\mu}{\lambda}$, und wir erhalten:

$$\lim Q_1 = \lambda(1+\lambda) x^{\lambda'} (1-x)^{\nu'},$$

$$\lim Q_2 = -\lambda x^{\lambda''} (1-x)^{\nu''}$$

und demnach

$$\lim \frac{Q_1}{Q_2} = -(1+\lambda) x^{\lambda} (1-x)^{\nu} = -(1+\lambda)(b-c)^{\lambda} (a-c)^{\mu} (a-b)^{\nu} \cdot (z-a)^{\lambda} (z-b)^{\mu} (z-c)^{\nu}.$$

$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

ist. Wir sehen also, und das ist in der That ein wichtiges Resultat —, dass auch Q_2 eine nicht verschwindende Function bleibt, wenn s_2 in den Doppelpunkt $\frac{\lambda}{\mu}$ der Riemann'schen Fläche hineinrückt.

§ 5.

Der Verzweigungspunkt des Fundamentalbereichs als Function des Nebenpunktes.

Wir haben im vorigen Paragraphen an dem Beispiel des symmetrischen, d. h. reellen Falles geometrisch verfolgt, wie der Rückkehrpunkt des ξ -Vierecks stetig seine Lage ändert, wenn der Nebenpunkt längs der reellen Axe, oder längs eines Theiles derselben wandert. Das führt uns darauf, allgemein den Rückkehrpunkt, oder im nicht-symmetrischen Falle den Verzweigungspunkt des Bereichs als Function der Lage des Nebenpunktes s oder r anzusehen. Dabei werden wir für die Variable s oder r naturgemäss als geometrisches Substrat im allgemeinen Falle die zugehörige zweiblättrige Riemann'sche Fläche zu Grunde legen.

Diesen Grenzübergang können wir leicht auch durch unsere Bereiche, das Abbild des Quotienten $\frac{Q_1}{Q_2}$, veranschaulichen. Würden wir in Fig. 4 oder 5 des Beispiels III der Tafel den Einschnitt einfach sich zusammenziehen, oder in Fig. 11 oder 12 in den Bereich hinein sich weiter fortsetzen lassen, so würden wir allerdings in der Grenze einen oder zwei unbrauchbare Winkelräume erhalten. Doch können wir, ausgehend etwa von Fig. 11 den Grenzübergang auch in der Weise vornehmen, dass wir an die Seite $c_1 a_1$ einen Parallelstreifen ansetzen, wie in nebenstehender Figur angedeutet ist. Derselbe mag dann breiter und breiter werden, bis c_1 an dieselbe Stelle wie b_1 gerückt ist, d. h. wir zur Figur 15 gelangt sind. (Würde der Streifen noch breiter werden, so gelangen wir zur Figur 12 der Tafel, so dass dann der Nebenpunkt s über den Doppelpunkt $\frac{\lambda}{\mu}$ gelangt ist, ohne dass in dem Bereich irgend welche Ausartung stattfindet.)

Wollen wir jetzt völlige Uebereinstimmung zwischen diesen soeben geschilderten geometrischen und analytischen Grenzübergängen herbeiführen, so brauchen wir einmal den geradlinig begrenzten Bereich nur so gezeichnet zu denken, dass der Punkt b_1 in den Nullpunkt, der dem Nebenpunkt s entsprechende Punkt in den Einheitspunkt fällt, andererseits dementsprechend die abbildende Function so festzulegen, dass sie für $z = \alpha, b, s$, wo $s = \frac{\lambda}{\mu - \varepsilon}$ ist, entsprechend die Werthe $\infty, 0, 1$ annimmt. Dieser analytischen Normirung entspricht, dass wir anstatt $\frac{Q_1}{Q_2}$ die

lineare Verbindung $\frac{\alpha \frac{Q_1}{Q_2} + \beta}{\gamma \frac{Q_1}{Q_2} + \delta}$ wählen, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vom Parameter ε abhängige

Constanten sind, die unserer Bedingung gemäss sofort zu bestimmen sind. Es ist wohl unnöthig, auch ihre ausgerechneten Werthe noch herzusetzen.

Schilling.

ϱ ist der Werth von ξ im Nebenpunkt. Gehen wir zur ursprünglichen homogenen linearen Differentialgleichung, d. h. zu der Functionsschaar Q zurück, so lautet die Frage also:

Welche Werthe haben die Zweige der Functionsschaar Q in ihrem Nebenpunkte s ?

Ich will der Einfachheit halber statt mit dem Nebenpunkte s mit seinem Doppelverhältniss r zu den Punkten a, b, c operiren, d. h. a, b, c nach $0, \infty, 1$ gelegt denken. Das ist um so unwesentlicher, als ich schliesslich als unabhängige Variable gar nicht r selbst benutzen will, sondern eine auf der Riemann'schen Fläche eindeutige Variable, durch welche wir r erst quadratisch ausdrücken.

Eine solche auf der Riemann'schen Fläche eindeutige Variable ist uns unmittelbar durch das Verhältniss

$$\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

der Zusammensetzungscoefficienten von Q, Q'' gegeben. r drückt sich hierdurch in der That quadratisch aus:

$$r = \frac{-2\lambda\alpha_1\alpha_2 + (\lambda - \mu + \nu)\alpha_2^2}{(-\lambda + \mu + \nu)\alpha_1^2 - 2\mu\alpha_1\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{-2\lambda\alpha_1 + (\lambda - \mu + \nu)\alpha_2}{(-\lambda + \mu + \nu)\alpha_1 - 2\mu\alpha_2}.$$

Bezeichnen wir die Werthe zweier Zweige Q_1, Q_2 von Q im Nebenpunkte r mit P_1, P_2 , so bilden die linearen Verbindungen von P_1, P_2 eine Functionsschaar auf der Riemann'schen Fläche, die sich nach pag. 17 folgendermaassen durch α_1, α_2 ausdrückt:

$$P = \alpha_1 \cdot P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \lambda' + 1 & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} r + \alpha_2 P \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \lambda' & \mu' + 1 & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix},$$

worin man für r den oben gegebenen quadratischen Ausdruck einzusetzen hat.

Der gegebene Ausdruck hängt aber gar nicht von dem Verhältniss $\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ allein ab, sondern auch von den Variablen α_1, α_2 selbst. Das führt uns mit zwingender Nothwendigkeit dazu, P nicht als eine Function einer einzigen unabhängigen Variablen α , sondern als eine homogene Function, eine „Form“, der zwei unabhängigen Variablen α_1, α_2 selbst zu betrachten.

$P(\alpha_1, \alpha_2)$ ist also eine Formenschaar ersten Grades der homogenen Variablen α_1, α_2 in der schlichten α -Ebene, auf welche die zweiblättrige Riemann'sche Fläche über der r -Ebene ein-eindeutig abgebildet ist.

In der Zusammensetzungsformel

$$Q(x) = \alpha_1 Q'(x) + \alpha_2 Q''(x)$$

müssen, damit die dargestellte Q -Function überhaupt einen Sinn hat,

die Coefficienten α_1, α_2 der Beschränkung unterworfen werden, dass keiner von ihnen unendlich werden darf, und dass nicht beide gleichzeitig verschwinden. Dies ist aber genau dieselbe Beschränkung, der man homogene Variablen bei formentheoretischen Betrachtungen stets zu unterwerfen hat, so dass auch diese hier ganz im Wesen der Sache liegt.

Es ist nun das functionentheoretische Verhalten der Formenschaar $P(\alpha_1, \alpha_2)$ an den verschiedenen Stellen der α -Ebene zu charakterisiren.

Die Schaar ist offenbar holomorph und unverzweigt für alle Werthsysteme $\alpha_1 : \alpha_2$, für welche r von $0, \infty, 1$ verschieden ist, d. h. für alle Werthsysteme mit Ausnahme folgender sechs:

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 0, \quad \alpha_1 : \alpha_2 = (\lambda - \mu + \nu) : 2\lambda,$$

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 0 : 1, \quad \alpha_1 : \alpha_2 = 2\mu : (-\lambda + \mu + \nu),$$

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 1, \quad \alpha_1 : \alpha_2 = (\lambda - \mu + \nu) : (\lambda - \mu - \nu).$$

Beschreibt dagegen $\alpha = \alpha_1 : \alpha_2$ eine Umkreisung eines dieser Ausnahmepunkte, indem gleichzeitig α_1, α_2 selbst wieder zu ihren Anfangswerthen zurückkehren, so umkreist in

$$P = \alpha_1 Q'(r) + \alpha_2 Q''(r)$$

r einen der Punkte $0, \infty, 1$. Zwei Zweige von Q' und die entsprechenden von Q'' erleiden also eine bestimmte, und zwar dieselbe, lineare Substitution A, B oder C . Da sich α_1, α_2 reproduciren, erleiden also die entsprechenden Zweige von P ebenfalls dieselben linearen Substitutionen A, B, C . Wir haben also den Satz:

Zwei Zweige der Formenschaar P erleiden eine lineare Substitution A bei jeder Umkreisung eines der beiden Punkte $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{2\lambda}{\lambda - \mu + \nu}$, eine Substitution B bei Umkreisung eines der Punkte $\alpha = \infty$ und $\alpha = \frac{-\lambda + \mu + \nu}{2\mu}$, sowie eine Substitution C bei der Umkreisung der Punkte $\alpha = 1$ und $\alpha = \frac{\lambda - \mu - \nu}{\lambda - \mu + \nu}$.

P ist also, was ich in Math. Ann. Bd. 47*) eine „Riemann'sche Formenschaar“ nenne, und zwar ist in der dortigen Bezeichnungsweise $n = 2, p = 0, s = 6$ zu setzen.

Wir fragen vor allem nach den Exponenten der Schaar P an ihren 6 Verzweigungsstellen.

Es sei allgemein $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ eine solche Verzweigungsstelle, η_1, η_2 irgend eine willkürliche von den Verzweigungsstellen verschiedene feste Stelle. Ich verstehe unter $(\alpha\beta)$ allgemein die Determinante $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, die an der Stelle β_1, β_2 in der ersten Ordnung verschwindet. Ich setze nun die Identitäten an:

*) „Ueber Riemann'sche Formenschaaren auf einem beliebigen algebraischen Gebilde“. (1896), p. 157–221,

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 \cdot \frac{(\alpha \eta)}{(\varepsilon \eta)} - \eta_1 \frac{(\alpha \varepsilon)}{(\varepsilon \eta)},$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_2 \cdot \frac{(\alpha \eta)}{(\varepsilon \eta)} - \eta_2 \frac{(\alpha \varepsilon)}{(\varepsilon \eta)}$$

und schreibe also

$$P = (\varepsilon_1 Q'(r) + \varepsilon_2 Q''(r)) \frac{(\alpha \eta)}{(\varepsilon \eta)} - (\eta_1 Q'(r) + \eta_2 Q''(r)) \frac{(\alpha \varepsilon)}{(\varepsilon \eta)}.$$

Die Fundamentalzweige von P setzen sich aus den Fundamentalzweigen von Q' und Q'' zusammen.

Ein Zweig von Q' oder Q'' oder einer linearen Verbindung von Q' und Q'' mit constanten Coefficienten hat aber an einer Stelle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ in α gemessen denselben Exponenten, wie in r gemessen an der entsprechenden Stelle $r=0, r=\infty$ oder $r=1$. Denn $r, \frac{1}{r}, r-1$ verschwinden ja jedes an der betreffenden Stelle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ in α gemessen in der ersten Ordnung, da die Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche r nicht in diesen Punkten liegen (wenn ich λ, μ, ν von 0 verschieden voraussetze).

Daher besitzt auch in dem letzten Ausdruck für P das erste Glied dieselben Exponenten, wie die Schaar

$$\varepsilon_1 Q'(r) + \varepsilon_2 Q''(r),$$

das zweite Glied um 1 höhere Exponenten, als die Schaar

$$\eta_1 Q'(r) + \eta_2 Q''(r).$$

Die 6 Werthsysteme $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sind aber gerade diejenigen auf Seite 19 angegebenen speciellen Werthsysteme α_1, α_2 , für welche sich

$$\alpha_1 Q'(x) + \alpha_2 Q''(x)$$

auf eine P -Function reducirt; wir können danach die Exponenten der Fundamentalzweige des ersten Gliedes im Ausdruck für P sofort angeben, nämlich

für $\varepsilon_1:\varepsilon_2=1:0$	Exp.: $\lambda'+1, \lambda''$	$\varepsilon_1:\varepsilon_2=(\lambda-\mu+\nu):2\lambda$	Exp.: $\lambda', \lambda''+1,$
$\varepsilon_1:\varepsilon_2=0:1$	„ $\mu'+1, \mu''$	$\varepsilon_1:\varepsilon_2=2\mu:(-\lambda+\mu+\nu)$	„ $\mu', \mu''+1,$
$\varepsilon_1:\varepsilon_2=1:1$	„ $\nu'+1, \nu''$	$\varepsilon_1:\varepsilon_2=(\lambda-\mu+\nu):(\lambda-\mu-\nu)$	„ $\nu', \nu''+1.$

Die Exponenten des zweiten Terms in P sind dagegen mindestens, in entsprechender Weise angeordnet:

$\lambda'+1, \lambda''+1$	$\lambda'+1, \lambda''+1,$
$\mu'+1, \mu''+1$	$\mu'+1, \mu''+1,$
$\nu'+1, \nu''+1$	$\nu'+1, \nu''+1,$

also nicht niedriger als die entsprechenden Exponenten des ersten Gliedes. Daher sind auch die Exponenten der Formenschaar P an den 6 Stellen jedenfalls mindestens gleich den für das erste Glied angegebenen.

Um zu beweisen, dass sie thatsächlich nicht grösser sind, und um gleichzeitig zu zeigen, dass die Formenschaar P keine Nebenpunkte in der α -Ebene besitzt, benutze ich jetzt einen Satz über die Anzahl der Nebenpunkte in einer Formenschaar von gegebenem Grade und gegebenen Exponenten, den ich in der oben genannten Arbeit*) bewiesen habe:

Die Anzahl der Nebenpunkte einer n -gliedrigen Riemann'schen Formenschaar auf einem algebraischen Gebilde vom Geschlechte p ist

$$\varrho = n\delta + n(n-1)(p-1) - \Sigma\lambda + s \cdot \frac{n(n-1)}{2},$$

unter δ den Grad der Formenschaar, unter s die Anzahl der Verzweigungspunkte, unter $\Sigma\lambda$ die Summe der Exponenten in denselben verstanden.

δ ist hierbei in multiplicativen Primformen zu messen.

In unserm Falle ist $n = 2$, $p = 0$, $\delta = 1$, $s = 6$, also

$$\varrho = 6 - \Sigma\lambda.$$

Unsere Formenschaar ist an allen von den Verzweigungsstellen verschiedenen Stellen holomorph, kann also höchstens Nebenpunkte von positiver Multiplicität besitzen, es muss also nothwendig $\varrho \geq 0$ sein. Das giebt zuerst für die Exponentensumme die Ungleichung

$$\Sigma\lambda \leq 6.$$

Nun ist aber die Summe der auf der vorigen Seite angegebenen Mindestwerthe für die Exponenten schon $= 6$; also kann kein Exponent einen grösseren Werth haben, als den angegebenen Mindestwerth, da sonst $\Sigma\lambda > 6$ wäre. Also haben die Exponenten genau die angegebenen Werthe. Dann ist aber $\Sigma\lambda = 6$, also $\varrho = 0$, d. h., die Formenschaar P besitzt keinerlei Nebenpunkte.

Wir können also unsere Formenschaar P jetzt so kennzeichnen:

P besitzt an seinen 6 Verzweigungsstellen die folgenden genauen Exponenten:

an $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 1 : 0$	Exp. $\lambda' + 1, \lambda''$	$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = (\lambda - \mu + \nu) : 2\lambda$	Exp. $\lambda', \lambda'' + 1,$
$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 0 : 1$	„ $\mu' + 1, \mu''$	$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 2\mu : (-\lambda + \mu + \nu)$	„ $\mu', \mu'' + 1$
$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = 1 : 1$	„ $\nu' + 1, \nu''$	$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = (\lambda - \mu + \nu) : (\lambda - \mu - \nu)$	„ $\nu', \nu'' + 1$

und besitzt nirgends einen Nebenpunkt.

*) Math. Ann. Bd. 47, pag. 163.

Dasselbe Resultat gilt natürlich bei Rückwärtsübertragung auf die Riemann'sche Fläche r , wenn man z. B. statt α_1, α_2 als homogene Coordinaten die Ausdrücke

$$\begin{aligned} r_1 &= -2\lambda\alpha_1\alpha_2 + (\lambda - \mu + \nu)\alpha_2^2, \\ r_2 &= (-\lambda + \mu + \nu)\alpha_1^2 - 2\mu\alpha_1\alpha_2 \end{aligned}$$

eingührt; nur ist dann der Grad in r_1, r_2 natürlich $\frac{1}{2}$, und in den Verzweigungspunkten R der Fläche sind die Exponenten in $(r - R)^{\frac{1}{2}}$ zu messen.

P muss als eine Riemann'sche Formenschaar von α_1, α_2 natürlich einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen).*

*) Wie Ritter die Fortsetzung dieser Untersuchungen dachte, ist mir nicht bekannt. Vor allem würde man wünschen, die Differentialgleichung in extenso aufzustellen, also auch ihre accessorischen Parameter zu bestimmen. Wann werden letztere insbesondere für reelle Grössen λ^2, μ^2, ν^2 gleichfalls reell sein, wie lässt sich der zugehörige Fundamentalbereich des Quotienten zweier linear unabhängigen Particularlösungen construiren? Sodann würden die Betrachtungen auch für den Ausnahmefall vollständig durchzuführen sein.

Schilling.