10. *Ueber das numerische Verhältniss
der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien
nach der molecularen Theorie;
von W. Voigt.*

1. Es ist bekannt, dass in Bezug auf das numerische Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien die ältere Moleculartheorie der Elasticität in einen anscheinend unlösbaren Widerspruch mit der Erfahrung geriet, der ihre zeitweilige Verdrängung durch eine Theorie der „Nahewirkungen“ zur Folge hatte. Wenn nun auch diese letztere Theorie zu Formeln geführt hat, die sich nach jeder Richtung bewährt haben, so war es doch im Interesse der Ausarbeitung unserer molecularen Vorstellungen nötig, den Grund aufzusuchen, aus dem die ältere Theorie zu falschen Resultaten geführt hat.

Diese Untersuchung¹⁾ ergab in Bezug auf *krystallinische* Körper das durchaus plausible Resultat, dass es eine ungerechtfertigte Specialisirung der Moleculartheorie involvire, die Molecularkräfte als nur von der Entfernung abhängig anzunehmen, und dass jeder Widerspruch mit der Erfahrung verschwindet, wenn man die Wechselwirkungen zwischen zwei Molecülen in einer den Symmetrieverhältnissen des Krystalles entsprechenden Weise mit der Richtung variiren lässt.

Die Anwendung dieser erweiterten Vorstellung auf *isotrope* Medien ergibt dagegen kein anderes Resultat als die ältere Theorie, *solange man diese Körper wirklich molecular-isotrop*, d. h. ihre letzten Elementarteilchen in allen möglichen Orientirungen einander angelagert denkt.²⁾ Bei dieser Constitution berechnen sich nämlich die elastischen Druckkräfte ebenso, als wenn die Molecularkräfte nur Functionen der Entfernungen wären, und es resultirt jenes bekannte Formelsystem

$$(1) \quad \begin{cases} -X_x = c x_x + c_1 y_y + c_1 z_z, \dots \\ -Y_z = \frac{1}{2}(c - c_1) y_z, \dots \end{cases}$$

1) W. Voigt, Gött. Abhandl. **34**, p. 1. 1887.

2) W. Voigt, l. c. p. 47; Wied. Ann **38**, p. 573. 1881.

mit dem Verhältniß der beiden Elasticitätsconstanten $c = 3 c_1$, welches durch die Beobachtung nicht bestätigt wird.

Die Schwierigkeit verschwindet, wenn man die betreffenden Körper als *aus Krystallfragmenten von allen möglichen Orientirungen aufgebaut*, sie, wie ich sage, als *quasi-isotrop* ansehen darf. Hier lässt sich im Idealfall völlig dichter Verwachsung der Krystallindividuen jede der beiden Elasticitätsconstanten des Körpers selbst, im gegenteiligen Falle mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wenigstens deren Verhältniß aus den Elasticitätsconstanten des homogenen Krystalles berechnen, und es ergibt sich das letztere von Substanz zu Substanz variirend, wie dies auch die Beobachtung zeigt.

Aber es ist doch unzweifelhaft, dass nicht alle isotropen Körper nur *quasi-isotrop* sind; ist bei *festen* Körpern der Aufbau aus Krystallelementen immerhin stets denkbar, so würde eine solche Auffassung der tropfbaren Flüssigkeiten auf anderen Gebieten, als dem der Elasticität, zu unlösbaren Widersprüchen führen — von den Gasen gar nicht zu reden. *Die Heranziehung der Quasiisotropie, die in äusserst vielen Fällen, insbesondere bei den dichten Gesteinen und den Metallen als gestattet, ja gefordert erscheint, beseitigt die Schwierigkeit der molecularen Elasticitätstheorie hiernach doch nicht allseitig.*

Ich werde im Folgenden zeigen, auf welche Weise der noch übrig gebliebene Rest von Schwierigkeit sich anscheinend erledigen lässt.

2. Wir gehen aus von den bekannten Definitionen der elastischen Druckcomponenten gegen ein Flächenelement ω innerhalb eines elastischen Körpers. Errichtet man über ω einen geraden Cylinder nach der Seite hin, nach welcher man seine Normale n als *positiv* rechnet, bezeichnet man ein im Innern des Cylinders liegendes Molecül mit i , ein jenseits der Ebene von ω liegendes mit a , die Componenten der Elementarwirkung von (a) auf (i) mit X_{ia} , Y_{ia} , Z_{ia} , dann sind die Componenten des Druckes gegen ω bez.

$$(2) \quad X_n = \frac{1}{\omega} \sum_{(i)} \sum_{(a)} X_{ia}, \quad Y_n = \frac{1}{\omega} \sum_{(i)} \sum_{(a)} Y_{ia}, \quad Z_n = \frac{1}{\omega} \sum_{(i)} \sum_{(a)} Z_{ia},$$

die Summen über alle Molecüle der Gattungen (i) und (a) erstreckt. Wegen der verschwindenden Wirkungsweite der

Molecularkräfte geben zu diesen Summen nur die ω unmittelbar anliegenden Molecüle merkliche Beiträge.

Bei Krystallen formt man diese Summen weiter um unter Benutzung der Annahme, dass ein jedes Molecül in *gleicher* Weise von anderen umgeben wäre. Eine solche Annahme ist bei isotropen Medien nicht zulässig; um die für die Isotropie charakteristische *mittlere* Gleichwertigkeit aller von einem Molecül ausgehenden Richtungen zu erhalten, müssen vielmehr die *einzelnen* Molecüle in *verschiedener* Weise umgeben sein; eine Anordnung, welche für *jedes einzelne Molecül* der Anforderung der Isotropie entspräche, existirt nicht.

Wenn nun aber auch im allgemeinen jedes Molecül dem anderen ungleichwertig ist, so fordert die Voraussetzung der Homogenität doch, dass in Bereichen, die erheblich kleiner sind, als die Sphäre merklicher molecularer Wirkung, die mittlere Verteilung der Molecüle die *gleiche* ist. So wollen wir annehmen, dass, wenn man den Raum zu beiden Seiten der Fläche ω in Schichten von einer sehr kleinen Dicke δ zerlegt, jede dieser Schichten über einer Grundfläche ω die gleiche Anzahl von Molecülen enthält.

Auf Grund dieser Festsetzung können wir dann folgendermaassen weitergehen. Die Doppelsummen in (2) lassen sich zusammenfassen zu einfachen Summen aller der Componenten, welche die Schichten innerhalb des Cylinders von den Schichten jenseits ω erfahren; da aber gleichwertige Schichtenpaare mit dem normalen Abstand n in der Zahl n/δ vorhanden sind, so lässt sich auch schreiben:

$$(3) \quad X_n = -\frac{1}{\omega \delta} \sum n \Xi, \quad Y_n = -\frac{1}{\omega \delta} \sum n H, \quad Z_n = -\frac{1}{\omega \delta} \sum n Z,$$

wobei Ξ, H, Z als die Gesamtcomponenten aufgefasst werden können, die eine der Fläche ω unmittelbar anliegende Schicht (J) von der einer negativen Coordinate n entsprechenden Schicht (A) erfährt.

Enthält die Volumeneinheit im Mittel ν Molecüle, so befinden sich deren $\nu' = \nu \omega \delta$ in der betrachteten Schicht (J). Setzen wir also $\Xi = \nu \omega \delta \cdot X, H = \nu \omega \delta \cdot Y, Z = \nu \omega \delta \cdot Z$, so sind X, Y, Z die Anteile, die von der Wirkung der Schicht

bei gleichmässiger Verteilung auf das einzelne Molecül entfallen.

Diese Componenten lassen sich folgendermaassen veranschaulichen. Man denke sich *eines* der Molecüle (i) in (J) mit dem System der Molecüle (a) in (A) in ihrer relativen Lage fest verbunden und verlege das Ganze derartig parallel mit sich, sodass das Molecül (i) in den Schwerpunkt von ω fällt; man erfülle dann die Schicht (A) in gleicher Weise, wie zuvor, mit Molecülen (a), verbinde sie mit einem zweiten Molecül in (J) und transportire das System ebenso wie das erste, und verfähre in derselben Weise mit sämtlichen Molecülen von (J).

So hat man jetzt im Schwerpunkt von ω eine Anzahl von ν' Molecülen und in einer Schicht im Abstand n eine Verteilung (A') von Molecülen in der ν' -fachen Dichte, wie zuvor. Die Componenten, die im Mittel *eines* der Molecüle (i) im Schwerpunkt von ω seitens dieses ganzen Systems (A') erfährt, sind mit Ξ , H , Z identisch; X , Y , Z sind somit die Componenten, die jenes Molecül von der Schicht (A') erfährt, *wenn man jedes dort befindliche Molecül durch seinen ν' ten Teil ersetzt*. Die so erhaltene Verteilung in (A') möge als die *mittlere* (a') bezeichnet werden.

Ersetzt man schliesslich Ξ , H , Z in (3) durch ihre Werte $\nu' X$, $\nu' Y$, $\nu' Z$, so resultirt

$$(4) \quad X_n = -\nu \sum n X, \quad Y_n = -\nu \sum n Y, \quad Z_n = -\nu \sum n Z,$$

und dabei sind die Summen zu nehmen über alle Wirkungen, die das mittlere Molecülsystem (a') auf der negativen Seite von ω ausübt auf das eine Molecül im Schwerpunkt von ω , welches wir weiterhin mit (o) bezeichnen.

Da wegen der Gleichheit von Actio und Reactio

$$X_n = -X_{-n}, \quad Y_n = -Y_{-n}, \quad Z_n = -Z_{-n}$$

ist, so sind die in (4) enthaltenen Summen denen gleich, die sich über den Halbraum auf der *positiven* Seite von ω erstrecken; hieraus folgt, dass man auch schreiben kann

$$(5) \quad X_n = -\frac{1}{2} \nu \mathcal{S} n X, \quad Y_n = -\frac{1}{2} \nu \mathcal{S} n Y, \quad Z_n = -\frac{1}{2} \nu \mathcal{S} n Z,$$

wo sich nun die Summen auf die Wirkung der mittleren Verteilung in der *gesamten* Umgebung des betrachteten Molecüles (o) beziehen.

Da die mittlere Verteilung der Gleichwertigkeit aller Richtungen entsprechen soll, so werden bei ihr die Molecüle voraussichtlich Kugelflächen um das Molecül (o) als Centrum nahezu gleichförmig erfüllen. Dass hierbei eine etwaige Abhängigkeit der Elementarwirkung von der gegenseitigen Orientierung der Molecüle nicht zur Geltung kommen kann, ist schon oben gesagt; wir wollen von dergleichen hier überhaupt absehen.

3. Für das Weitere wollen wir die relativen Coordinaten der (mittleren) Molecüle (α'), über welche die Summe Σ erstreckt ist, gegen das betrachtete Molecül (o) durch x', y', z' , ihre relativen Verschiebungen mit u', v', w' bezeichnen, während x, y, z und u, v, w Coordinaten und Verschiebungen von (o) selbst bezeichnen. Man erhält dann die Druckcomponenten $X_x, \dots Z_z$ gegen die Coordinatenebenen, indem man n successive mit x', y', z' vertauscht.

Die Berechnung dieser Grössen geschieht nun bei der älteren, wie bei der neueren molecularen Theorie auf Grund der Beziehungen für die relativen Verschiebungen

$$(6) \quad \begin{cases} u' = \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial z} z', \\ v' = \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y' + \frac{\partial v}{\partial z} z', \\ w' = \frac{\partial w}{\partial x} x' + \frac{\partial w}{\partial y} y' + \frac{\partial w}{\partial z} z', \end{cases}$$

oder wegen der Wirkungslosigkeit einer reinen Drehung elastisch auch der damit äquivalenten

$$(7) \quad \begin{cases} u' = x_x x' + \frac{1}{2} x_y y' + \frac{1}{2} x_z z', \\ v' = \frac{1}{2} y_x x' + y_y y' + \frac{1}{2} y_z z', \\ w' = \frac{1}{2} z_x x' + \frac{1}{2} z_y y' + z_z z', \end{cases}$$

wobei $x_x, \dots x_y$ die Deformationsgrössen bezeichnen.

Diese Formeln bilden auch die Grundlage der Nahewirkungstheorie der Elasticität. Aber während sie bei dieser

als Ausdruck der Stetigkeit der Verrückungen innerhalb des Körpers der dort benutzten dynamischen Auffassung der Materie durchaus entspricht, enthält sie bei der Moleculartheorie eine ganz wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, nämlich die Annahme, *dass sich innerhalb des Bereiches der molecularen Wirkungssphäre die einzelnen Molecüle bei der Deformation des Körpers ebenso verhalten wie Punkte eines continuirlichen Mediums, das, neben gewissen Translationen und Drehungen als Ganzes, eine gleichförmige Dilatation nach drei zu einander normalen Richtungen erleidet.*

Diese Annahme ist offenbar erfüllt bei einem *Krystall*, der bei der Deformation das Raumgitter seiner Molecüle dem Charakter nach nicht ändert; *sie ist aber jedenfalls nicht selbstverständlich bei isotropen Medien.*

Körper, in Bezug auf welche die Richtigkeit dieser Behauptung sofort einleuchtet, sind ideale *Flüssigkeiten*. Die unendlich leichte Verschiebbarkeit von deren Molecülen bringt nämlich nach jeder Deformation immer wieder eine Anordnung hervor, bei der die verschiedenen Richtungen unterschiedslos sind, wie sie dies ursprünglich waren.

Derartige Umlagerungen fallen aber nicht unter das Schema (7), und wir werden dasselbe demgemäss bei Annahme molecularer Constitution als charakteristisch für (ideale) fest-elastische Körper betrachten, Medien dagegen, deren Molecüle sich ihm nicht fügen, als mit einem gewissen Grad von Fluidität behaftet bezeichnen dürfen.

Für beliebige Körper der letzteren Art tritt an die Stelle von (7) eine allgemeinere Beziehung, die wir schreiben wollen:

$$(8) \quad \begin{cases} u' = x_x \xi_1 + y_y \xi_2 + z_z \xi_3 + y_z \xi_4 + z_x \xi_5 + x_y \xi_6, \\ v' = x_x \eta_1 + y_y \eta_2 + z_z \eta_3 + y_z \eta_4 + z_x \eta_5 + x_y \eta_6, \\ w' = x_x \zeta_1 + y_y \zeta_2 + z_z \zeta_3 + y_z \zeta_4 + z_x \zeta_5 + x_y \zeta_6; \end{cases}$$

hierin bezeichnen die ξ_h, η_h, ζ_h Functionen der Coordinaten x', y', z' , die im allgemeinen nicht angebbar sind.

Im Falle einer Flüssigkeit werden die Verhältnisse sehr einfach. Damit nämlich die Unterschiedslosigkeit aller Richtungen von dem betrachteten Punkt (ρ) aus gewahrt bleibe, müssen sich alle die umgebenden Molecüle (ρ') der mittleren

Anordnung, auf die sich die Summen Σ in (5) beziehen, in der Richtung des Radiusvectors r von (o) aus und zwar um mit r proportionale Strecken bewegen; auf diese Bewegungen haben die Winkeländerungen y_z, z_x, x_y , welche die Dichte ungeändert lassen, *keinen*, die Axendilatationen x_x, y_y, z_z aber *gleichen* Einfluss. Diese Verhältnisse drücken sich aus in dem Ansatz

$$(9) \quad u' = \frac{1}{3} x' \vartheta, \quad v' = \frac{1}{3} y' \vartheta, \quad w' = \frac{1}{3} z' \vartheta,$$

wobei

$$x_x + y_y + z_z = \vartheta$$

die räumliche Dilatation bezeichnet.

Entwickelt man mit diesen Werten die Ausdrücke für X_x, Y_x, Z_x weiter, so gelangt man successive zu folgenden Formeln. Es folgt zunächst unmittelbar aus (5):

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_x = -\frac{1}{2} \nu_0 \Sigma (x_0' + u') \left(X_0 + \left(\frac{\partial X}{\partial x'} \right)_0 u' + \left(\frac{\partial X}{\partial y'} \right)_0 v' \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \left(\frac{\partial X}{\partial z'} \right)_0 w' \right) (1 - \vartheta), \\ Y_x = -\frac{1}{2} \nu_0 \Sigma (x_0' + u') \left(Y_0 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x'} \right)_0 u' + \left(\frac{\partial Y}{\partial y'} \right)_0 v' \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \left(\frac{\partial Y}{\partial z'} \right)_0 w' \right) (1 - \vartheta), \\ Z_x = -\frac{1}{2} \nu_0 \Sigma (x_0' + u') \left(Z_0 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x'} \right)_0 u' + \left(\frac{\partial Z}{\partial y'} \right)_0 v' \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \left(\frac{\partial Z}{\partial z'} \right)_0 w' \right) (1 - \vartheta); \end{array} \right.$$

hierin beziehen sich alle mit dem Index 0 versehenen Größen auf den Zustand *vor* der Deformation; ν ist dabei gleich $\nu_0(1 - \vartheta)$ gesetzt. Soll der ursprüngliche Zustand, wie man das gewöhnlich annimmt, verschwindenden Drucken entsprechen, so sind alle Summen von der Form

$$\Sigma x_0' X_0, \quad \Sigma y_0' X_0, \dots$$

gleich Null und wir haben einfacher, wenn wir uns auf Glieder erster Ordnung bezüglich der Deformationen beschränken und der Bequemlichkeit halber die oberen Indices an x, y, z fortlassen:

$$(11) \quad \begin{cases} X_x = -\frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S} \left[\left(X + x \frac{\partial X}{\partial x} \right)_0 u' + \left(x \frac{\partial X}{\partial y} \right)_0 v' + \left(x \frac{\partial X}{\partial z} \right)_0 w' \right], \\ Y_x = -\frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S} \left[\left(Y + x \frac{\partial Y}{\partial x} \right)_0 u' + \left(x \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_0 v' + \left(x \frac{\partial Y}{\partial z} \right)_0 w' \right], \\ Z_x = -\frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S} \left[\left(Z + x \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_0 u' + \left(x \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_0 v' + \left(x \frac{\partial Z}{\partial z} \right)_0 w' \right], \end{cases}$$

oder unter Benutzung von (9) wegen des Verschwindens von $\mathcal{S} x_0 X_0, \dots$ auch:

$$(12) \quad \begin{cases} X_x = -\frac{1}{6} \nu_0 \mathcal{S} \left[\left(x^2 \frac{\partial X}{\partial x} \right)_0 + \left(xy \frac{\partial X}{\partial y} \right)_0 + \left(xz \frac{\partial X}{\partial z} \right)_0 \right], \\ Y_x = -\frac{1}{6} \nu_0 \mathcal{S} \left[\left(x^2 \frac{\partial Y}{\partial x} \right)_0 + \left(xy \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_0 + \left(xz \frac{\partial Y}{\partial z} \right)_0 \right], \\ Z_x = -\frac{1}{6} \nu_0 \mathcal{S} \left[\left(x^2 \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_0 + \left(xy \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_0 + \left(xz \frac{\partial Z}{\partial z} \right)_0 \right]. \end{cases}$$

Nun sind

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S} \left(x^2 \frac{\partial X}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S} \left(y^2 \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_0 = \dots = \gamma, \\ \frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S} \left(xy \frac{\partial X}{\partial y} \right)_0 = \frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S} \left(xy \frac{\partial Y}{\partial x} \right)_0 = \dots = \gamma_1 \end{cases}$$

jene dem Körper individuellen Parameter, die nach der älteren Theorie dessen Elasticitätsconstanten darstellen und durch die Beziehung

$$\gamma = 3 \gamma_1$$

verbunden sind, während alle Ausdrücke von der Form

$$\frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S} \left(xy \frac{\partial X}{\partial z} \right)_0, \quad \frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S} \left(x^2 \frac{\partial X}{\partial y} \right)_0, \quad \frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S} \left(x^2 \frac{\partial Y}{\partial x} \right)_0, \dots$$

in denen einer der Buchstaben x, y, z nur *einmal* auftritt, nach Symmetrie verschwinden. Somit ergibt sich

$$(14) \quad \begin{cases} X_x = Y_y = Z_z = -\frac{5}{3} \gamma_1 \mathcal{S}, \\ Y_z = Z_y = Z_x = X_z = X_y = Y_x = 0; \end{cases}$$

dies sind aber die bekannten Ausdrücke für die Druckcomponenten innerhalb einer tropfbaren Flüssigkeit, welche die Nahewirkungstheorie aus dem allgemeinen Schema (1) durch die Beziehung $c = c_1 (= \frac{5}{3} \gamma_1)$ gewinnt, und die hier aus der molecularen Vorstellung abgeleitet sind.

Der eingeschlagene Weg ist mit leicht ersichtlichen Abweichungen auch auf Flüssigkeiten anwendbar, bei denen man

nicht von einem Anfangszustand mit verschwindenden inneren Drucken ausgehen kann, also insbesondere auf Gase. Das Eingehen auf sie mag aber unterbleiben.

4. Körper, welche den Formeln (9) entsprechen, wird man als *vollkommen elastisch-flüssig* den durch (7) charakterisirten *vollkommen elastisch-festen* gegenüberstellen. Zwischenstufen zwischen diesen beiden Extremen, also *Körper von unvollkommener Festheit* (welcher Name nicht den Doppelsinn von „Festigkeit“ besitzt), die den wirklichen Körpern wenigstens elastisch äquivalent sind, lassen sich dann jederzeit durch eine Combination der beiden charakteristischen Eigenschaften construiren. So wird man einen Körper, der den Beziehungen

$$(15) \quad \begin{cases} u' = \beta (x_x x' + \frac{1}{2} x_y y' + \frac{1}{2} x_z z') + \frac{1}{3} (1 - \beta) \vartheta x', \\ v' = \beta (\frac{1}{2} y_x x' + y_y y' + \frac{1}{2} y_z z') + \frac{1}{3} (1 - \beta) \vartheta y', \\ w' = \beta (\frac{1}{2} z_x x' + \frac{1}{2} z_y y' + z_z z') + \frac{1}{3} (1 - \beta) \vartheta z', \\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

entspricht, als im Verhältnis β fest-, im Verhältnis $(1 - \beta)$ flüssig-elastisch auffassen können. Der Ansatz entspricht der Bedingung

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = \vartheta,$$

die offenbar auch bei Annahme der molecularen Constitution erfüllt sein muss.

Für einen solchen Körper folgt aus (11):

$$(16) \quad \begin{cases} -X_x = \gamma_1 ((3x_x + y_y + z_z)\beta + \frac{5}{3}\vartheta(1 - \beta)), \dots \\ -Y_z = \gamma_1 \beta y_z, \dots \end{cases}$$

d. h., es ergibt sich das allgemeine Schema (1), in dem speciell

$$(17) \quad \begin{cases} c = \gamma_1 (3\beta + \frac{5}{3}(1 - \beta)) = \frac{1}{3}\gamma_1 (5 + 4\beta), \\ c_1 = \gamma_1 (\beta + \frac{5}{3}(1 - \beta)) = \frac{1}{3}\gamma_1 (5 - 2\beta) \end{cases}$$

ist. Zwischen den Constanten c und c_1 besteht jetzt kein constantes Zahlenverhältnis, sondern je nach dem Grad der Festheit kann c/c_1 alle Werte zwischen 1 und 3 erhalten. Die für die Festheit charakteristische Zahl β findet sich dabei zu

$$\beta = \frac{5(c - c_1)}{2(c + 2c_1)},$$

nahe parallel gehend dem Sir W. Thomson'schen modulus of rigidity

$$\frac{1}{2}(c - c_1) = \gamma_1 \beta.$$

Werte *ausserhalb* des Bereiches $1 < c/c_1 < 3$ sind durch teilweise Flüssigkeit der Substanz nicht erhältlich, was vollkommen einleuchtet. Die durch Wasser aufgeweichten Gelatinen und Leime geben sehr nahezu $c = c_1$, also den Grad der Festheit nahe gleich Null, was gleichfalls durchaus begreiflich ist.

Göttingen, October 1900.

(Eingegangen 13. November 1900.)