

## 5.

## Mathematische Miscellen.

(Von Herrn Schellbach.)

## X.

## Zur Theorie des Additionstheorems der elliptischen Integrale.

## §. 1.

Man muß zu einer symmetrischen Function von  $a, b, c$  gelangen, wenn man aus der Gleichung

$$(1.) \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$$

die Wurzelgrößen fortschafft. Man erhält auf diese Weise

$$(2.) \quad c^2 - 2c(a+b) + (a-b)^2 = 0.$$

Setzt man hier

$$(3.) \quad a - b = x - y$$

$$(4.) \quad a + b = x + y - 2xy$$

so ist auch noch

$$(5.) \quad c^2 - 2c(x+y-2xy) + (x-y)^2 = 0$$

eine symmetrische Function von  $x, y, c$ , denn zu der symmetrischen Function (2.) ist nur noch die symmetrische Function  $2xyc$  hinzugetreten. Vertauscht man nun  $x, y, c$  mit  $x^2, y^2, z^2$  und setzt

$$(6.) \quad x^2 + x'^2 = 1; \quad y^2 + y'^2 = 1; \quad z^2 + z'^2 = 1$$

so ergibt sich aus (3.) und (4.)

$$a = x^2(1 - y^2) = x^2 y'^2 \quad \text{und} \quad b = y^2 x'^2.$$

Setzt man diese Werthe für  $a, b, c$  in (1.) ein, so ist ersichtlich, daß die erste der drei Gleichungen

$$(7.) \quad xy' + yx' = z; \quad xz' + zx' = y; \quad yz' + zy' = x$$

die beiden andern nach sich zieht, da alle drei auf dieselbe symmetrische Function führen. Da die Zeichen von  $x, y, x', y'$  willkürlich sind, und das Zeichen von  $z$  durch die erste Gleichung bestimmt wird, so kann nur noch über das Zeichen von  $z'$  eine Ungewißheit bleiben. Setzt man aber den Werth von  $z$  aus der ersten dieser Gleichungen in die zweite oder dritte

ein, so erhält man für  $z'$  ganz denselben Ausdruck, daher wird das Zeichen von  $z'$  vollständig durch die Größen  $x, y, x', y'$  bestimmt. Vertauscht man noch in der erhaltenen Gleichung  $z$  mit  $y$  und mit  $x$ , so gelangt man zu den drei Gleichungen

$$(8.) \quad xy - x'y' = z'; \quad zx - z'x' = y'; \quad yz - y'z' = x'.$$

Solcher Gleichungen lassen sich nun noch mehrere entwickeln. Addirt man z. B. die beiden letzten der Gleichungen (7.) und dividirt die Summe durch  $x + y$ , so erhält man

$$(9.) \quad \frac{x' + y'}{x + y} = \frac{1 - z'}{z}; \quad \frac{x' + z'}{x + z} = \frac{1 - y'}{y}; \quad \frac{y' + z'}{y + z} = \frac{1 - x'}{x},$$

wo die zwei letzten Gleichungen wieder durch Vertauschung aus der ersten entsprungen sind.

Es ist

$$x'^2 - y'^2 = y^2 - x^2$$

oder

$$\frac{x' + y'}{x + y} \cdot \frac{x' - y'}{y - x} = 1 = \frac{z^2}{z^2} = \frac{1 - z'^2}{z^2} = \frac{1 - z'}{z} \cdot \frac{1 + z'}{z}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die erste (9.) und wechselt dann die Buchstaben gehörig, so entstehen die Gleichungen

$$(10.) \quad \frac{x' - y'}{y - x} = \frac{1 + z'}{z}; \quad \frac{x' - z'}{z - x} = \frac{1 + y'}{y}; \quad \frac{y' - z'}{z - y} = \frac{1 + x'}{x}.$$

Eliminirt man aus den beiden letzten der Gleichungen (7.) die Größe  $z'$  so erhält man

$$(11.) \quad \frac{xy' - yx'}{x^2 - y^2} = \frac{1}{z}; \quad \frac{xz' - zx'}{x^2 - z^2} = \frac{1}{y}; \quad \frac{yz' - zy'}{y^2 - z^2} = \frac{1}{x}.$$

Multiplicirt man aber die zweite der Gleichungen (7.) mit  $x$  und die dritte mit  $y$  und subtrahirt die Producte, so ergibt sich auch durch gehörige Vertauschung

$$(12.) \quad \frac{xx' - yy'}{y^2 - x^2} = \frac{z'}{z}; \quad \frac{xx' - zz'}{z^2 - x^2} = \frac{y'}{y}; \quad \frac{yy' - zz'}{z^2 - y^2} = \frac{x'}{x}.$$

Diese Formeln lassen sich leicht noch weiter vermehren.

## §. 2.

Aus der ersten der Gleichungen (8.) ist

$$x'y' = xy - z'$$

und wenn man beide Seiten dieser Gleichung quadriert, so erhält man

$$(1.) \quad z^2 = x^2 + y^2 - 2xyz'.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man zu Formeln von weit größerer Allgemeinheit gelangen. Schreibt man nämlich  $\frac{\xi'}{n}$  statt  $x$  und  $\frac{\eta'}{n}$  statt  $y$ , wo unter  $\xi'$  und  $\eta'$  verstanden werden soll  $\sqrt{1-\xi^2}$  und  $\sqrt{1-\eta^2}$ , so erhält man  $n^2 z^2 = \xi'^2 + \eta'^2 - 2\xi'\eta'z'$ , oder wenn man für  $\xi'$  und  $\eta'$  wieder die alten Buchstaben  $x'$  und  $y'$  einführt, welche aber jetzt eine andere Bedeutung haben als in §. 1

$$(2.) \quad n^2 z^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y'z'.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich leicht eine symmetrische Function von  $x, y, z$  bilden, denn da  $x' y' z'$  schon eine solche ist, so braucht nur  $n^2$  so gewählt zu werden, daß  $n^2 z^2 - x'^2 - y'^2$  eine symmetrische Function wird; dazu ist aber offenbar nur erforderlich, daß man

$$n^2 = 1 - k^2 x^2 y^2$$

annimmt, wodurch sich aus (2.) die symmetrische Function

$$(3.) \quad 1 - x'^2 - y'^2 - z'^2 + 2x'y'z' - k^2 x^2 y^2 z^2 = 0$$

ergiebt. Hier soll  $k^2$  eine Constante bedeuten. Dem Ausdrucke für  $n^2$  könnte auch eine andere Gestalt gegeben werden, aber die gewählte ist die einfachste. Ganz ähnlich ist auch in §. 1 Gleichung (4.) für  $a+b$  die einfachste Form gewählt worden. Da nun in (3.) eine symmetrische Function von  $x, y, z$  erhalten worden ist, so führt also die Substitution von

$$\frac{x'}{n} \text{ statt } x \text{ also } 1 - \frac{x'^2}{n^2} = \frac{n^2 - x'^2}{n^2} = \frac{x^2(1 - k^2 y^2)}{1 - k^2 x^2 y^2} \text{ statt } x'^2$$

und die ähnlichen Einführungen für  $y$  und  $y'$  in die Gleichungen des §. 1 zu neuen Gleichungen, in denen die Buchstaben  $x, y, z$  untereinander vertauscht werden können. Bezeichnet man also

$$\sqrt{1 - k^2 x^2}, \quad \sqrt{1 - k^2 y^2}, \quad \sqrt{1 - k^2 z^2}, \quad \sqrt{1 - k^2 x^2 y^2}$$

durch

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1, \quad n$$

so hat man nur in den erwähnten Gleichungen

$$x, x', y, y'$$

mit

$$\frac{x'}{n}, \quad \frac{xy_1}{n}, \quad \frac{y'}{n}, \quad \frac{yx_1}{n}$$

zu vertauschen, um neue Gleichungen zu erhalten.

Aus den ersten der Gleichungen (7.) in §. 1 und durch Buchstabenvertauschung erhält man so die drei Gleichungen

$$(4.) \quad \frac{yx'x_1 + xy'y_1}{1 - k^2 x^2 y^2} = z; \quad \frac{zx'x_1 + xz'z_1}{1 - k^2 x^2 z^2} = y; \quad \frac{zy'y_1 + yz'z_1}{1 - k^2 y^2 z^2} = x.$$

Aus der letzten der Gleichungen (7.) entstehen ebenso die Gleichungen

$$(5.) \quad y'z' + zy x_1 = x'; \quad x'z' + zx y_1 = y'; \quad x'y' + xy z_1 = z'.$$

Aus der ersten der Gleichungen (8.) §. 1 kommt auf gleiche Weise

$$(6.) \quad \frac{x'y' - xy x_1 y_1}{1 - k^2 x^2 y^2} = z'; \quad \frac{x'z' - xz x_1 z_1}{1 - k^2 x^2 z^2} = y'; \quad \frac{y'z' - yz y_1 z_1}{1 - k^2 y^2 z^2} = x'.$$

Aus der letzten der erwähnten Gleichungen folgen noch die 6 Gleichungen

$$(7.) \quad \begin{cases} x'z - xy_1 z' = yx_1; & x'y - xz_1 y' = zx_1; & y'x - yz_1 x' = zy_1; \\ y'z - yx_1 z' = xy_1; & z'y - zx_1 y' = xz_1; & z'x - zy_1 x' = yz_1. \end{cases}$$

Setzt man aus der ersten der Gleichungen (6.) in §. 2 den Werth von  $z'$  in die letzte der Gleichungen (5.), so erhält man

$$xy z_1 = \frac{x'y' - xy x_1 y_1}{1 - k^2 x^2 y^2} - x'y' = \frac{xy(k^2 xy x' y' - x_1 y_1)}{1 - k^2 x^2 y^2} \text{ oder } z_1 = \frac{k^2 x x' y y' - x_1 y_1}{1 - k^2 x^2 y^2},$$

also durch Vertauschung

$$(8.) \quad \frac{k^2 x x' y y' - x_1 y_1}{1 - k^2 x^2 y^2} = z_1; \quad \frac{k^2 x x' z z' - x_1 z_1}{1 - k^2 x^2 z^2} = y_1; \quad \frac{k^2 y y' z z' - y_1 z_1}{1 - k^2 y^2 z^2} = x_1.$$

Dividirt man die Gleichungen (4.) durch die (6.), so ergeben sich die Gleichungen

$$(9.) \quad \frac{yx'x_1 + xy'y_1}{x'y' - xy x_1 y_1} = \frac{z}{z'}; \quad \frac{zx'x_1 + xz'z_1}{x'z' - xz x_1 z_1} = \frac{y}{y'}; \quad \frac{zy'y_1 + yz'z_1}{y'z' - yz y_1 z_1} = \frac{x}{x'}.$$

Aus der ersten der Gleichungen (9.) in §. 1 und durch Tausch und dann aus Nr. 1 in (10.) erhält man folgende 6 Gleichungen

$$(10.) \quad \frac{xy_1 + yx_1}{x' + y'} = \frac{1 - z'}{z}; \quad \frac{xz_1 + zx_1}{x' + z'} = \frac{1 - y'}{y}; \quad \frac{yz_1 + zy_1}{y' + z'} = \frac{1 - x'}{x};$$

$$(11.) \quad \frac{xy_1 - yx_1}{y' - x'} = \frac{1 + z'}{z}; \quad \frac{xz_1 - zx_1}{z' - x'} = \frac{1 + y'}{y}; \quad \frac{yz_1 - zy_1}{z' - y'} = \frac{1 + x'}{x}.$$

Addirt man die zweite und dritte der Gleichungen (7.) in §. 2, so erhält man sogleich auf die bekannte Weise

$$(12.) \quad \frac{x_1 + y_1}{xy' + yx'} = \frac{1 - z_1}{z}; \quad \frac{x_1 + z_1}{xz' + zx'} = \frac{1 - y_1}{y}; \quad \frac{y_1 + z_1}{y'z' + zy'} = \frac{1 - x_1}{x}.$$

Zieht man aber dieselben Gleichungen von einander ab, so gelangt man zu

$$(13.) \quad \frac{x_1 - y_1}{yx' - xy'} = \frac{1 + z_1}{z}; \quad \frac{x_1 - z_1}{zx' - xz'} = \frac{1 + y_1}{y}; \quad \frac{y_1 - z_1}{zy' - yz'} = \frac{1 + x_1}{x}.$$

Setzt man den Werth von  $x'z$  aus der ersten der Gleichungen (7.) in die letzte, so erhält man die Gleichungen

$$(14.) \quad k^2 xy z' - x_1 y_1 = z_1, \quad k^2 xz y' - x_1 z_1 = y_1; \quad k^2 yz x' - y_1 z_1 = x_1.$$

Multiplicirt man die letzte dieser Gleichungen mit der ersten (5.), deren Seiten man vorher umkehrt, so erhält man

$$k^2 y z x'^2 - x' y_1 z_1 = x_1 y' z' + z y x_1^2 = x_1 y' z' + z y - k^2 z y x^2$$

oder

$$x' y_1 z_1 + x_1 y' z' + z y - k^2 z y = 0.$$

Setzt man nun

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

so erhält man folgende drei Gleichungen

$$(15.) \quad x' y_1 z_1 + x_1 y' z' + y z k'^2 = 0; \quad y' x_1 z_1 + y_1 x' z' + x z k'^2 = 0; \\ z' x_1 y_1 + z_1 x' y' + y z k'^2 = 0.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (14.) mit  $z_1$ , so erhält man

$$k^2 x y z' z_1 - x_1 y_1 z_1 = 1 - k^2 z^2 \quad \text{oder} \quad k^2 (z^2 + x y z' z_1) = 1 + x_1 y_1 z_1.$$

Multiplicirt man aber die letzte der Gleichungen (5.) mit  $z'$ , so ergibt sich

$$x' y' z' + x y z' z_1 = z'^2 = 1 - z^2 \quad \text{oder} \quad z^2 + x y z' z_1 = 1 - x' y' z',$$

also wird

$$(16.) \quad k^2 (1 - x' y' z') = 1 + x_1 y_1 z_1$$

oder auch

$$(17.) \quad k'^2 + k^2 x' y' z' + x_1 y_1 z_1 = 0.$$

Aus der ersten der Gleichungen (11.) und der ersten der Gleichungen (12.) in §. 1 erhält man auch noch

$$(18.) \quad \frac{x y' y_1 - y x' x_1}{x^2 - y^2} = \frac{1}{z}; \quad \frac{x z' z_1 - z x' x_1}{x^2 - z^2} = \frac{1}{y}; \quad \frac{y z' z_1 - z y' y_1}{y^2 - z^2} = \frac{1}{x};$$

$$(19.) \quad \frac{x x' y_1 - y y' x_1}{x^2 - y^2} = \frac{z'}{z}; \quad \frac{x x' z_1 - z z' x_1}{x^2 - z^2} = \frac{y'}{y}; \quad \frac{y y' z_1 - z z' y_1}{y^2 - z^2} = \frac{x'}{x};$$

und aus diesen Gleichungen

$$(20.) \quad \frac{x x' y_1 - y y' x_1}{x y' y_1 - y x' x_1} = z'; \quad \frac{x x' z_1 - z z' x_1}{x z' z_1 - z x' x_1} = y'; \quad \frac{y y' z_1 - z z' y_1}{y z' z_1 - z y' y_1} = x'.$$

Eliminirt man aus der zweiten und dritten der Gleichungen (7.) die Gröfse  $z$ , so erhält man

$$(21.) \quad \frac{x' y y_1 - y' x x_1}{x y' y_1 - y x' x_1} = z_1; \quad \frac{x' z z_1 - z' x x_1}{x z' z_1 - z x' x_1} = y_1; \quad \frac{y' z z_1 - z' y y_1}{y z' z_1 - z y' y_1} = x_1.$$

Durch die angewandte Substitution läfst sich also aus jeder Formel für die Kreisfunctionen, denn das sind die Formeln des §. 1, eine entsprechende für die elliptischen Functionen ableiten.

## §. 3.

Die Gleichungen des vorigen Paragraphen, die sich leicht noch vermehren ließen, können auch auf andere Weise entwickelt werden.

Setzt man in der Gleichung (1.) des §. 2  $kz$  statt  $z$ , so erhält man

$$k^2 z^2 = x^2 + y^2 - 2xyx_1$$

und wenn man hier  $x$  und  $y$  mit  $\frac{x_1}{n}$  und  $\frac{y_1}{n}$  vertauscht, so gelangt man zu

$$k^2 z^2 n^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 y_1 z_1.$$

Nimmt man nun wieder

$$n^2 = 1 - k^2 x^2 y^2,$$

so erhält man die Gleichung

$$1 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 + 2x_1 y_1 z_1 - k^4 x^2 y^2 z^2 = 0.$$

Es werden also die Gleichungen des §. 1 ebenfalls neue Gleichungen liefern, wenn man in ihnen  $kz$  statt  $z$  setzt, also  $z'$  mit  $z_1$  vertauscht und auch statt

$$x; \quad x'; \quad y; \quad y'$$

die Größen

$$\frac{x_1}{n}; \quad \frac{kxy'}{n}; \quad \frac{y_1}{n}; \quad \frac{kyy'}{n}$$

einführt.

Man erhält auf diese Weise neue Gleichungen, aber nicht die Gleichungen des §. 2. Um diese zu erhalten muß man noch die Zeichen der mit Accenten und Zeigern versehenen Buchstaben in die entgegengesetzten verwandeln, wie ein einfacher Versuch sogleich lehren wird. Die letzte Gleichung gehört also auch in die Reihe der Gleichungen des §. 2, wenn man das Zeichen von  $x_1 y_1 z_1$  in das entgegengesetzte verwandelt. Diese Gleichung wird dann

$$(1.) \quad 1 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - 2x_1 y_1 z_1 - k^4 x^2 y^2 z^2 = 0.$$

Durch diese Beobachtungen wird man darauf aufmerksam gemacht, daß sich die meisten der Gleichungen des §. 2 durch schickliche Substitutionen in einander überführen lassen. Man findet so leicht, daß wenn man in den Formeln des §. 2 erst die Zeichen der mit Accenten und Zeigern versehenen Buchstaben in die entgegengesetzten verwandelt, dann  $\frac{1}{k}$  statt  $k$  setzt und zuletzt  $x, y, z$  mit  $kx, ky, kz$  vertauscht, mehrere dieser Gleichungen in einander übergehen. Diese erste Substitution fordert also, daß man

$$\left. \begin{array}{l} x, \quad y, \quad z; \quad x', \quad y', \quad z'; \quad x_1, \quad y_1, \quad z_1 \\ kx, \quad ky, \quad kz; \quad x_1, \quad y_1, \quad z_1; \quad x', \quad y', \quad z' \end{array} \right\} A$$

vertauscht mit

Es giebt noch zwei andere Substitutionen, welche dieselben Dienste leisten. Man braucht nämlich nur

$$\left. \begin{array}{l} k; \quad x, \quad y, \quad z; \quad x', \quad y', \quad z'; \quad x_1, \quad y_1, \quad z_1 \\ k'; \quad \frac{ix}{x'}, \quad \frac{iy}{y'}, \quad \frac{iz}{z'}; \quad \frac{1}{x'}, \quad \frac{1}{y'}, \quad \frac{1}{z'}; \quad \frac{x_1}{x'}, \quad \frac{y_1}{y'}, \quad \frac{z_1}{z'} \end{array} \right\} B$$

und ferner

$$\left. \begin{array}{l} k; \quad x, \quad y, \quad z; \quad x', \quad y', \quad z'; \quad x_1, \quad y_1, \quad z_1 \\ \frac{ik}{k'}; \quad -\frac{kx}{x'}, \quad y', \quad z'; \quad \frac{x'}{x_1}, \quad y, \quad z; \quad \frac{1}{x_1}, \quad \frac{y_1}{k'}, \quad \frac{z_1}{k'} \end{array} \right\} C.$$

Auf diese Weise lassen sich aus der einzigen Formel (16.) in §. 2 funfzehn andere Formeln ableiten. Durch die Substitution *C* liefert diese Formel zunächst die drei Formeln (14.). Durch die Substitution *B* entspringen aus der letzten der Gleichungen (14.) die drei Gleichungen (15.), und durch die Substitution *A* erhält man aus derselben Gleichung die drei Gleichungen (5.). Wendet man dann noch auf die zweite der Gleichungen (5.) die Substitution *C* an, so gelangt man zu den Gleichungen (7.).

Auf diese Substitutionen hat zuerst *Jacobi* im 39. Bande d. J. aufmerksam gemacht.

#### §. 4.

Multiplicirt man die Gleichungen (5.) in §. 2 mit den Differenzialen  $\partial x'$ ,  $\partial y'$ ,  $\partial z'$  und addirt alle drei Gleichungen, so erhält man sogleich

$$\partial \cdot x'y'z' + zyx_1 \partial x' + zx y_1 \partial y' + xy z_1 \partial z' = \frac{1}{2} \partial (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Es ist aber  $\partial x' = -\frac{x \partial x}{x'}$  etc., daher ist diese Gleichung

$$xyz \left( \frac{x_1 \partial x}{x'} + \frac{y_1 \partial y}{y'} + \frac{z_1 \partial z}{z'} \right) = \frac{1}{2} \partial (2x'y'z' - x'^2 - y'^2 - z'^2).$$

Nach (3.) in §. 2 ist aber die rechte Seite dieser Gleichung

$$\frac{1}{2} \partial \cdot k^2 x^2 y^2 z^2 = k^2 xyz \partial xyz,$$

daher erhält man

$$(1.) \quad \frac{x_1 \partial x}{x'} + \frac{y_1 \partial y}{y'} + \frac{z_1 \partial z}{z'} = k^2 \partial xyz.$$

#### §. 5.

Durch die Substitution *A* erhält man aus dieser Gleichung auf der Stelle

$$(1.) \quad \frac{x' \partial x}{x_1} + \frac{y' \partial y}{y_1} + \frac{z' \partial z}{z_1} = \partial xyz.$$

Multiplicirt man nun diese Gleichung mit  $k^2$  und zieht sie von der (1.) in §. 4 ab, so bleibt, wenn man mit  $1-k^2$  dividirt

$$(2.) \quad \frac{\partial x}{x'x_1} + \frac{\partial y}{y'y_1} + \frac{\partial z}{z'z_1} = 0.$$

§. 6.

Bezeichnet man  $\frac{\partial x}{x'x_1}, \frac{\partial y}{y'y_1}, \frac{\partial z}{z'z_1}$  entsprechend mit  $X, Y, Z$ , so ist also

$$(1.) \quad X + Y + Z = 0.$$

Setzt man noch  $xyz = u$  und  $x'y'z' = u'$ , so erhält man aus (1.) in §. 5

$$(2.) \quad x'^2 X + y'^2 Y + z'^2 Z = \partial u$$

oder wenn man (1.) — (2.) bildet

$$(3.) \quad x^2 X + y^2 Y + z^2 Z = -\partial u.$$

Multiplicirt man (1.) mit  $x^2 + y^2 + z^2$  und zieht (3.) vom Producte ab, so bleibt

$$(4.) \quad (y^2 + z^2)X + (z^2 + x^2)Y + (x^2 + y^2)Z = \partial u.$$

Wendet man nun die Substitution  $B$  an, so verwandelt sich  $\partial x$  in  $\frac{i \partial x}{x'^3}$  u. s. w. und  $X$  geht in  $iX$  über u. s. w. Daher erhält man aus (2.) sogleich

$$(5.) \quad \frac{X}{x'^2} + \frac{Y}{y'^2} + \frac{Z}{z'^2} = -\partial \cdot \frac{u}{u'} = \frac{u \partial u' - u' \partial u}{u'^2}$$

oder

$$(6.) \quad y'^2 z'^2 X + z'^2 x'^2 Y + x'^2 y'^2 Z = u \partial u' - u' \partial u.$$

Addirt man zu dieser Gleichung (4.) — (1.), so bleibt

$$(7.) \quad y^2 z^2 X + z^2 x^2 Y + x^2 y^2 Z = (1 - u') \partial u + u \partial u'.$$

Dividirt man diese Gleichung mit  $u^2$ , so erhält man eine der (5.) entsprechende

$$(5'.) \quad \frac{X}{x^2} + \frac{Y}{y^2} + \frac{Z}{z^2} = \partial \cdot \frac{1 - u'}{u}.$$

Aus (1.) —  $k^2 a^2$  (4.) +  $k^4 a^4$  (7.) ergibt sich

$$\begin{aligned} (1 - k^2 a^2 y^2)(1 - k^2 a^2 z^2)X + (1 - k^2 a^2 z^2)(1 - k^2 a^2 x^2)Y + (1 - k^2 a^2 x^2)(1 - k^2 a^2 y^2)Z \\ = k^4 a^4 u \partial u' - k^2 a^2 (1 - k^2 a^2 + k^2 a^2 u') \partial u. \end{aligned}$$

Setzt man

$$1 - k^2 a^2 + k^2 a^2 u' = v,$$

so erhält man aus der letzten Gleichung

$$(8.) \quad \frac{X}{1 - k^2 a^2 x^2} + \frac{Y}{1 - k^2 a^2 y^2} + \frac{Z}{1 - k^2 a^2 z^2} = \frac{k^2 a^2 (u \partial v - v \partial u)}{(1 - k^2 a^2 x^2)(1 - k^2 a^2 y^2)(1 - k^2 a^2 z^2)}.$$



Der Nenner des Bruches auf der rechten Seite läßt sich durch die Größen  $u$  und  $u'$  ausdrücken, denn es ist

$$u'^2 = (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) = 1-x^2-y^2-z^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2-x^2y^2z^2.$$

Nach Nr. 3 in §. 2 ist aber

$$(9.) \quad 2-2u'+k^2u^2 = x^2+y^2+z^2,$$

daher wird, wenn man diese Gleichung zu der vorigen addirt,

$$(10.) \quad (1-u')^2 + (1+k^2)u^2 = y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2.$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen erhält man, wenn noch  $\sqrt{1-a'^2}$  mit  $a'$  und  $\sqrt{1-k^2a'^2}$  mit  $a_1$  bezeichnet werden,

$$(11.) \quad (1-k^2a'^2x^2)(1-k^2a'^2y^2)(1-k^2a'^2z^2) = v^2 - k^4a'^2a_1^2u^2 \\ = (v+k^2aa'a_1u)(v-k^2aa'a_1u).$$

Die rechte Seite von (8.) geht jetzt in

$$\frac{a}{2a'a_1} \partial \log \frac{v-k^2aa'a_1u}{v+k^2aa'a_1u}$$

über. Setzt man nun für  $X, Y, Z, u$  und  $v$  wieder ihre Werthe ein, so erhält man aus (8.) endlich

$$(12.) \quad \frac{\partial x}{(1-k^2a'^2x^2)x'x_1} + \frac{\partial y}{(1-k^2a'^2y^2)y'y_1} + \frac{\partial z}{(1-k^2a'^2z^2)z'z_1} \\ = \frac{a}{2a'a_1} \partial \log \frac{a_1^2+k^2a'^2x'y'z'-k^2aa'a_1xyz}{a_1^2+k^2a'^2x'y'z'+k^2aa'a_1xyz}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung läßt sich auch in anderer Form darstellen. Multiplicirt man nämlich die letzte der Gleichungen (5.) mit  $z'$ , so erhält man

$$x'y'z' = 1-z^2-xyx'z_1,$$

führt man diesen Werth von  $x'y'z'$  in (12.) ein und setzt

$$\frac{za'a_1+az'z_1}{1-k^2a'^2z^2} = \sigma,$$

$$\frac{za'a_1-az'z_1}{1-k^2a'^2z^2} = \delta,$$

so erhält man

$$(13.) \quad \frac{\partial x}{(1-k^2a'^2x^2)x'x_1} + \frac{\partial y}{(1-k^2a'^2y^2)y'y_1} + \frac{\partial z}{(1-k^2a'^2z^2)z'z_1} = \frac{a}{2a'a_1} \partial \log \frac{1-k^2axy\sigma}{1+k^2axy\delta}.$$

Wer mit der Theorie der elliptischen Integrale vertraut ist, wird diese Mittheilungen zu benutzen verstehen.