LE FORMULE DEL SAINT-VENANT PER LE DEFORMAZIONI FINITE.

Nota di **R. Marcolongo**, in Messina.

Adunanza dell'11 dicembre 1904.

1. La deformazione finita d'un mezzo continuo è pienamente individuata dalle sei componenti di deformazione, considerate da CAUCHY *).

Se u, v, w rappresentano le componenti ortogonali dello spostamento di un punto x, y, z e si pone

$$(1) \quad a_{11} = 1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a_{12} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad a_{13} = \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ ecc.}$$

le componenti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ di deformazione sono espresse dalle:

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 + 2\varepsilon_1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 + 2\varepsilon_2 \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 + 2\varepsilon_3 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} = \gamma_1 \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = \gamma_2 \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} = \gamma_3. \end{cases}$$

Nello studio della deformazione ha una speciale importanza la cosiddetta *funzione caratteristica* φ , definita dalla

$$(4) \quad \begin{cases} 2\varphi(x, y, z) = (1 + 2\varepsilon_1)x^2 + (1 + 2\varepsilon_2)y^2 + (1 + 2\varepsilon_3)z^2 \\ \quad + 2\gamma_1yz + 2\gamma_2zx + 2\gamma_3xy. \end{cases}$$

Infatti, mediante φ si può agevolmente esprimere il coefficiente di dilatazione lineare di una retta, in una deformazione omogenea; e me-

*) Vedi la mia: *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*. Milano, 1904; pag. 101.

dianete la forma polare di φ si può esprimere lo scorrimento mutuo di due rette; infine la $\varphi = \text{cost.}$ rappresenta un ellissoide che si trasforma in una sfera *).

Per ciò che dovremo dire in seguito giova considerare la forma reciproca di φ ; però se Δ è il discriminante di φ , cioè

$$(5) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix},$$

e accenniamo con Δ_{rr} il rapporto tra gli elementi aggiunti di Δ e lo stesso Δ , la forma reciproca Φ di φ resta definita da

$$(6) \quad \begin{cases} 2\Phi(x, y, z) = \Delta_{11}x^2 + \Delta_{22}y^2 + \Delta_{33}z^2 + 2\Delta_{23}yz \\ \quad \quad \quad + 2\Delta_{31}zx + 2\Delta_{12}xy. \end{cases}$$

2. Vogliasi ora vedere se date le sei componenti di deformazione resta determinata la corrispondente deformazione. Un tal problema è identico con quello della integrabilità dei sistemi (2) e (3) di sei equazioni differenziali di primo ordine cui soddisfano le tre funzioni incognite u, v, w , supponendo date le ε_i e γ_i .

Supponiamo che questi sistemi definiscano effettivamente u, v, w . Posto per compendio

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}, \text{ ecc.},$$

direttamente, o partendo da una relazione generale facile a stabilirsi **), si ottengono i seguenti sistemi:

$$(7) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \gamma_{31} - \varepsilon_{12} = a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \gamma_{21} - \varepsilon_{13} = a_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \end{cases}$$

ed altri due, che accenneremo rispettivamente con (8) e (9), e che si deducono da questo con permutazioni circolari delle lettere e degli indici. Inoltre

*) Vedi la mia Nota: *Les composantes de déformation d'un milieu continu* [J. de Sciencias math. e astron., XIII, 1899].

**) Vedi la Nota citata.

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}(-\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}) &= a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \chi} + a_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial \chi} + a_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \chi} \\ \varepsilon_{23} &= a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \chi} + a_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial \chi} + a_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \chi} \\ \varepsilon_{32} &= a_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \chi} + a_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial \chi} + a_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \chi}, \end{aligned} \right.$$

ed altri due che, come al solito, si deducono da questo e che accenneremo con (11) e (12).

Derivando il sistema (9) rispetto ad y , otterremo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial y \partial \chi} - \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} - \sum_{u,v,w} \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= a_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial \chi^2} + a_{12} \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial \chi^2} + a_{13} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial \chi^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial y \partial \chi} - \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y^2} - \sum \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= a_{12} \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial \chi^2} + \dots \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y \partial \chi} - \sum \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \chi} &= a_{13} \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial \chi^2} + \dots \end{aligned}$$

Derivando invece il sistema (10) rispetto χ , ed ammettendo la invertibilità dell'ordine delle derivazioni, otterremo un altro sistema che ha i secondi membri eguali a quelli del sistema precedente; onde deve essere

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial y \partial \chi} &= \sum \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \chi} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial \chi} \right) &= \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \chi} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \chi} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Operando in modo analogo per le $\frac{\partial^3(u, v, w)}{\partial \chi \partial x^2}$, $\frac{\partial^3(u, v, w)}{\partial x \partial y^2}$, otterremo altre quattro relazioni che si deducono dalle precedenti con permutazioni circolari. E così ancora si vedrebbe agevolmente che la stessa operazione eseguita per le altre derivate

$$\frac{\partial^3(u, v, w)}{\partial y^2 \partial \chi}, \quad \frac{\partial^3(u, v, w)}{\partial \chi^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3(u, v, w)}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3(u, v, w)}{\partial x \partial y \partial \chi},$$

non conduce a relazioni diverse dalle sei già determinate.

D'altra parte, come ora vedremo subito, i secondi membri delle (13) si esprimono agevolmente mediante le ε , γ , e le loro derivate. Abbiamo dunque ottenute sei relazioni necessarie per la esistenza delle u , v , w e che chiamansi appunto del Saint-Venant.

Se infatti indichiamo con A il determinante delle a_{rs} ; e con A_{rs} l'elemento aggiunto di a_{rs} ; la risoluzione dei sistemi (7), ... (12) rispetto

alle derivate seconde delle u, v, w , conduce ad equazioni della forma:

$$(14) \quad \begin{cases} A\alpha_i = A_{11}\alpha + A_{12}\beta + A_{13}\gamma, \\ A\beta_i = A_{21}\alpha + A_{22}\beta + A_{23}\gamma, \\ A\gamma_i = A_{31}\alpha + A_{32}\beta + A_{33}\gamma; \end{cases}$$

così, p. es., se $\alpha_i = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\beta_i = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\gamma_i = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, è pure

$$\alpha = \varepsilon_{11}, \quad \beta = \gamma_{31} - \varepsilon_{12}, \quad \gamma = \gamma_{21} - \varepsilon_{13}; \text{ ecc.};$$

e se

$$\alpha_i = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad \beta_i = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}, \quad \gamma_i = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z},$$

sarà

$$\alpha = \frac{1}{2}(-\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}), \quad \beta = \varepsilon_{23}, \quad \gamma = \varepsilon_{32}; \text{ ecc.}$$

Se ora diciamo α', β', γ' ed $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$ altre due terne di valori soddisfacenti alle (14), si ottiene agevolmente

$$\begin{aligned} & \alpha_i \alpha'_i + \beta_i \beta'_i + \gamma_i \gamma'_i \\ &= \alpha \alpha' \Delta_{11} + \beta \beta' \Delta_{22} + \gamma \gamma' \Delta_{33} + (\beta \gamma' + \beta' \gamma) \Delta_{23} + \dots \end{aligned}$$

cioè, per la (6),

$$\sum \alpha_i \alpha'_i = \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha'} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta'} + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma'} = \sum \alpha' \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha},$$

oppure

$$\sum \alpha_i \alpha'_i = \Phi \left(\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{matrix} \right),$$

dove con la notazione del secondo membro si accenna, in modo breve, la forma polare di Φ . Basta, a verificar tutto ciò, ricordare le note relazioni

$$A^2 = \Delta,$$

$$A_{11}^2 + A_{21}^2 + A_{31}^2 = \Delta \cdot \Delta_{11}, \text{ ecc.};$$

$$A_{12} A_{13} + A_{22} A_{23} + A_{32} A_{33} = \Delta \cdot \Delta_{23}, \text{ ecc.};$$

relative al prodotto di due matrici.

Questa semplice osservazione permette di effettuare agevolmente il calcolo dei secondi membri delle (13). Otteniamo quindi le relazioni accennate nella forma semplice seguente

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial y \partial z} &= 2\Phi \left[\frac{1}{2}(-\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}), \varepsilon_{23}, \varepsilon_{32} \right] \\ &- \Phi \left[\begin{matrix} \gamma_{32} - \varepsilon_{21}, & \varepsilon_{22}, & \gamma_{12} - \varepsilon_{23} \\ \gamma_{23} - \varepsilon_{31}, & \gamma_{13} - \gamma_{32}, & \varepsilon_{33} \end{matrix} \right] \end{aligned} \right.$$

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} \right) \\ = \Phi \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon_{13}, & \frac{1}{2}(\gamma_{11} - \gamma_{22} + \gamma_{33}), & \varepsilon_{31}, \\ \varepsilon_{12}, & \varepsilon_{21}, & \frac{1}{2}(\gamma_{11} + \gamma_{22} - \gamma_{33}) \end{array} \right] \\ - \Phi \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(-\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}), & \varepsilon_{23}, & \varepsilon_{32}, \\ \varepsilon_{11}, & \gamma_{31} - \varepsilon_{12}, & \gamma_{21} - \varepsilon_{13} \end{array} \right] \end{array} \right.$$

ed altre quattro che si deducono con permutazioni circolari.

3. Si deducono di qui le notissime formule, stabilite la prima volta dal SAINT-VENANT, pel caso della deformazione infinitesima. Un semplice ed elegante procedimento dovuto al BELTRAMI *) mostra, in quella ipotesi, che tali condizioni sono necessarie e sufficienti per la esistenza di u , v , w . La ricerca delle condizioni analoghe, per la deformazione finita, è stata fatta recentemente dal sig. MANVILLE **); il procedimento da noi seguito non solo è più diretto, ma permette di assegnare ai secondi membri delle (15) e (16) una forma nuova, intimamente collegata colla forma Φ , reciproca della funzione caratteristica della deformazione, e mette quindi in rilievo l'importanza che nello studio della deformazione può avere tale forma Φ . Basandosi poscia sui risultati fondamentali ottenuti dal sig. RIQUIER per la esistenza degli integrali di qualunque sistema di equazioni alle derivate parziali ***), il sig. MANVILLE ha pure dimostrato che le (15) e (16) sono anche condizioni sufficienti.

Messina, novembre 1904.

R. MARCOLONGO.

*) *Teor. mat.*, etc., pag. 117 e seg.

**) *Sur la déformation finie d'un milieu continu* [Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Bordeaux (1903)].

***) *Sur une question fondamentale du calcul intégral* [Acta Mathematica, XXIII, pp. 203-332 (1900)].