Über das dritte Hilbertsche Axiom der Verknüpfung.

Von

ARTUR ROSENTHAL in München.

Das dritte Hilbertsche Axiom der Verknüpfung*) lautet:

„Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte, in einer Ebene gibt es stets wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte.“

I.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß man dieses Axiom *durch das sehr viel weniger fordernde Axiom ersetzen kann:*

„Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte, in einer Ebene gibt es stets wenigstens einen Punkt.“

Es läßt sich nämlich mit Hilfe der räumlichen Axiome der Verknüpfung (I 4, 5, 6, 7, 8) in aller Strenge beweisen, daß der folgende Satz gilt:

Satz: *Wenn in einer Ebene ein Punkt existiert, so gibt es in dieser Ebene wenigstens drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte.*

Beweis: In der gegebenen Ebene ε liege der gegebene Punkt A .**) Nach I 8 existieren wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte (darunter also A). Nun sind folgende drei Fälle möglich:

a) Es liegen an sich schon drei von den vier Punkten in ε , nämlich A, B, C .

α) Wenn diese drei Punkte *nicht* in einer Geraden liegen, dann ist alles schon in Ordnung.

β) Wenn jedoch diese drei Punkte in einer Geraden a liegen, dann gilt der folgende Schluß: Es existiert ein nicht in ε (I 8), also auch nicht in a (I 6) gelegener Punkt D ; es gibt eine von ε verschiedene Ebene $\eta \equiv (ABD)$ (I 4); in η liegt auch C (I 6). Dann gibt es sicher einen

*) Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl., Leipzig 1909 S. 3. — Im folgenden wird stets auf diese (neueste) Auflage Bezug genommen.

**) Vgl. Fig. 1.

nicht in η (I 8), also auch nicht auf α (I 6) gelegenen Punkt E . Wenn dieser Punkt E in ε gelegen wäre, dann wäre alles in Ordnung. E liege nun außerhalb ε ; es existiert dann eine von ε und η verschiedene Ebene

Fig. 1.

$\xi \equiv (ADE)$ (I 6 u. I 4). Da D und E nicht in ε liegen, so muß außer A noch ein zweiter Punkt F den Ebenen ε und ξ gemeinsam sein (I 7). Nun kann aber F nicht mit A und B auf einer Geraden liegen; denn sonst würde F in η liegen (I 6); dann würden η und ξ zusammenfallen (I 5), was nach dem obigen ausgeschlossen ist. — Also gibt es in diesem Fall in ε sicherlich drei nicht in einer Geraden liegende Punkte (A, B, F).

b) Von den vier (nach I 8) existierenden Punkten sollen zwei (D und E) außerhalb, zwei (A und B) innerhalb der Ebene ε liegen. D bzw. E können dann nicht mit A und B auf einer Geraden (α) liegen (I 6). Es gibt also eine von ε verschiedene Ebene $\eta \equiv (ABD)$ (I 4).

α) Wenn nun E in η läge, so gäbe es einen außerhalb η gelegenen Punkt E' (I 8), der auch nicht mit A und B in einer Geraden liegen kann (I 6). Wenn nun E' in ε läge, so wäre unser Ziel schon erreicht. Wenn aber E' auch außerhalb ε liegt, dann reduziert sich dies, indem man Punkt E des Falles α) nicht mehr berücksichtigt und statt E' nunmehr E schreibt, auf:

β) E liegt außerhalb η . Dann existiert eine nicht mit ε oder η zusammenfallende Ebene $\xi \equiv (ADE)$ (I 6 u. I 4). Von hier ab ist die Schlußweise wörtlich genau so wie im Fall a).

c) Es liegen drei (D, E, G) der vier Punkte außerhalb, einer (nämlich A) innerhalb der Ebene ε .

α) A, D, E, G liegen nicht auf einer Geraden. Dann gibt es also sicher einen Punkt (z. B. G), der nicht mit A und D auf einer Geraden liegt; daher existiert die von ε verschiedene Ebene $\eta \equiv (ADG)$ (I 4). Nun müssen ε und η außer A noch einen zweiten Punkt B gemeinsam haben (I 7). Also sind wir auf den Fall b) zurückgeführt.

β) A, D, E, G liegen auf einer Geraden. Das Axiom I 4 sagt aus: „Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene α .“ Dieses Axiom würde sinnlos werden, wenn es nicht mindestens einen Fall gäbe, in dem es realisierbar wäre, d. h. wenn es nicht wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte

gäbe. Also können nicht alle überhaupt existierenden Punkte auf *einer* Geraden liegen; deshalb muß es, in unserem Falle, mindestens einen Punkt (X) geben, der *nicht* mit A, D, E, G auf einer Geraden liegt.*) Es existiert also die von ε verschiedene Ebene $\eta \equiv (ADX)$ (I 4). Demnach haben ε und η außer A noch einen zweiten Punkt**) gemeinsam (I 7). Also sind wir auch hier auf den Fall b) zurückgeführt.

Hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Der *erste* Teil von I 3 könnte nur dann durch das weniger fordernde Axiom: „Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens *einen* Punkt“ ersetzt werden, wenn man als neues Axiom hinzufügen würde: „Durch eine Gerade geht stets wenigstens *eine* Ebene“. Zur Beweisführung würde man dann die ebenen Axiome der Verknüpfung *und* die (ebenen und linearen) Axiome der Anordnung***)) benötigen (vgl. das weiter unten Ausgeführte).

II.

Wenn es sich um die axiomatische Begründung der *Planimetrie* handelt, so wird man auf eine Herbeiziehung räumlicher Axiome verzichten müssen. Aus diesem Grunde verliert der unter I bewiesene Satz im Rahmen der *Planimetrie* seine Geltung. Man muß also beim axiomatischen Aufbau der *Planimetrie* zur Hilbertschen Fassung des *zweiten* Teiles von I 3 zurückkehren. Dagegen kann man *hier*, im Bereiche der *ebenen* Geometrie, nunmehr den *ersten* Teil von I 3 („Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte“) *durch das sehr viel weniger fordernde Axiom ersetzen*:

Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens einen Punkt.

Die ganze ebene Geometrie nämlich bezieht sich nur auf solche Gebilde, die in der gegebenen Ebene liegen; speziell liegen alle zu betrachtenden Geraden in der gegebenen Ebene. Deshalb gelingt *hier* auf Grund der ebenen und linearen Axiome der Verknüpfung und Anordnung†), wie schon oben angedeutet, und zwar ohne Zuhilfenahme eines neuen (fremden) Axioms, der Beweis des folgenden Satzes:

Wenn auf einer Geraden ein Punkt existiert, so gibt es auf dieser Geraden wenigstens zwei Punkte.

*) Wollte man diesen Schluß *nicht* machen, so müßte man für unseren Beweis noch besonders voraussetzen, daß es mindestens in einer einzigen Ebene wenigstens zwei Punkte gibt.

**) Dieser Punkt kann ev. mit X zusammenfallen; das macht nichts aus.

***)) Da ein dem Verknüpfungsaxiom zweier Ebenen [I 7] analoges Axiom der Verknüpfung zweier Geraden *nicht* existiert, so muß man die Axiome der Anordnung verwenden, deren letztes ja in der Tat zugleich die Geraden einer Ebene miteinander verknüpft.

†) Es werden zum Beweise die Axiome I 1, 2, 3 b; II 1, 2, 4 benötigt.

Beweis: Nach I 3b gibt es in der Ebene drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte: A, B, C .*) Davon sei A der nach Voraussetzung auf unserer gegebenen Geraden a gelegene Punkt.**) Wenn einer der

Fig. 2.

beiden anderen Punkte ebenfalls auf a läge, so hätten wir unser Ziel erreicht. Es mögen nun also B und C nicht auf a liegen. Es existieren demnach drei voneinander und von a verschiedene Gerade: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ (I 1). Nach II 2 und II 1 gibt es dann sicher auf der Geraden $\overline{AC}$ einen (von B verschiedenen) Punkt D , sodaß A zwischen D und C liegt. Es existiert also die von a , $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ verschiedene Gerade $\overline{BD}$ (I 1 u. I 2). Wenn wir also II 4 auf das Dreieck (DBC) anwenden, so ergibt sich, daß a (da nicht durch B gehend) durch einen Punkt (E) entweder der Strecke $\overline{DB}$ oder der Strecke $\overline{BC}$ hindurchgeht. Also liegen auf a die beiden Punkte A und E , q. e. d.

*) I 3b ist unabhängig von der oben gegebenen Fassung von I 3a!

**) Vgl. Fig. 2.