*XVII. Schreiben an Hrn. Dr. C. Brunner Sohn,
in Bern, in Betreff der Versuche des Hrn. Dr.
Buys-Ballot über den Einfluss der Tempe-
ratur auf die Synaphie; von R. Merian.*

Basel, 31. Juli 1847.

Als ich neulich den Aufsatz vom Dr. Buys-Ballot ¹⁾ »über den Einfluss der Temperatur auf die Synaphie« las, worin er seine mit Adhäsionsplatten erhaltenen Resultate mit den Ihrigen vergleicht, fiel es mir auf, dafs er bei den aus seinen Versuchen berechneten Werthen von $a^2 (= A - Bt)$ die Constante A sehr nahe gleich wie Sie erhalten hat, nämlich 15,3 . . . für Wasser (S. 189 und 191), den Coëfficienten B dagegen fast doppelt so grofs (0,047 und 0,048 statt 0,028). Ich fand mich dadurch veranlafst, den Gang seiner Berechnungen etwas genauer zu verfolgen, um zu sehen, ob sich nicht etwa aus seinen Versuchen eine gröfsere Uebereinstimmung auch für B herausfinden liesse. Ich habe nun zwar gerade das Gegentheil gefunden, nämlich dafs Hr. Buys-Ballot seine Werthe von a^2 sehr ungenau berechnet hat, und dafs sie, richtig berechnet, nicht so gut mit den Ihrigen übereinstimmen als er geglaubt hat, theile Ihnen aber dennoch das Resultat mit, da es Sie vielleicht interessiren dürfte.

In wie fern die von Hrn. B. B. angewandte Methode geeignet ist genaue Resultate zu geben, darüber erlaube ich mir kein Urtheil; die von ihm beobachteten Werthe sprechen jedoch nicht sehr dafür. In der Reihe auf S. 183 z. B. erhält man für p zwischen 72° und 70° eine Gewichtszunahme von 0,115 Grm. per Grad und zwischen 37° und 36° von 0,09 Grm.; dagegen zwischen 69° und 57° nur von 0,013, zwischen 57° und 45° gar nur von 0,0025 Grm., d. h. nur $\frac{1}{40}$ vom ersten Werthe, während sie eigentlich

1) Poggend. Annalen, Bd. 71, S. 177 u. f.; damit zu vergleichen die Abhandl. von C. Brunner, Poggend. Annalen, Bd. 70, S. 481 u. f.

gleich seyn sollten. Aehnliches in den andern Versuchsreihen, z. B. auf S. 184 die Werthe für 192° und 190° , 146° und 134° . Auch stimmen zum Theil die Formeln für p , namentlich die für schwefelsaures Natron auf S. 184, schlecht mit den beobachteten Werthen überein.

Der Haupteinwurf aber, den ich gegen den Aufsatz von Hrn. Buys-Ballot zu machen habe, ist gegen seine Berechnung von a^2 aus p gerichtet; er glaubt nämlich durch seine neue Berechnungsweise (S. 188) eine grössere Uebereinstimmung von a^2 mit Ihren Werthen gefunden zu haben (in den Decimalen nämlich, denn die ganzen Zahlen stimmten schon nach der früheren Berechnung überein), hat aber dabei Ausdrücke vernachlässigt, die auf die erste Decimale influiren. Er vernachlässigt zuerst (S. 188 Z. 10) das Quadrat $\left(\frac{\pi a^2 r}{3(\alpha - \beta t)}\right)^2$, weiter (Z. 12) gar das Glied $\frac{2\pi a^2 r}{3\alpha}$ (denn es ist $P = \alpha$). Nun ist aber $\frac{\pi a^2 r}{3\alpha}$ ungefähr gleich 0,03, also der erste dieser Ausdrücke = 0,0009, der zweite = 0,06; also mit dem Werthe von a^2 (= 15, ..) vervielfacht, betragen diese vernachlässigten Glieder 0,013 .. und 0,9 .., d. h. im letzteren Falle beinahe 1. Allerdings waren diese Vernachlässigungen sehr bequem, um die Rechnung abzukürzen; da aber Hr. B. B. auf Richtigkeit wenigstens der ersten Decimale Anspruch macht, durfte er sich dieses nicht erlauben.

Bevor ich nun a^2 genauer berechne, muß ich noch zwei sehr störende Fehler berichtigen, die jedoch wohl nur Druckfehler sind. In der Tafel auf S. 183 sollte Gramm statt Gran stehen, wie aus dem Werthe von a^2 und der Poisson'schen Formel sich ergibt. Ferner muß es auf S. 188 (Z. 17 und 19) $a^2 = \frac{\alpha^2}{2(\pi r^2)^2}$ und $A = \frac{\alpha^2}{2(\pi r^2)^2}$ heißen, beidemale statt $= \frac{\alpha}{2\pi r^2}$; Hr. B. B. scheint jedoch bei der Berechnung von A den ersteren, richtigen Ausdruck zu Grunde gelegt zu haben.

Berechnen wir a^2 nach der auch von Hrn. Buys-Ballot angewandten Poisson'schen Formel ¹⁾:

$$p = \pi \mu \left(a r^2 \sqrt{2} - \frac{a^2 r}{3} \right),$$

wobei nach Poisson a und r in Centimetern auszudrücken,

1) Poisson, *nouvelle théorie de l'action capillaire*, p. 233.

μ das Gewicht eines Kubikcentimeters der angewandten Flüssigkeit, oder in Grammen ausgedrückt das spec. Gewicht ist. Da wir in unserem Falle Millimeter haben, müssen wir für μ auch nur das Gewicht eines Kubikmillimeters, also μ 1000 Mal kleiner oder $\frac{P}{\mu}$ 1000 Mal größer nehmen, wie schon die Homogenität der Formel es verlangt.

Setzen wir $\frac{P}{\mu} = P$, so erhalten wir die Gleichung:

$$a^2 - 3ar\sqrt{2} + \frac{3P}{\pi r} = 0,$$

woraus:

$$a = \frac{3}{2}r\sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}r^2 - \frac{3P}{\pi r}}$$

oder:

$$a = \frac{3}{2}r\sqrt{2} \pm \frac{3}{2}r\sqrt{2} \left(1 - \frac{2P}{3\pi r^3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

und:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{9}{2}r^2 \left\{ 1 \pm \left(1 - \frac{2P}{3\pi r^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \\ &= 9r^2 \left\{ 1 - \frac{P}{3\pi r^3} \pm \left(1 - \frac{2P}{3\pi r^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Da der Ausdruck für a^2 offenbar kein nur von r und nicht zugleich von P abhängiges Glied enthalten darf, müssen wir von den beiden Zeichen das untere nehmen, damit, bei Entwicklung der Wurzelgröße in eine Reihe, die von P unabhängigen Glieder sich aufheben. Setzen wir nun für P oder $\frac{P}{\mu}$ seinen Werth $\alpha - \beta t$, so ist:

$$a^2 = 9r^2 \left\{ 1 - \frac{\alpha}{3\pi r^3} + \frac{\beta t}{3\pi r^3} - \left(1 - \frac{2\alpha}{3\pi r^3} + \frac{2\beta t}{3\pi r^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Setzen wir $a^2 = A - Bt$, so erhalten wir für $t = 0$:

$$A = 9r^2 \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi r^3} - \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{3\pi r^3}}\right),$$

ferner, wenn wir die Wurzelgrößen im Ausdruck von a^2 nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und dabei die höheren Potenzen von t vernachlässigen, was wohl erlaubt ist, da sie mit höheren Potenzen von $\frac{2\beta}{3\pi r^3}$ (d. i. ungefähr $\frac{1}{30000}$) vervielfacht sind, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} B &= 9r^2 \left(-\frac{\beta}{3\pi r^3} + \frac{\beta}{3\pi r^3} \left(1 - \frac{2\alpha}{3\pi r^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{3\beta}{\pi r} \left\{ \left(1 - \frac{2\alpha}{3\pi r^3}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke erhalten wir nun, wenn wir für α und β die Werthe von Hrn. Buys-Ballot aus Formel I (S. 188) zu Grunde legen, nämlich:

$$\alpha = 13807,4 \quad \beta = 20,628 \quad \text{und} \quad \pi r^2 = 2463$$

$$a^2 = 16,8574 - 0,052243 t.$$

Aus den Werthen von α und β aus Formel II (S. 188):

$$\alpha = 13667 \quad \beta = 21,264 \quad \text{und} \quad \pi r^2 = 2500$$

folgt:

$$a^2 = 15,9948 - 0,051556 t \quad ^1).$$

Entwickeln wir in den Ausdrücken von A und B die Wurzelgrößen in Reihen nach dem binomischen Lehrsatz, so erhalten wir die Reihen:

$$A = 9r^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{3\pi r^3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{3\pi r^3} \right)^3 + \frac{5}{8} \left(\frac{\alpha}{3\pi r^3} \right)^4 + \dots \right\}$$

$$B = \frac{3\beta}{\pi r} \left\{ \frac{\alpha}{3\pi r^3} + \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha}{3\pi r^3} \right)^2 + \frac{5}{2} \left(\frac{\alpha}{3\pi r^3} \right)^3 + \dots \right\}$$

Die Werthe von Hrn. Buys-Ballot $A = \frac{\alpha^2}{2(\pi r^2)^2}$

und $B = \frac{\alpha\beta}{(\pi r^2)^2}$ sind offenbar nur die ersten Glieder dieser Reihen; dafs man aber die folgenden nicht vernachlässigen dürfe, zeigt die Abweichung unserer Werthe von a^2 von den Buys-Ballot'schen.

Ich glaube damit ziemlich klar dargethan zu haben, dafs erstens die von Hrn. B. B. angewandte Methode keine sehr übereinstimmenden Beobachtungswerthe geliefert hat, und zweitens dafs, wenn man a^2 aus seinen Werthen von p richtig berechnet, die Uebereinstimmung mit den Brunner'schen u. a. Werthen von a^2 weniger gut ist, als Hr. Buys-Ballot zu finden geglaubt hat (nach Brunner ist für Wasser $a^2 = 15,3321 - 0,028639 t$); der Werth von B namentlich ist bei Hrn. Buys-Ballot immer noch fast doppelt so grofs wie bei Ihnen.

1) Hr. Buys-Ballot berechnete aus den obigen Daten mit Hülfe seiner

Formeln $A = \frac{\alpha^2}{2(\pi r^2)^2}$ und $B = \frac{\alpha\beta}{(\pi r^2)^2}$ die Werthe von a^2 (S. 188)

I. $a^2 = 15,2515 - 0,045573 t$

II. $a^2 = 15,395 - 0,04773 t.$

Ich begreife übrigens nicht, wie er zu diesen Werthen von a^2 gekommen, denn wenn ich aus den gleichen Daten nach den gleichen Formeln a^2 berechne, finde ich:

I. $a^2 = 15,7132 - 0,046951 t$

II. $a^2 = 14,9429 - 0,046498 t.$