Ueber das Gleichgewicht der Wärme und das der Elektricität in einem Körper, welcher von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird.

(Von Herrn *Carl Neumann* zu Halle.)

In der Theorie der Wärme und in der Theorie der (statischen) Elektricität existiren zwei Probleme, welche unter einander, was ihre mathematische Behandlung anbelangt, eine sehr nahe Verwandtschaft besitzen. Das eine derselben hat die

I. Bestimmung des stationären Temperaturzustandes in einem Körper, dessen Oberfläche überall mit willkürlich gegebenen und unveränderlichen Wärmequellen in Contact steht;

das andere hat die

II. Bestimmung der elektrischen Vertheilung in einem Körper, welcher sich im Bereich willkürlich gegebener und unveränderlicher elektrischer Kräfte befindet

zum Gegenstande *).

In einer im Verlage von *H. W. Schmidt* in Halle a. S. 1862 erschienenen Schrift: „Lösung des allgemeinen Problemes des stationären Temperaturzustandes für einen homogenen Körper, welcher von zwei *nicht*concentrischen Kugelflächen begrenzt wird", habe ich diese beiden Probleme für einen homogenen Körper, welcher von irgend zwei einander nicht schneidenden Kugelflächen begrenzt wird, in voller Allgemeinheit gelöst. Ich beabsichtige hier die Resultate anzugeben, zu welchen ich dort gelangt bin, und die Methode anzudeuten, deren ich mich dabei bedient habe.

Ein Körper der eben genannten Art kann je nach der Lage der beiden ihn begrenzenden Kugelflächen sehr verschiedene Gestalten besitzen. Es können nämlich die beiden Flächen den Körper entweder *beide äusserlich*, oder es können ihn *beide innerlich*, oder es kann endlich die *eine* ihn *äusserlich*, die *andere* ihn *innerlich* begrenzen. Im ersten Fall haben wir es dann mit einem Körper zu thun, der aus zwei getrennten Stücken, nämlich aus

---

*) Bei dem Probleme II. handelt es sich also um diejenige Vertheilung, welche das in dem Körper enthaltene elektrische Fluidum unter der gegenseitigen Einwirkung seiner Theilchen und unter der gleichzeitigen Einwirkung jener willkürlich gegebenen und unveränderlichen äusseren Kräfte annimmt.

zwei Kugeln, besteht; im zweiten Fall mit einem Körper zu thun, der in seinem Innern zwei kugelförmige Höhlungen besitzt und nach Aussen hin ringsum unbegrenzt ist; im dritten Fall endlich mit einem Körper, der eine schalenförmige Gestalt besitzt.

Jedes der Probleme I. und II. findet durch meine Abhandlung für alle drei Fälle seine vollständige Lösung *).

Im Wesentlichen handelt es sich bei Lösung der Probleme I. und II. für irgend einen der in Rede stehenden drei Fälle um *ein und dieselbe Aufgabe*, nämlich um die Ermittelung einer von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z abhängenden Function V, welche innerhalb eines von zwei Kugelflächen begrenzten Raumes allenthalben der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

Genüge leistet, welche ausserdem innerhalb dieses Raumes gewisse Stetigkeits-Bedingungen erfüllt **), welche ferner, falls der genannte Raum sich (wie das beim zweiten Falle stattfindet) ins Unendliche hin erstreckt, für die unendlich fernen Punkte auf gewisse Weise gegen Null convergirt ***), und welche endlich auf jenen Kugelflächen selber beliebig gegebene Werthe besitzt.

Ich bringe um diese Function V zu bestimmen zwei *verschiedene* Methoden in Anwendung, und gelange dadurch auch zu Resultaten von *verschiedener Form*. Was die erste Methode anbelangt, so werde ich mich hier auf Mittheilung des durch sie erzielten Resultates beschränken; bei der zweiten Methode hingegen ausser den Resultaten auch die Methode selber in ihren Grundzügen darlegen.

---

*) Was das II. Problem anbelangt, so ist dasselbe für den *ersten* der in Rede stehenden drei Fälle bekanntlich schon von *Poisson* behandelt, von *Poisson* aber nur unter der *besonderen* Voraussetzung gelöst worden, dass die gegebenen von Aussen her auf den Körper einwirkenden elektrischen Kräfte *Null* sind. Meine Untersuchung geht weiter. Ich gelange nämlich zur Lösung des Problems für *jeden* der drei Fälle und für *beliebig* gegebene äussere Kräfte.

**) Innerhalb des genannten Raumes müssen sowohl V selber als auch $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ überall stetig sein.

***) Für einen unendlich fernen Punkt muss der Werth von V gegen $\frac{\varkappa}{r}$ convergiren, wo r den Abstand jenes Punktes von irgend einem festen Punkt in der Endlichkeit, und $\varkappa$ irgend welche Constante vorstellt.

Erste Methode zur Bestimmung von V.

Zwei Kugelflächen, welche einander nicht schneiden, werden, welche Lage zu einander sie auch haben mögen, immer den ganzen unendlichen Raum in *drei* Räume zerlegen, von welchen einer — er mag R heissen — durch *beide* Kugelflächen, der zweite und dritte hingegen — sie mögen K und K' genannt werden — nur durch je *eine* Kugelfläche begrenzt wird. Ich werde mich hier auf den Fall beschränken, dass von den beiden gegebenen Kugelflächen die eine *ausserhalb* der anderen liegt. Alsdann werden K und K' die Innenräume dieser beiden Flächen vorstellen, während R denjenigen Raum bezeichnet, welcher die beiden Flächen umgiebt und nach Aussen hin sich ringsum ins Unendliche erstreckt. Diesen drei Räumen R, K, K' entsprechend lassen sich gleichzeitig drei Aufgaben hinstellen, indem für jeden dieser drei Räume nach derjenigen Function V gefragt werden kann, welche den obengenannten Bedingungen Genüge leistet und an der Begrenzung des Raumes gegebene Werthe besitzt. Für die Räume K und K' ist die Lösung dieser Aufgabe bekannt *); für den Raum R hingegen ist die Aufgabe *bis jetzt nicht gelöst worden,* und diese Aufgabe ist es, um welche es sich hier handelt.

Ich werde nun hier ein Verfahren mittheilen, durch welches die Lösung dieser letzten Aufgabe auf die Lösungen der beiden ersteren reducirt werden kann.

Zur Unterscheidung bezeichne ich die dem Raume K entsprechende Function V mit F, die dem Raume K' entsprechende Function V mit Φ, während die dem Raume R entsprechende nach wie vor V genannt werden soll. F und Φ mögen berechnet gedacht werden, und zwar der Art berechnet gedacht werden, dass F auf der Oberfläche von K, und Φ auf der von K' eben dieselben Werthe hat, welche die unbekannte, dem Raume R entsprechende Function V auf jenen Flächen besitzen soll.

Um nun, sobald F und Φ gefunden sind, den Werth von V in irgend einem Punkte p des Raumes R zu erhalten, dient folgendes Verfahren.

Man lege durch den Punkt p und durch die Mittelpunkte der beiden Kugelflächen eine Ebene und construire in dieser Ebene einen Kreis, welcher

*) Man kann sich dabei entweder der *Laplace*schen Reihenentwickelungen bedienen, oder auch eine Methode anwenden, die ich in einer kleinen Schrift (Verlag von *H. W. Schmidt* in Halle a. S. 1861) angegeben habe, und durch welche man *ohne* Reihenentwickelungen zum Ziele gelangt.

durch p hindurchgeht, und die beiden Kugelflächen senkrecht durchschneidet. Die beiden Punkte, in welchen dieser Kreis und die Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte einander schneiden, mögen A und A' genannt werden.

Man ziehe sodann von p aus zwei gerade Linien nach den beiden Kugelmittelpunkten hin; die Schnittpunkte dieser Linien mit dem zuvor construirten Kreise seien a, a'. Ausser den beiden eben gezogenen Linien giebt es noch zwei andere gerade Linien, durch welche a, a' mit den Kugelmittelpunkten in Verbindung gesetzt werden können; die Schnittpnnkte dieser beiden Linien mit dem Kreise seien b, b'. Nun lassen sich von Neuem ausser den beiden zuletzt genannten Linien noch zwei andere Linien construiren, welche b, b' mit den Kugelmittelpunkten verbinden; die Durchschnittspunkte dieser Linien mit dem Kreise seien c, c', u. s. w.

Der Punkt p war irgendwo *innerhalb* des Raumes R angenommen worden. Die gegenwärtig construirten Punktpaare $a, a'; b, b'; c, c'; \ldots$ hingegen werden alle *ausserhalb* R liegen. Es wird nämlich von jedem dieser Punktpaare immer der eine Punkt innerhalb K, der andere innerhalb K' liegen. Die Bezeichnung der Punktpaare mag nun der Art gewählt gedacht werden, dass $a, b, c, \ldots$ sämmtlich innerhalb K, und $a', b', c', \ldots$ sämmtlich innerhalb K' liegen. Ebenso mag auch von den beiden zuvor erwähnten Punkten A und A' der erstere derjenige sein, welcher innerhalb K, der letztere derjenige, welcher innerhalb K' liegt. Alle diese Punkte $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots$ sowohl als auch A, A' liegen auf der Peripherie des Kreises. Denkt man sich die Construction der Punkte $a, b, c, \ldots$ und ebenso auch die der Punkte $a', b', c' \ldots$ ins Unendliche hin fortgesetzt, so werden sich die ersteren dem Punkte A, die letzteren dem Punkte A' ins Unendliche nähern.

Bezeichnet man nun die Werthe, welche die vorhin genannte Function F in den Punkten $a, b, c, \ldots$ besitzt, mit $F_a, F_b, F_c, \ldots$ und die Werthe, welche die Function Φ in den Punkten $a', b', c', \ldots$ besitzt, mit $\Phi_{a'}, \Phi_{b'}, \Phi_{c'}, \ldots$, so lässt sich der Werth V_p, welchen die zu bestimmende Function V im Punkte p besitzt, folgendermassen darstellen:

$$\begin{aligned}\xi_p V_p = {} & \xi_a F_a - \xi_b F_b + \xi_c F_c - + \cdots \\ & + \xi_{a'} \Phi_{a'} - \xi_{b'} \Phi_{b'} + \xi_{c'} \Phi_{c'} - + \cdots,\end{aligned}$$

wo die Coefficienten ξ eine sehr einfache geometrische Bedeutung haben. Für jeden der Punkte $p, a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots$ repräsentirt nämlich ξ das geometrische Mittel der beiden Abstände, welche dieser Punkt nach A und A' hin besitzt.

Durch diese Formel ist die zuvor angegebene Reduction ausgeführt, nämlich die Ermittelung von V zurückgeführt auf die Bestimmung von F und Φ.

Zu einem analogen Resultate gelange ich übrigens in meiner Abhandlung auch in dem Falle, wenn von den beiden Kugelflächen, welche den gegebenen Raum begrenzen, die eine *innerhalb* der anderen liegt, und demnach der Raum selber eine schalenförmige Gestalt besitzt.

Zweite Methode zur Bestimmung von V.

Ich wende, um V zu bestimmen, als Coordinaten die Parameter dreier orthogonaler Flächensysteme an, über deren Beschaffenheit Folgendes bemerkt werden mag.

Construirt man alle Punkte, deren Abstände nach zwei festen Punkten hin ein gegebenes Verhältniss besitzen, so werden diese Punkte in ihrer Gesammtheit eine Kugelfläche bilden. Aendert man den Werth jenes Verhältnisses, so wird man successive andere und andere Kugelflächen erhalten; und zwar werden die Mittelpunkte aller dieser Flächen mit jenen beiden festen Punkten in ein und derselben geraden Linie liegen. Dieses ist das *erste* der von mir angewendeten drei Flächensysteme. Den beiden festen Punkten — ich nenne sie die beiden *Pole* — gebe ich dabei in jedem speciellen Fall eine solche Lage, dass die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Raumes mit zu den Kugelflächen dieses Systems gehören.

Construirt man ferner alle Punkte, von welchen aus gesehen die beiden Pole gleich weit von einander entfernt erscheinen, so erhält man Punkte, die in ihrer Gesammtheit eine gewisse Rotationsfläche bilden *). Aendert man die Grösse jener scheinbaren Entfernung, so erhält man andere und andere Rotationsflächen. Diese Flächen, deren gemeinsame Rotationsachse durch die Verbindungslinie der beiden Pole dargestellt wird, sind zu den vorhin ge-

---

*) Es wird diese Fläche eine Kugel sein, wenn der Winkel, unter welchem man nach den beiden Polen sieht, genau ein rechter ist. Ist hingegen dieser Winkel ein spitzer oder ein stumpfer, so wird die Fläche *nicht* mehr kugelförmig sein. Sie wird alsdann in jedem der beiden Pole eine *Spitze* besitzen.

nannten Kugelflächen orthogonal und bilden in ihrer Gesammtheit das *zweite* der von mir angewendeten Flächensysteme.

Das *dritte* Flächensystem endlich wird durch die Meridianebenen der beiden ersten Flächensysteme, d. i. durch Ebenen repräsentirt, welche sämmtlich durch die beiden Pole hindurchgehen.

Ist der Raum, für welchen die Function V bestimmt werden soll, und sind also auch die beiden diesen Raum begrenzenden Kugelflächen gegeben, so lassen sich die beiden Pole sofort construiren *); sind diese aber construirt, so ist damit die Lage der drei Flächensysteme überhaupt vollständig bestimmt.

Die Parameter dieser drei Flächensysteme sind es also, deren ich mich bei meiner Untersuchung als Coordinaten bediene. Man könnte dieselben, falls ein Name erwünscht erscheinen sollte, die *„dipolaren Coordinaten"* nennen.

Einen besonders einfachen Charakter gewinnt die Beschaffenheit unserer drei Flächensysteme, sobald die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Raumes *concentrisch* sind. Alsdann nämlich fällt der eine Pol in den gemeinsamen Mittelpunkt dieser beiden Flächen, der andere in die Unendlichkeit, und dem entsprechend verwandelt sich dann von jenen drei Flächensystemen das erste in ein System concentrischer Kugeln, das zweite in ein System von Rotationskegeln, und das dritte in die Meridianebenen dieser Kegel. Man übersieht daher sofort, dass die Parameter der drei Flächensysteme in diesem Specialfall in die gewöhnlichen Polarcoordinaten übergehen. Wollte man also, wie es wohl zweckmässig sein dürfte, die dipolaren Coordinaten für diesen Specialfall mit dem Namen *„monopolare Coordinaten"* bezeichnen, so würden die monopolaren Coordinaten identisch sein mit den gewöhnlichen Polarcoordinaten.

Ausserdem ist noch ein anderer Specialfall zu erwähnen, welcher dann eintritt, wenn die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Raumes einander gerade *berühren*. Findet dieses statt, so fallen die beiden Pole in *einen* Punkt zusammen, und zwar in den Contactpunkt jener beiden Flächen. Man könnte daher die dipolaren Coordinaten in diesem Specialfall füglich mit dem Namen *„synpolare Coordinaten"* bezeichnen.

---

*) Man hat zu diesem Zweck nur durch die beiden Kugelmittelpunkte eine Ebene zu legen, und in dieser Ebene irgend einen Kreis zu construiren, welcher die beiden Kugelflächen senkrecht durchschneidet. Die beiden Punkte, in welchen dieser Kreis und die Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte einander schneiden, sind dann die beiden Pole.

Zur Lösung der Aufgabe, um welche es sich hier handelt, nämlich zur Bestimmung der Function V ist es nun vor allen Dingen erforderlich, dass man den Ausdruck, in welchen sich der reciproke Werth der Entfernung zweier Punkte bei Einführung der neuen Coordinaten verwandelt, in eine Reihe zu entwickeln im Stande ist, in welcher jedes einzelne Glied Y der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet.

Für die *monopolaren* Coordinaten ist diese Entwickelung bekanntlich bereits von *Laplace* ausgeführt worden, und zwar mit Benutzung einer Function $P^{(n)}(\eta)$, die der Differentialgleichung

$$\frac{\partial . (1-\eta^2) \frac{\partial P^{(n)}(\eta)}{\partial \eta}}{\partial \eta} + n(n+1) P^{(n)}(\eta) = 0$$

Genüge leistet, und deren Werth sich durch das bestimmte Integral

$$P^{(n)}(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\eta + \sqrt{\eta^2 - 1} . \cos \alpha)^n d\alpha$$

darstellen lässt.

Was nun die *dipolaren* Coordinaten anbelangt, so führt meine Untersuchung zu dem merkwürdigen Resultat, dass bei Anwendung dieser die Entwickelung jener reciproken Entfernung mit der eben erwähnten *Laplace*schen Entwickelung der *Form* nach identisch wird; nämlich zu dem Resultat, dass es im Wesentlichen nur der Vertauschung der monopolaren Coordinaten mit den dipolaren Coordinaten bedarf, um die eine Entwickelung in die andere umzuwandeln.

Wesentlich anders gestaltet sich hingegen die Sache bei Anwendung der *synpolaren* Coordinaten. Geht man nämlich von dem allgemeinen Fall der *dipolaren* Coordinaten zu dem Specialfall der synpolaren Coordinaten über, so tritt bei Ausführung jener Entwickelung an die Stelle der *Laplace*schen Function $P^{(n)}(\eta)$ eine gewisse andere bereits von *Fourier* und später namentlich von *Bessel* benutzte Function, welche ich mit $J(n\eta)$ bezeichne, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 J(n\eta)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial J(n\eta)}{\partial \eta} + n^2 J(n\eta) = 0$$

Genüge leistet, und deren Werth sich durch das bestimmte Integral

$$J(n\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\eta \cos \alpha) d\alpha$$

darstellen lässt. Und gleichzeitig mit dieser Umänderung verwandelt sich ausserdem die *Reihe*, durch welche jene Entwickelung dargestellt wird, in ein *bestimmtes Integral* *).

Ist die reciproke Entfernung zweier Punkte in der hier angedeuteten Art dargestellt, so kann man dann die Bestimmung der Function V leicht durchführen. Das Resultat, zu welchem man gelangt, ist, je nachdem die beiden Kugelflächen, welche den gegebenen Raum begrenzen, von einander getrennt oder mit einander in Contact sind, von verschiedener Form, und muss daher für jeden dieser beiden Fälle besonders angegeben werden.

1. *Findet zwischen beiden Begrenzungsflächen keine Berührung statt*, so hat man zunächst die beiden Pole zu construiren, und dann die diesen Polen entsprechenden dipolaren Coordinaten in Anwendung zu bringen. Zufolge dessen, was zuvor über diese Coordinaten gesagt wurde, hängen die drei dipolaren Coordinaten irgend eines Punktes — sie mögen ϑ, ω, φ heissen — der Reihe nach 1) von dem Verhältniss der beiden Polabstände des Punktes, 2) von dem Neigungswinkel dieser beiden Abstände gegen einander, 3) von der Lage der durch den Punkt gelegten Meridianebene ab. In welcher Weise diese Abhängigkeiten festzusetzen sind, wird ziemlich gleichgültig sein. Ich nehme für ϑ den natürlichen Logarithmen des genannten Verhältnisses, für ω geradezu den genannten Neigungswinkel, und für φ den Winkel, welchen die durch den Punkt gelegte Meridianebene mit irgend einer festen Meridianebene macht.

Die Gleichung $\vartheta = \text{Const.}$ wird dann ein System von Kugelflächen darstellen, in welchem die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Raumes mit enthalten sind. Es sei $\vartheta = c$ die Gleichung der einen und $\vartheta = \gamma$ die Gleichung der anderen Begrenzungsfläche. Ferner sei $2a$ der Abstand der beiden Pole von einander.

Um nun den Werth der unbekannten Function V in einem Punkte p, der irgendwo innerhalb des gegebenen Raumes liegt, hinstellen zu können,

*) In Betreff der synpolaren Coordinaten mag noch bemerkt werden, dass die darüber von mir angestellte Untersuchung beiläufig zu einem Resultat führt, welches für die Theorie der Functionen im Allgemeinen nicht ohne Interesse ist. Im Verlaufe der Untersuchung ergiebt sich nämlich, dass mit Hülfe der *Bessel*schen Function J jede willkürlich gegebene, von zwei Argumenten abhängende Function durch ein gewisses *drei*faches Integral dargestellt werden kann; dass also für die eben genannten Functionen eine Darstellung existirt, welche dem *Fourier*schen *zwei*fachen Integrale für eine Function eines Argumentes vollständig analog ist.

muss man ausser diesem Punkte p noch zwei andere Punkte s und σ zu Hülfe ziehen, von welchem der erste irgendwo auf der Begrenzungsfläche $\vartheta = c$, der andere irgendwo auf der Begrenzungsfläche $\vartheta = \gamma$ liegt. Bezeichnet man die Coordinaten dieser drei Punkte der Reihe nach mit ϑ_p, ω_p, φ_p, ferner mit $\vartheta_s = c$, ω_s, φ_s, endlich mit $\vartheta_\sigma = \gamma$, ω_σ, φ_σ, und setzt man ausserdem zur Abkürzung *)

$$e^{\vartheta_p} + e^{-\vartheta_p} - 2\cos\omega_p = \psi_p,$$

$$e^c + e^{-c} - 2\cos\omega_s = \psi_s, \quad \cos\omega_s \cos\omega_p + \sin\omega_s \sin\omega_p \cos(\varphi_s - \varphi_p) = u_{sp},$$

$$e^\gamma + e^{-\gamma} - 2\cos\omega_\sigma = \psi_\sigma, \quad \cos\omega_\sigma \cos\omega_p + \sin\omega_\sigma \sin\omega_p \cos(\varphi_\sigma - \varphi_p) = u_{\sigma p},$$

so hat man nun zunächst folgende beide, respective von den Punkten p, s und von den Punkten p, σ abhängende Ausdrücke $H_s^{(p)}$ und $H_\sigma^{(p)}$ zu bilden:

$$H_s^{(p)} = \frac{\psi_s \sqrt{\psi_s} \sqrt{\psi_p}}{4a^2} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \cdot \frac{e^{\frac{2n+1}{2}(\gamma - \vartheta_p)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_p - \gamma)}}{e^{\frac{2n+1}{2}(\gamma - c)} - e^{\frac{2n+1}{2}(c - \gamma)}} \cdot P^{(n)}(u_{sp}),$$

$$H_\sigma^{(p)} = \frac{\psi_\sigma \sqrt{\psi_\sigma} \sqrt{\psi_p}}{4a^2} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \cdot \frac{e^{\frac{2n+1}{2}(c - \vartheta_p)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_p - c)}}{e^{\frac{2n+1}{2}(c - \gamma)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\gamma - c)}} \cdot P^{(n)}(u_{\sigma p}),$$

wo $P^{(n)}$ die vorhin genannte *Laplace*sche Function vorstellt. Alsdann ist der gesuchte Werth V_p der Function V im Punkte p folgender:

$$4\pi V_p = \int V_s H_s^{(p)} ds + \int V_\sigma H_\sigma^{(p)} d\sigma.$$

Hier sind unter ds und $d\sigma$ zwei respective bei den Punkten s und σ liegende Flächenelemente der beiden gegebenen Kugeln zu verstehen, und die Integrationen $\int$ respective über alle Elemente ds der einen und über alle Elemente $d\sigma$ der anderen Kugelfläche ausgedehnt zu denken. Dabei bezeichnen V_s und V_σ die willkürlich gegebenen Werthe, welche die Function V auf den beiden Kugelflächen besitzen soll.

Diese Formel für V ist ohne Unterschied gültig, mag nun von den beiden, den gegebenen Raum begrenzenden Kugelflächen die eine ausserhalb oder die eine innerhalb der anderen liegen.

---

*) Unter e ist überall die Basis der natürlichen Logarithmen, ferner, wie sogleich bemerkt werden mag, unter π die *Ludolph*sche Zahl zu verstehen.

2. *Findet zwischen den beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Raumes Berührung statt,* so fallen beide Pole in den Contactpunkt dieser Flächen. Von den dipolaren Coordinaten ϑ, ω, φ verlieren daher die beiden ersten, wie man sofort übersieht, in diesem Fall ihre Anwendbarkeit. Denn ϑ sowohl als auch ω werden, wenn beide Pole zusammenfallen, für *alle* Punkte des Raumes ein und denselben Werth besitzen, nämlich beständig $=0$ sein. Jedoch bieten sich leicht zwei andere Grössen dar, welche in diesem Fall die Rolle von ϑ und ω zu übernehmen geeignet sind, nämlich in Verbindung mit φ zur Ortsbestimmung eines Punktes verwandt werden können. Dividirt man nämlich ϑ und ω durch den gegenseitigen Abstand $2a$ der beiden Pole, so erhält man zwei Brüche

$$\lambda = \frac{\vartheta}{2a}, \qquad \varpi = \frac{\omega}{2a},$$

welche sich für den hier vorliegenden Fall zunächst unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darstellen, bei genauerer Untersuchung aber als Grössen von ganz bestimmten Werthen ausweisen. Diese Grössen λ, ϖ nun sind es, welche ich in Verbindung mit φ als Coordinaten anwende und mit dem Namen synpolare Coordinaten bezeichne.

Es wird nicht überflüssig sein, zu bemerken, dass diese Coordinaten einfache geometrische Bedeutungen besitzen. Legt man nämlich durch irgend welchen Punkt α eine Meridianebene, d. i. eine Ebene, welche durch α und durch die Mittelpunkte der beiden gegebenen, einander berührenden Kugelflächen hindurchgeht; und construirt man in dieser Ebene zwei Kreise, welche beide durch α und durch den Contactpunkt jener Kugelflächen hindurchgehen, von welchen aber der erste die Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte senkrecht durchschneidet, während der zweite dieselbe tangirt; so ist, falls λ, ϖ, φ die synpolaren Coordinaten des Punktes α vorstellen, der reciproke Radius des ersten Kreises gleich $\pm\lambda$, der reciproke Radius des zweiten gleich ϖ, und endlich der Winkel, unter welchem die genannte Meridianebene gegen irgend eine feste Meridianebene geneigt ist, gleich φ.

Um nun den Werth der unbekannten Function V in einem Punkte p zu ermitteln, der irgendwo innerhalb des gegebenen Raumes liegt, hat man wiederum noch zwei andere Punkte s und σ zu Hülfe zu nehmen, von welchen der erste irgendwo auf der einen, der zweite irgendwo auf der anderen Begrenzungsfläche liegt. Sind $\lambda = c$ und $\lambda = \gamma$ die Gleichungen dieser beiden

Flächen, so werden die Coordinaten der Punkte s und σ durch c, ϖ_s, φ_s und γ, ϖ_σ, φ_σ bezeichnet werden können. Sind ausserdem λ_p, ϖ_p, φ_p die Coordinaten des Punktes p, und setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} &\lambda_p^2+\varpi_p^2=\psi_p, \\ &c^2+\varpi_s^2=\psi_s, \qquad \sqrt{\varpi_s^2+\varpi_p^2-2\varpi_s\varpi_p\cos(\varphi_s-\varphi_p)}=u_{sp}, \\ &\gamma^2+\varpi_\sigma^2=\psi_\sigma, \qquad \sqrt{\varpi_\sigma^2+\varpi_p^2-2\varpi_\sigma\varpi_p\cos(\varphi_\sigma-\varphi_p)}=u_{\sigma p}, \end{aligned}$$

so hat man nun zunächst folgende beide, respective von den Punkten s, p und von den Punkten σ, p abhängende Ausdrücke $H_s^{(p)}$ und $H_\sigma^{(p)}$ zu bilden:

$$H_s^{(p)} = 2\psi_s\sqrt{\psi_s}\sqrt{\psi_p}\int_0^\infty \frac{e^{n(\gamma-\lambda_p)}-e^{n(\lambda_p-\gamma)}}{e^{n(\gamma-c)}-e^{n(c-\gamma)}}\cdot J(n\,.\,u_{sp})\,.\,n\,dn,$$

$$H_\sigma^{(p)} = 2\psi_\sigma\sqrt{\psi_\sigma}\sqrt{\psi_p}\int_0^\infty \frac{e^{n(c-\lambda_p)}-e^{n(\lambda_p-c)}}{e^{n(c-\gamma)}-e^{n(\gamma-c)}}\cdot J(n\,.\,u_{\sigma p})\,.\,n\,dn,$$

wo J die früher erwähnte *Bessel*sche Function bezeichnet.

Alsdann lässt sich der Werth V_p, welchen V in p besitzt, folgendermassen darstellen:

$$4\pi V_p = \int V_s H_s^{(p)}\,ds + \int V_\sigma H_\sigma^{(p)}\,d\sigma,$$

wo die Integrationen $\int$ über alle Elemente ds der einen und über alle Elemente $d\sigma$ der anderen Begrenzungsfläche auszudehnen sind, und wo V_s, V_σ wiederum die willkürlich gegebenen Werthe bezeichnen, welche V auf diesen beiden Flächen besitzen soll.

Diese Bestimmung von V ist gleichfalls ohne Unterschied gültig, mag nun von den beiden einander berührenden Kugelflächen, welche den gegebenen Raum begrenzen, die eine ausserhalb oder die eine innerhalb der anderen liegen.

In Betreff der eben auseinandergesetzten zweiten Methode mag schliesslich noch bemerkt werden, dass dieselbe auch dann anwendbar ist, wenn der gegebene Raum, für welchen die Function V bestimmt werden soll, nicht von *zwei* sondern nur von *einer* Kugelfläche begrenzt wird. Wird der Raum von *zwei* Kugelflächen begrenzt, so sind die beiden Pole für das anzuwendende Coordinatensystem vollständig bestimmt; wird derselbe dagegen nur von *einer* Kugelfläche begrenzt, so kann man von jenen beiden Polen den einen *willkürlich* wählen. Giebt man dem einen Pol eine *beliebige Lage*, so ergiebt sich für V ein Werth, welcher durch die dipolaren Coordinaten ausgedrückt ist; lässt man dagegen den einen Pol *in den Mittelpunkt,* oder lässt man ihn *auf die Oberfläche* der Kugel fallen, so erhält man im ersten Fall eine Bestimmung von V vermittelst der monopolaren, im letzteren Fall eine Bestimmung von V vermittelst der synpolaren Coordinaten.

Dass von den beiden zu Anfang erwähnten Problemen I. und II. das Wärmeproblem durch die eben ausgeführte Bestimmung von V unmittelbar seine Lösung findet, wird man sofort erkennen; dass aber auch das andere, nämlich das Elektricitätsproblem, auf die Bestimmung einer solchen Function V reducirt werden kann, bedarf wohl noch einer näheren Erörterung.

Der Einfachheit wegen, beschränke ich mich hierbei auf den Fall, dass der Körper, mit welchem wir es zu thun haben, aus zwei von einander getrennten (oder auch einander berührenden) Kugeln besteht. Jede dieser Kugeln ist mit einem gegebenen Quantum Elektricität geladen. Es handelt sich darum, die Vertheilung zu ermitteln, welche diese Elektricitätsmengen auf den Oberflächen der beiden Kugeln unter ihrer gegenseitigen Einwirkung sowie unter der Einwirkung gegebener unveränderlicher Kräfte annehmen.

Ich beginne damit, dass ich zuvörderst das Potential derjenigen Einwirkung berechne, welche nach Eintritt der eben erwähnten Gleichgewichtslage die auf *beiden* Kugelflächen vorhandenen elektrischen Belegungen zusammengenommen auf beliebige Punkte des Raumes ausüben werden. Der Werth dieses Potentiales wird für *jeden* der drei Räume, in welche der ganze unendliche Raum durch jene zwei Kugelflächen zerlegt wird, durch eine *andere* Function dargestellt werden. Der Werth des Potentiales für den Raum *ausserhalb* beider Kugeln mag mit V, der Werth desselben für den Raum *innerhalb* der *einen* Kugelfläche mag mit F, und der Werth desselben für den Raum *innerhalb* der *anderen* mit Φ bezeichnet werden.

Für das Potential V ergeben sich nun zunächst folgende Bedingungen. Bezeichnet P das Potential der gegebenen und unveränderlichen Kräfte, welche auf die Kugeln einwirken, so muss V eine stetige Function sein, welche in dem Raume ausserhalb der beiden Kugeln allenthalben der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet, welche ferner für die unendlich fernen Punkte dieses Raumes auf gewisse Weise gegen Null convergirt*), und welche endlich an der Oberfläche der einen Kugel der Relation $V+P=C$, an der Oberfläche der anderen Kugel der Relation $V+P=\Gamma$ Genüge leistet, wo C und Γ vor der Hand noch willkürliche Constanten vorstellen. Diese Bedingungen sind zur Bestimmung des Potentiales V vollständig ausreichend. In der That bemerkt man sofort, dass diese Bedingungen identisch sind mit denjenigen, welchen die im Vorhergehenden behandelte Function V genügen sollte. Man wird daher eine der beiden im Vorhergehenden angegebenen Methoden sofort benutzen können, um dieses Potential V zu berechnen.

Was ferner das Potential F anbelangt, so ist F eine stetige Function, welche innerhalb der ersten Kugel allenthalben der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0$$

genügen, und welche ausserdem an der Oberfläche dieser Kugel die Relation $F+P=C$ erfüllen muss. Analoge Bedingungen ergeben sich mit Bezug auf die zweite Kugel für das Potential Φ. Man sieht daher sofort, dass die Bestimmung dieser Functionen F und Φ keine Schwierigkeiten darbietet, dass nämlich die Werthe derselben vermittelst der bekannten *Laplace*schen Methode sofort berechnet werden können.

Jedoch sind auch hierbei die *neuen* Methoden, von denen oben die Rede war, nicht ohne Nutzen. Wollte man nämlich der *Laplace*schen Methode folgen, so würde man bei Berechnung von F und Φ verschiedene Coordinatensysteme zu Grunde legen müssen, indem man einmal den Mittelpunkt der einen, das andere Mal den der anderen Kugel zum Anfangspunkt nehmen müsste. Wendet man dagegen die zweite der beiden Methoden an, von welchen oben die Rede war, so kann man sich bei Bestimmung von F und Φ *ein und desselben* Coordinatensystemes, und zwar *eben desselben* Coordinatensystemes bedienen, welches bereits bei Berechnung des vorhin besprochenen Potentiales V angewendet werden muss; so dass man also alle drei Potentiale V, F und Φ unmittelbar als Functionen *ein und derselben* Coordinaten**) darstellen kann.

---

*) Für einen unendlich fernen Punkt muss der Werth von V gegen $\frac{\varkappa}{r}$ convergiren, wo r den Abstand jenes Punktes von irgend einem festen Punkte in der Endlichkeit, und $\varkappa$ eine beliebige Constante vorstellt.

**) Diese Coordinaten sind die dipolaren, wenn die beiden Kugeln von einander getrennt sind, hingegen die synpolaren, wenn dieselben einander berühren.

Sind V, F, Φ berechnet, so kann man dann bekanntlich die Dichtigkeiten der gesuchten elektrischen Belegungen der beiden Kugelflächen leicht durch gewisse Differentialquotienten dieser Potentiale darstellen. Bezeichnet man nämlich jene Dichtigkeit bei der einen Kugel mit E, bei der anderen mit H, so ist

$$4\pi E = \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r},$$

$$4\pi H = \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - \frac{\partial V}{\partial \varrho},$$

wo r den Radius der einen, ϱ den der anderen Kugel vorstellt.

Endlich werden dann die in diesen Ausdrücken für E und H noch enthaltenen willkürlichen Constanten C und Γ leicht der Art bestimmt werden können, dass die auf jeder Kugel vorhandene Elektricitätsmenge den für dieselben gegebenen Werth besitzt.

Man sieht aus dieser Darstellung, dass die von mir für die Lösung des Elektricitätsproblemes gegebene Methode nicht nur allgemeiner als die *Poisson*sche sondern auch bedeutend directer und einfacher als jene ist.

Halle, 1862.