Fourierreihe und Potenzreihe.

Von Leopold Fejér in Budapest.

Einleitung.

1. Es sei $F(\Theta)$ eine beliebige, reelle oder komplexe Funktion der reellen Veränderlichen Θ , die nach 2π periodisch und im Intervalle $0 \leq \Theta \leq 2\pi$ überall stetig ist.¹⁾ Dann heißt

$$p_0 + iq_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (p_n + iq_n) \cos n\Theta + (r_n + is_n) \sin n\Theta \right\} \quad (1)$$

die Fouriersche Reihe von $F(\Theta)$, wenn hier

$$\begin{aligned} p_0 + iq_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) dt, \\ p_n + iq_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \cos nt dt, \\ r_n + is_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \sin nt dt \\ (n &= 1, 2, 3, \dots \infty). \end{aligned}$$

In der Analysis sind die folgenden zwei speziellen Fälle besonders wichtig:

1. Fall. Die Koeffizienten

$$\begin{aligned} p_0 + iq_0, \quad p_1 + iq_1, \dots, \quad p_n + iq_n, \dots \\ r_1 + is_1, \dots, \quad r_n + is_n, \dots \end{aligned}$$

darstellenden Vektoren fallen alle auf dieselbe, durch den Koordinatenursprung gehende gerade Linie der komplexen Ebene. Wir können voraussetzen, daß diese gerade Linie die reelle Achse sei, so daß dann also

$$\begin{aligned} q_0 = q_1 = \dots = q_n = \dots = 0, \\ s_1 = \dots = s_n = \dots = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

¹⁾ Ich beschränke mich in dieser Note zumeist auf den Fall überall stetiger Funktionen der reellen Veränderlichen Θ , die nach 2π periodisch sind.

2. Fall. Die beiden Vektoren

$$p_n + i q_n, \quad r_n + i s_n$$

sind, für jedes einzelne n , einander gleich und stehen aufeinander senkrecht, d. h. genauer

$$r_n + i s_n = i(p_n + i q_n), \quad (n = 1, 2, \dots \infty). \quad (3)$$

(Der Vektor $r_n + i s_n$ entsteht also aus dem Vektor $p_n + i q_n$ durch eine, im positiven Sinne durchgeführten Drehung um den Ursprung, mit dem Winkel 90° .)

Im 1. Falle ist die Reihe (1) die gewöhnliche Fouriersche Reihe der reellen Funktionen $F(\theta)$ der reellen Veränderlichen θ , die nach 2π periodisch und überall stetig ist. Im 2. Falle haben wir es in der Reihe (1) mit einer Potenzreihe auf dem Einheitskreise $|z| = 1$ zu tun, die eine für $|z| \leq 1$ stetige und für $|z| < 1$ reguläre Funktion darstellt.

Im 1. Falle ist die Reihe

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n\theta + r_n \sin n\theta) r^n \quad (4)$$

eine reelle harmonische Reihe; sie stellt für $r < 1$ eine reguläre harmonische Funktion $u(r, \theta)$ dar, die für $\lim r = 1$ den für die ganze Peripherie des Einheitskreises gleichmäßigen Radiallimes $F(\theta)$ besitzt.

Im 2. Falle ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (p_n + i q_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (p_n + i q_n) r^n e^{ni\theta} \quad (5)$$

eine Potenzreihe der komplexen Veränderlichen $z = r e^{i\theta}$; sie stellt für $|z| < 1$ eine reguläre analytische Funktion $f(r e^{i\theta})$ dar, die für $\lim r = 1$ den für die ganze Peripherie des Einheitskreises gleichmäßigen Radiallimes $F(\theta)$ besitzt.

Im 1. Falle nenne ich die Reihe (1) kurz „gewöhnliche Fourierreihe“ oder noch kürzer „Fourierreihe“, im 2. Falle nenne ich sie „Potenzreihe auf dem Einheitskreise“ oder noch kürzer „Potenzreihe“.

2. Eine Reihe (1) kann nicht gleichzeitig zu diesen beiden Reihenklassen gehören, d. h., sie kann nicht gleichzeitig „Fourierreihe“ und „Potenzreihe“ sein, es sei denn, daß sie sich auf die reelle Konstante p_0 reduziert. Wenn wir also die reellen Konstanten nicht berücksichtigen, so haben wir es in den Fourierreihen und Potenzreihen mit zwei wesentlich getrennten Klassen von Reihen (1) zu tun.

Hingegen sei bemerkt, daß die reelle und die imaginäre Komponente einer Potenzreihe je eine Fourierreihe darstellt, die zueinander „konjugiert“ sind.

3. Eine ganze Menge von Konvergenz- und Summabilitätstheoremen, die sich auf die „Fourierreihe“ beziehen, lassen sich unmittelbar auf die „Potenzreihe auf dem Einheitskreise“ [ja überhaupt auf die allgemeinste Fourierreihe (1)] übertragen. Indessen gibt es wieder eine Menge von Fragen, die in beiden Theorien individuell behandelt werden müssen.

§ 1. Du Bois-Reymondsche und Lebesguesche Singularität bei der Fourierreihe und bei der Potenzreihe.

4. Bekanntlich gibt es reelle, überall stetige und nach 2π periodische Funktionen, deren Fourierreihe an einer Stelle oder an Stellen in endlicher Anzahl oder an unendlich vielen Stellen in abzählbarer Menge divergiert. (Du Bois-Reymondsche Singularität.)¹⁾ Daraus folgt aber, mit Rücksicht auf Nr. 2, noch nicht, daß es auch eine Potenzreihe gibt, die für $|z| \leq 1$ eine stetige, für $|z| < 1$ eine reguläre Funktion darstellt und die an einer Stelle oder an einer endlichen Anzahl von Stellen oder an abzählbar-unendlichvielen Stellen des Einheitskreises divergiert. Es mußte vielmehr ein besonderes, auf das Polynom

$$\frac{z}{n} + \frac{z^2}{n-1} + \dots + \frac{z^n}{1} - \frac{z^{n+1}}{1} - \frac{z^{n+2}}{2} - \dots - \frac{z^{2n}}{n}$$

gegründetes Konstruktionsverfahren angewendet werden, um zu beweisen, daß diese Singularität auch bei Potenzreihen auftreten kann.²⁾ (Dieses Verfahren führt übrigens auch bei der Fourierreihe zum Ziele.)

5. Bekanntlich gibt es überall stetige, nach 2π periodische reelle Funktionen, deren Fourierreihe zwar überall konvergiert, aber ungleichmäßig in jeder Umgebung einer Stelle. (Lebesguesche Singularität).³⁾ Es ist mir neuerdings gelungen zu beweisen — aber nur mit Anwendung meiner oben erwähnten und weiter ausgebauten Methode —, daß diese Erscheinung auch bei der Potenzreihe auf dem Einheitskreise vorkommen kann.⁴⁾ Es gibt also eine Potenzreihe, die auf der ganzen abgeschlossenen Scheibe des Einheitskreises, $|z| \leq 1$, ausnahmslos konvergiert, ohne auf derselben Scheibe gleichmäßig zu konvergieren, trotzdem die dargestellte Funktion auf der ganzen abgeschlossenen Scheibe $|z| \leq 1$ stetig ist.

¹⁾ S. z. B. meine zusammenfassende Arbeit: Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Tome 28, 3^e série, 1911, und meine nächstens erscheinende, am 3. Februar 1917 der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften vorgelegte Arbeit.

²⁾ Die ersten Beispiele solcher Potenzreihen habe ich in meiner Arbeit: „Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze“, Sitzgsber. der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math. Phys. Klasse, Jahrgang 1910, veröffentlicht. S., besonders auch i. B. auf die Verdichtung der Singularität, meine nächstens erscheinende Arbeit in den Münchener Sitzungsberichten.

³⁾ S. z. B. meine oben zitierte zusammenfassende französische Arbeit.

⁴⁾ Das erste Beispiel einer solchen Potenzreihe ist in meiner nächstens erscheinenden Arbeit in den Münchener Sitzungsberichten (1917) enthalten.

6. Zusammenfassend: Auf Grund der erwähnten Konstruktionsmethode läßt sich also feststellen, daß sowohl die du Bois-Reymond'sche als die Lebesguesche Singularität in beiden Reihenklassen des Nr. 1 auftreten können, d. h., sowohl bei den „Fourierreihen“ als bei den „Potenzreihen“ überall stetiger Funktionen.¹⁾

§ 2. Summabilität der Fourierreihe und der Potenzreihe.

7. Es sei

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu} + i b_{\nu}) r^{\nu} e^{i \nu \theta} \quad (6)$$

eine Potenzreihe, die eine für $|z| \leq 1$ stetige, für $|z| < 1$ reguläre Funktion darstellt. Dann kann es also vorkommen — ich habe es eben erwähnt —, daß die Folge der Partialsummen

$$s_0(z), \quad s_1(z), \quad s_2(z), \dots, s_n(z), \dots, \quad (7)$$

$$s_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n, \quad (8)$$

an unendlichvielen, den Einheitskreis überall dicht bedeckenden Stellen divergiert.

Hingegen konvergiert die Folge der arithmetischen Mittel

$$S_0(z), \quad S_1(z), \quad S_2(z), \dots, S_n(z), \dots, \quad (9)$$

$$S_n(z) = \frac{s_0(z) + s_1(z) + \dots + s_n(z)}{n+1}$$

auf dem ganzen Einheitskreise $|z| = 1$ gleichmäßig zur überall stetigen Randfunktion. Dieses Theorem gilt überhaupt für jede Reihe (1) und folgt unmittelbar aus dem entsprechenden Satze für die Fourierreihe einer reellen, nach 2π periodischen und überall stetigen Funktion.²⁾

Ich werde auf die Frage der Summabilität noch zurückkehren; besonders weil ich die so schöne Hardy-Littlewood'sche Ergänzung noch zur Sprache bringen möchte.

Jetzt wende ich mich zunächst zur Konvergenzfrage.

§ 3. Die Jordansche Längenbedingung und meine Flächenbedingung bei der Potenzreihe.

8. Es gibt einen sehr wichtigen Fall, in welchem die allgemeine Reihe (1) für $0 \leq \theta \leq 2\pi$ gleichmäßig konvergiert. Es ist dies der Jordansche Fall (der den klassischen Dirichletschen Fall

¹⁾ Ich verweise hier auf die durch Herrn Landau gegebene, äußerst geistreiche Bestimmung derjenigen Konstanten für die Potenzreihe, die den Lebesgueschen Konstanten der Fourierreihe entsprechen. (S. sein unten zitiertes Buch: Darstellung und Begründung etc., pag. 20—23.)

²⁾ S. meine Note: Sur les fonctions bornées et intégrables, Comptes-Rendus, 10 décembre 1900.

in sich enthält), in welchem die überall stetige Funktion $F(\theta)$ im Intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$ von beschränkter Schwankung ist, d. h., in welchem

$$|F(\theta_1) - F(\theta_2)| + |F(\theta_2) - F(\theta_3)| + \dots + |F(\theta_{r-1}) - F(\theta_r)| + |F(\theta_r) - F(\theta_1)| < K, \quad (10)$$

$$0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{r-1} < \theta_r < 2\pi,$$

d. h., beschränkt ist. Dieser Satz folgt z. B. bekanntlich, mit Rücksicht auf ein wichtiges **Hardysches** Konvergenzkriterium¹⁾, fast unmittelbar aus der gleichmäßigen Summabilität der Reihe (1) (von welcher in Nr. 7 die Rede war). Man hat nur zu zeigen, daß in diesem Falle daß n -te Glied der Reihe (1) absolut kleiner ist als $\frac{\text{const.}}{n}$. Zu diesem Zwecke genügt es zu beweisen, daß etwa

$$\left| \int_0^{2\pi} F(\theta) \sin n\theta d\theta \right| < \frac{\text{const.}}{n}, \quad (11)$$

was (ohne Hilfe des hier überflüssigen 2-ten Mittelwertsatzes) einfach so geschehen kann:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\theta) \sin n\theta d\theta &= \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{k\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} F(\theta) \sin n\theta d\theta = \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} (-1)^k F\left(t + k\frac{\pi}{n}\right) \sin nt dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ F(t) - F\left(t + \frac{\pi}{n}\right) + F\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) - F\left(t + \frac{3\pi}{n}\right) + \dots \right\} \sin nt dt, \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (10)

$$\left| \int_0^{2\pi} F(\theta) \sin n\theta d\theta \right| < K \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nt dt = \frac{2K}{n},$$

w. z. b. w.

¹⁾ **G. H. Hardy**: Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Vol. 8, 1909—1910. Das Kriterium lautet: Ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu}$ summabel, so ist sie auch konvergent, falls $|u_{\nu}| < \frac{\text{const.}}{\nu}$. (Entsprechende Aussage für die gleichmäßig summable Reihe.)

9. Es sei nun wieder

$$w = f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu} + i b_{\nu}) r^{\nu} e^{i\nu\theta} \quad (12)$$

eine Potenzreihe, die eine für $|z| \leq 1$ stetige und für $|z| < 1$ reguläre Funktion darstellt. Wende ich auf diese Reihe den **Jordanschen Satz** an (siehe Nr. 8), so erhalte ich: Die Potenzreihe (12) ist für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergent und hat die Summe $F(\theta)$, wenn die Randfunktion $F(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ von beschränkter Schwankung ist. Oder

geometrisch ausgedrückt: Die Potenzreihe (12) konvergiert gleichmäßig für $|z| = 1$, wenn die stetige Kurve C der w -Ebene, welche das Bild des Einheitskreises $z = e^{i\theta}$ vermöge der Abbildung $w = f(z)$ darstellt, eine endliche Bogenlänge besitzt. Mit Rücksicht auf diese geometrische Bedeutung der **Jordanschen Bedingung** kann man sie also wohl auch die „**Jordansche Längenbedingung**“ nennen.

Diesem **Jordanschen Satze** habe ich nun den folgenden Satz zur Seite gestellt¹⁾: Für die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihe (12) für $|z| = 1$ ist nicht nur hinreichend, daß die Bogenlänge der Bildkurve C des Kreises $|z| = 1$ endlich sei (**Jordansche Längenbedingung**), sondern es ist auch hinreichend, daß der innere Flächeninhalt der durch C begrenzten Fläche (d. h. der Bildfläche der Kreisfläche $|z| \leq 1$) endlich sei, wobei allerdings jeder Teil dieser Bildfläche in der w -Ebene, der vermöge der Abbildung eventuell mehrfach bedeckt ist, so oft in den Wert des inneren Flächeninhaltes aufzunehmen ist, als er bedeckt ist. Diese Bedingung kann ich wohl die „**Flächenbedingung**“ nennen.

Man kann diese Bedingung auch so formulieren: Der Flächeninhalt der Bildfläche des Kreises $|z| \leq r < 1$ in der w -Ebene (mehrfach bedeckte Teile mehrfach gezählt):

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} |f'(z)|^2 dx dy = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |c_{\nu}|^2 r^{2\nu} \quad (13)$$

(der mit r offenbar monoton wächst), sei für $0 \leq r < 1$ beschränkt.

Wir ersehen aus (13) unmittelbar, daß die Flächenbedingung mit folgender analytischer Bedingung (in den Koeffizienten) äquivalent ist: Die Reihe

$$\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |c_{\nu}|^2$$

¹⁾ Diesen Satz habe ich zum erstenmal in meiner Note: La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple, Comptes-Rendus, 6 janvier 1913, veröffentlicht. Eine weitere Ausführung meiner Untersuchungen befindet sich in meiner Arbeit in der Schwarz-Festschrift: Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene, 1914. Siehe auch E. Landau: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 1916, pag. 59, 60.

sei konvergent. (Es gibt keine ähnliche analytische Bedingung in den Koeffizienten, die mit der geometrischen Bedingung der Endlichkeit der Bogenlänge äquivalent wäre.)

10. Daß die Flächenbedingung wirklich wesentlich weiter reichen kann als die Jordansche Längenbedingung, ergibt sich schon im einfachsten Falle: in welchem die Abbildung (12) schlicht ist. Da in diesem Falle der innere Flächeninhalt des Bildes von $|z| \leq 1$ (wegen Einfachheit der Bedeckung) gewiß endlich ist, also ist die Flächenbedingung erfüllt, woraus auf die gleichmäßige Konvergenz der abbildenden Reihe (12) für $|z| = 1$ geschlossen werden kann.

Man nehme nun (um einen besonders krassen Extremfall zu betrachten) eine Osgoodsche Jordan-Kurve¹⁾ in der w -Ebene und

$$w = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots \quad (12')$$

liefere eine gewöhnliche (schlichte) konforme Abbildung von $|z| < 1$ auf das Innere dieser Kurve. Diese Osgoodsche Kurve hat keine bestimmte, endliche Bogenlänge. Also ist der Jordansche Satz auf (12') nicht anwendbar. Ja sie begrenzt auch keinen bestimmten Flächeninhalt in der w -Ebene (das ist eben das Besondere an diesen Jordan-Kurven von Osgood); ihr innerer Flächeninhalt ist nämlich kleiner als ihr äußerer Flächeninhalt. Indessen ist der innere Flächeninhalt doch endlich (der äußere ist es übrigens auch), also ist die abbildende Reihe (12') für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergent — auf Grund meiner Flächenbedingung.

Ob es nicht auch Fälle gibt, in welchen wieder die Jordansche Längenbedingung weiter reicht als die Flächenbedingung, konnte ich zunächst nicht entscheiden. Es ist klar, daß im Falle schlichter Abbildung das Erfülltsein der Längenbedingung das der Flächenbedingung immer nach sich zieht.

Wie steht es aber im allgemeinen Falle?

Ich hatte die Vermutung ausgesprochen, daß meine Flächenbedingung allemal erfüllt ist, wenn die Jordansche Längenbedingung erfüllt ist, d. h. daß die Flächenbedingung eine Verallgemeinerung der Jordanschen Längenbedingung darstellt. Geometrisch ausgedrückt: Ich habe vermutet, daß aus der Endlichkeit der Bogenlänge des Bildes von $|z| = 1$ auch die Endlichkeit des umgrenzten Flächeninhaltes folgt — trotz der mehrfachen Bedeckungen. Einem meiner Schüler, Herrn Paul Csillag, ist es nun in der Tat gelungen, für diese Vermutung einen eleganten Beweis zu liefern.

Auf Grund des Vorhergehenden kann ich also zusammenfassend sagen:

Stellt die für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$w = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

¹⁾ Osgood: „A Jordan curve of positive area,“ Transactions Amer. Math. Soc., Bd. 4 (1903).

eine für $|z| \leq 1$ stetige Funktion dar, so ist sie am Einheitskreise gleichmäßig konvergent, wenn die Flächenbedingung erfüllt ist.

Die Flächenbedingung ist immer erfüllt, wenn es die Jordansche Längenbedingung ist, das Umgekehrte findet aber schon im Falle der schlichten Abbildung nicht notwendigerweise statt.

Die Flächenbedingung ist also eine weitgehende Verallgemeinerung der Jordanschen Längenbedingung.

11. Ich möchte von einer für $|z| < 1$ regulären Funktion $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_n z^n + \dots$$

sagen, daß sie im Kreise $|z| < 1$ von beschränkter Schwankung ist, wenn, trotz eventueller mehrfacher Bedeckungen in der Abbildung, der Flächeninhalt des Bildes von $|z| \leq r$:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} |f'(z)|^2 dx dy = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |\gamma_{\nu}|^2 r^{2\nu}$$

für $0 \leq r < 1$ beschränkt ist; analytisch: wenn $\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |\gamma_{\nu}|^2$ konvergent ist. (Die Analogie mit dem Falle der reellen Kurve $y=f(x)$, die im Intervalle $a \leq x \leq b$ von beschränkter Schwankung ist, ist eine ziemlich weitgehende.)

Dann kann ich also das obige Theorem schließlich auch so formulieren:

Stellt die Potenzreihe

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

eine für $|z| \leq 1$ stetige und für $|z| < 1$ reguläre Funktion dar, so ist sie für $|z| = 1$ nicht nur dann gleichmäßig konvergent, wenn ihre Randfunktion für $|z| = 1$ von beschränkter Schwankung ist, sondern — allgemeiner — auch immer dann, wenn die Funktion $\varphi(z)$ für $|z| < 1$ von beschränkter Schwankung ist.

§ 4. Der Hardy-Littlewoodsche Satz für die Potenzreihe.

12. Es sei $F(\theta)$ eine reelle, überall stetige und nach 2π periodische Funktion der reellen Veränderlichen θ . Bezeichnen

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \quad (14)$$

die Partialsummen der Fourierreihe von $F(\theta)$ an irgend einer Stelle θ , so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = F(\theta), \quad (15)$$

oder, wenn wir den Funktionswert $F(\theta)$ mit s bezeichnen,

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = s.$$

Statt (15) kann ich auch schreiben:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \dots + (s_n - s)}{n+1} = 0. \quad (16)$$

Nenne ich $(s_k - s)$ den „Fehler“ der k -ten Partialsumme s_k , so besagt also das Theorem (15), daß das arithmetische Mittel der ersten $(n+1)$ Fehler mit unendlich wachsendem n zu 0 konvergiert.

Die Herren Hardy und Littlewood haben nun den sehr interessanten Satz bewiesen¹⁾, daß auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{|s_0 - s| + |s_1 - s| + \dots + |s_n - s|}{n+1} = 0 \quad (17)$$

ist und daß sogar auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{|s_0 - s|^2 + |s_1 - s|^2 + \dots + |s_n - s|^2}{n+1} = 0. \quad (18)$$

[(18) besagt noch mehr als (17), denn es ist stets

$$\sqrt{\frac{|s_0 - s|^2 + \dots + |s_n - s|^2}{n+1}} \geq \frac{|s_0 - s| + \dots + |s_n - s|}{n+1}, \quad (19)$$

weil doch immer

$$\sqrt{\frac{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2}{n+1}} \geq \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n+1} \quad (20)$$

ist, wenn $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ nichtnegative Zahlen bedeuten.]

13. Es sei nun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (21)$$

¹⁾ G. H. Hardy et I. E. Littlewood: Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, Comptes-Rendus, 28 avril 1913. Die Bedingungen, unter denen die Autoren das Bestehen der Gl. (18) beweisen, sind viel allgemeiner als die des Textes. — Die ausführliche Darstellung des Beweises des allgemeinen Hardy-Littlewoodschen Theorems befindet sich in der Arbeit des Herrn M. Fekete: „Vizsgálatok a Fourier-sorokról“, Math. és Term. Értesítő, Budapest, 1916. Diese Arbeit enthält u. a. auch interessante Anwendungen des Hardy-Littlewoodschen Theorems.

eine Potenzreihe, die eine für $|z| \leq 1$ stetige und für $|z| < 1$ reguläre Funktion darstellt. Es sei z eine Stelle des Einheitskreises und

$$s_0, s_1, s_2 \dots s_n, \dots \quad (22)$$

die Folge der Partialsummen der Potenzreihe (21) an der Stelle z . Es sei s der Wert der Randfunktion an dieser Stelle z . Dann folgt aus dem Hardy-Littlewood'schen Satze unmittelbar, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_0 - s|^2 + |s_1 - s|^2 + \dots + |s_n - s|^2}{n + 1} = 0. \quad (23)$$

Umgekehrt enthält dieses Theorem für die Potenzreihe nicht den Hardy-Littlewood'schen Satz über die Fourierreihe.

14. In dieser Nummer möchte ich nun zeigen, daß das Hardy-Littlewood'sche Theorem über die Potenzreihe sich besonders einfach beweisen läßt. Der Weg, den ich gehe, weicht nur sehr wenig von dem ihrigen ab, führt aber hier (im speziellen Falle der Potenzreihe) durch eine einmalige Integration zum Ziele.

Ich kann $z = 1$ voraussetzen. Von der Funktion $f(z)$ will ich bloß voraussetzen, daß sie an der Stelle $z = 1$ stetig ist und daß

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta, \quad 0 \leq r < 1 \quad (24)$$

für $0 \leq r < 1$ beschränkt ist. (Das entspricht den Bedingungen der Herren Hardy und Littlewood.) Daß die Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = 1$ stetig ist und dort den Grenzwert s besitzt, darunter verstehe ich folgendes:

Zu einer beliebig kleinen positiven Zahl δ lassen sich positive Zahlen η, ε finden, so daß

$$|f(re^{i\theta}) - s| < \delta, \quad (25)$$

wenn

$$1 - \eta \leq r < 1, \quad -\varepsilon \leq \theta \leq \varepsilon. \quad (26)$$

Ich kann $s = 0$ voraussetzen. Die Behauptung lautet dann: Ist

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots \quad (27)$$

für $|z| < 1$ konvergent und ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < G, \quad (28)$$

also für $0 \leq r < 1$ beschränkt, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_0|^2 + |s_1|^2 + \dots + |s_n|^2}{n + 1} = 0, \quad (29)$$

wenn $f(z)$ für $z = 1$ stetig ist und da den Grenzwert 0 besitzt. Hier bedeutet $s_r = c_0 + c_1 + \dots + c_r$.

Beweis. Es ist für $|z| < 1$

$$\frac{f(z)}{1-z} = s_0 + s_1 z + \dots + s_n z^n + \dots, \quad (30)$$

also ist nach der auf die Potenzreihe bezüglichen Parsevalschen Formel ¹⁾

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{f(z)}{1-z} \right|^2 d\theta = |s_0|^2 + |s_1|^2 r^2 + \dots + |s_n|^2 r^{2n} + \dots, \quad (31)$$

$$z = r e^{i\theta}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Ich behaupte nun zunächst, daß

$$\lim_{r=1} (1-r^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{f(z)}{1-z} \right|^2 d\theta = 0. \quad (32)$$

Es sei nämlich δ eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl; dann gibt es nach Voraussetzung positive Zahlen η und ε , so daß

$$|f(z)| = |f(r e^{i\theta})| < \delta, \quad (33)$$

wenn

$$1 - \eta \leq r < 1, \quad -\varepsilon \leq \theta \leq \varepsilon. \quad (34)$$

r bewege sich von nun ab im Intervalle (34). Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{f(z)}{1-z} \right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} \dots + \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \dots + \frac{1}{2\pi} \int_{+\varepsilon}^{\pi} \dots = \\ &= A(r) + B(r) + C(r). \end{aligned} \quad (35)$$

Hier ist

$$A(r) \leq \frac{1}{\sin^2 \varepsilon} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} |f(z)|^2 d\theta < \frac{1}{\sin^2 \varepsilon} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(z)|^2 d\theta < \frac{G}{\sin^2 \varepsilon} \quad (36)$$

und ähnlich

$$C(r) < \frac{G}{\sin^2 \varepsilon}. \quad (37)$$

$$1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(r e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{\nu}|^2 r^{2\nu}, \quad 0 \leq r < 1,$$

wenn $\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu} z^{\nu}$ für $|z| < 1$ konvergiert.

Weiter ist

$$\begin{aligned} B(r) &\leq \delta^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left| \frac{1}{1-z} \right|^2 d\Theta \leq \delta^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{1}{1-z} \right|^2 d\Theta = \\ &= \delta^2 (1 + r^2 + \dots + r^{2n} + \dots) = \frac{\delta^2}{1-r^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Also ist für $1 - \eta \leq r < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{f(z)}{1-z} \right|^2 d\Theta < \frac{2G}{\sin^2 \varepsilon} + \frac{\delta^2}{1-r^2},$$

d. h.,

$$(1-r^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{f(z)}{1-z} \right|^2 d\Theta < (1-r^2) \cdot \frac{2G}{\sin^2 \varepsilon} + \delta^2,$$

also

$$(1-r^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{f(z)}{1-z} \right|^2 d\Theta < 2\delta^2,$$

wenn nur r genügend wenig von 1 abweicht, womit (32) bewiesen ist.¹⁾

Ich habe also gezeigt, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r^2) (|s_0|^2 + |s_1|^2 r^2 + \dots + |s_n|^2 r^{2n} + \dots) = 0 \quad (39)$$

oder wenn ich ρ statt r^2 setze

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} (1-\rho) \sum_{\nu=0}^{\infty} |s_\nu|^2 \rho^\nu = 0. \quad (40)$$

Hieraus folgt sofort die zu beweisende Gleichung (29). Setze ich nämlich in (40) $1 - \frac{1}{n+1}$ statt ρ (Tauber'scher Kunstgriff), so erhalte ich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} |s_\nu|^2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^\nu = 0,$$

¹⁾ Da

$$(1-r^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{f(z)}{1-z} \right|^2 d\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| f(re^{i\Theta}) \right|^2 \frac{1-r^2}{1-2r \cos \Theta + r^2} d\Theta,$$

also drückt die Gleichung (32), im Grunde genommen, den etwas modifizierten „Schwarz'schen Satz über das Poisson'sche Integral“ aus. (Die Modifikation besteht darin, daß hier im Integrale keine feste, von dem Parameter r unabhängige, sondern eine von diesem abhängige Funktion $|f(re^{i\Theta})|^2$ steht.)

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n |s_\nu|^2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\nu = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{\sum_{\nu=0}^n |s_\nu|^2}{n+1} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^n |s_\nu|^2}{n+1} = 0,$$

womit (29) erwiesen ist.¹⁾

¹⁾ Eine Anwendung des **Hardy-Littlewoodschen** Satzes:

Herr **Pringsheim** hat in seiner Arbeit „Über die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze“ (Münchener Sitzungsberichte, Bd. XXXI, 1901) unter anderen die Frage gestellt, ob die Summe der für $|z| < 1$ konvergenten Potenzreihe

$$(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{1} +$$

$$+ \frac{z^3}{4} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{4} + \frac{z^6}{4} - \frac{z^7}{4} - \frac{z^8}{4} - \frac{z^9}{4} - \frac{z^{10}}{4} +$$

$$+ \frac{z^{11}}{9} + \frac{z^{12}}{9} + \dots + \frac{z^{19}}{9} - \frac{z^{20}}{9} - \frac{z^{21}}{9} - \dots - \frac{z^{28}}{9} +$$

$$+ \frac{z^{29}}{16} + \frac{z^{30}}{16} + \dots + \frac{z^{44}}{16} - \frac{z^{45}}{16} - \dots - \frac{z^{50}}{16} +$$

.....

in abgeschlossenen Einheitskreise $|z| \leq 1$ ausnahmslos stetig ist oder nicht?

Die Antwort lautet: sie ist für $|z| \leq 1$ nicht überall stetig. Würde sie es sein, so muß nach meinem Satze, für $z = 1$, zunächst

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

existieren. Dieser Limes existiert, wie Herr **Pringsheim** bewiesen hat, in der Tat und ist gleich $\frac{1}{2}$.

Nach dem **Hardy-Littlewood-schen** Satze müßte aber noch weiter

$$\lim_{n=\infty} \frac{|s_1 - \frac{1}{2}| + \dots + |s_n - \frac{1}{2}|}{n} = 0$$

ausfallen, was aber, wie leicht einzusehen, nicht stattfindet.

Also ist die Funktion $f(z)$ für $|z| \leq 1$ irgendwo unstetig. (Es ist sehr leicht zu beweisen, wie auch Herr **Pringsheim** hervorhebt, daß $f(z)$ gewiß stetig ist an jeder Stelle von $|z| \leq 1$, mit eventueller Ausnahme von $z = 1$. Also ist $z = 1$ die einzige Unstetigkeitsstelle von $f(z)$ für $|z| \leq 1$.)