Über die Orte der Punkte, aus welchen ein Kreis durch spezielle Kegel projiziert wird.

Von L. Klug in Klausenburg.

1. Legt man durch einen Kreis k den Rotationszylinder und die Kugel, von welcher k ein Hauptkreis ist, so wird bekanntlich k aus den Punkten des Zylinders mittels orthogonaler Kegel, und aus den Punkten der Kugel mittels Pappusscher Kegel projiziert. Wir suchen im folgenden den Ort der Punkte, aus welchen der Kreis durch andere spezielle Kegel projiziert wird.

2. Schreibt man dem Kreise k das spitzwinklige Dreieck ABC ein und legt durch die Seiten derselben die Flächen eines orthogonalen Dreikantes, so fällt die orthogonale Projektion der Spitze M desselben in den Höhenpunkt H des Dreieckes. Die Höhe CH trifft den Kreis in dem zu H in bezug auf die Seite AB symmetrischen Punkte E . Bezeichnet man mit N einen Treffpunkt der Geraden MH und derjenigen Kugel, von welcher k ein Hauptkreis ist, und mit D den Treffpunkt der Geraden CE , AB , so ist da $HE = 2HD$ wegen der rechtwinkligen Dreiecke CNE , CMD

$$\overline{HN}^2 : \overline{HM}^2 = CH : HE : CH : HD = 2 : 1.$$

Man erhält daher den Punkt M auf der zur Kreisebene senkrechten halben Sehne NH der Kugel, indem man diese im Verhältnis von $\sqrt{2}:1$ verkürzt. Nun wird k aus dem Punkte M durch einen solchen Kegel $M.k$ projiziert, in welchen man ein, daher unendlich viele orthogonale Dreikante einschreiben kann; also ist $M.k$ ein gleichseitiger Kegel. Daraus folgt:

Der Ort der Punkte, aus welchen der Kreis k vom Radius r durch gleichseitige Kegel projiziert wird, ist ein Sphäroid (Rotationsellipsoid); der Äquator desselben ist k und seine Rotationsachse ist gleich $r:\sqrt{2}$.

3. Es sei jetzt $A_1A_2A_3$ ein dem Kreise k umschriebenes spitzwinkliges Dreieck und M die Spitze eines der orthogonalen Dreikante, welche jenes Dreieck projizieren. Bezeichnet man mit α_i den Winkel, welchen die Kante MA_i mit der Kreisebene bildet, mit K_i die orthogonale Projektion des Kreismittelpunk-

tes K auf jene Kante und mit r den Radius des Kreises, so ist $r \cos a_i = MK_i$ und

$$\overline{MK}^2 = \overline{MK}_1^2 + \overline{MK}_2^2 + \overline{MK}_3^2 = r^2 (\cos^2 a_1 + \cos^2 a_2 + \cos^2 a_3) = 2r^2,$$

d. h. M hat den Abstand $r\sqrt{2}$ von K .

Nun wird k aus dem Punkte M durch einen Kegel $M.k$ projiziert, um welchen man ein und daher unendlich viele orthogonale Dreikante umschreiben kann; $M.k$ ist daher der reziproke des gleichseitigen Kegels. Wir haben also:

Der Ort der Punkte, aus welchen der Kreis k vom Radius r durch Kegel projiziert wird, welche dem gleichseitigen reziprok sind, ist eine mit k konzentrische Kugel vom Radius $r\sqrt{2}$.

Anmerkung. Betrachtet man k als ein unendlich dünnes Ellipsoid, so ist jene Kugel die sogenannte Mongesche Kugel dieses Ellipsoids, welche die Eigenschaft hat, daß man aus ihren Punkten orthogonale Dreikante zum Ellipsoid legen kann.

4. Wir nehmen zwei Kreise k und l an, welche sich im Punkte A berühren und deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen und legen durch dieselben den Kegel, dessen Spitze M sei. Bezeichnen B und C die zweiten Endpunkte der durch A gehenden Diameter der Kreise k und l , so sind wegen der antiparallelen Kreisschnitte des Kegels die Winkel MBA , MAC gleich. Verändert man daher der Größe nach den Diameter AC von l , während A fest bleibt, so beschreiben die Strahlen BM , AM zwei gleiche sich entgegengesetzt drehende Strahlenbüschel um B und A , und M beschreibt in der Ebene ABC eine gleichseitige Hyperbel, von welcher AB die reelle Achse ist. Aus den Punkten dieser Hyperbel wird also der feste Kreis k durch solche Kegel projiziert, deren zyklische Ebenen orthogonal sind und die man daher orthozyklisch nennen kann. Also:

Der Ort der Punkte, aus welchen der Kreis k durch orthozyklische Kegel projiziert wird, ist ein Rotationshyperboloid; die Meridiane derselben sind gleichseitige Hyperbeln und sein Kehlkreis ist k selbst.

5. Der reziproke Kegel des Pappusschen ist der Hachettesche. Derselbe hat die Eigenschaft, daß die Polarebene eines Fokalstrahles senkrecht steht auf dem anderen Fokalstrahl. Gestützt auf diese Eigenschaft, wollen wir durch den Kreis k vom Radius r einen Hachetteschen Kegel legen.

Es seien $KFHG$ die Eckpunkte, O der Mittelpunkt eines innerhalb k liegenden Quadrates, dessen Eckpunkt K im Mittelpunkt von k ist. Die Polare von F treffe die Seiten KF , GH und die Diagonale KH des Quadrates in den Punkten E , I und J ; die Seite FH treffe den Kreis im Punkte L , und die mit FL

gleiche Strecke HM stehe im Punkte H senkrecht zur Kreisebene. Da

$$\overline{HM}^2 = \overline{FL}^2 = KF \cdot FE = OH \cdot HJ$$

ist, so bilden die Geraden MO , MJ und die Ebenen MFO , MFJ rechte Winkel; da ferner die konjugierten Polarpaare FK , FH ; EO , FJ aus der Geraden MF durch rechtwinklige Ebenenpaare projiziert werden, so ist die Gerade MF ein Fokalstrahl desjenigen Kegels $M.k$, welcher den Kreis k aus dem Punkte M projiziert. Da nun der andere Fokalstrahl MG dieses Kegel wegen $HM^2 = KF \cdot FE = GH \cdot HI$ auf die Polarebene MEF des ersteren Fokalstrahles senkrecht steht, so ist $M.k$ ein Hachettescher Kegel.

Dreht man den Kreis k um 90° um die KF und projiziert ihn dann mit zu FH parallelen Strahlen auf die Ebene KHM , so bildet diese Projektion den Ort der Punkte M in dieser Ebene. Daraus folgt:

Der Ort der Punkte, aus welchen ein Kreis k durch Hachettesche Kegel projiziert wird, ist ein Sphäroid; seine Rotationsachse ist gleich dem Durchmesser des Kreises k und sein Fokalkreis ist k .

6. Suchen wir jetzt den Ort der Punkte, aus welchen k durch Kegel mit orthogonalen Fokalstrahlen (orthofokale Kegel) projiziert wird.

Es sei J ein in der Kreisebene α liegender Punkt, welcher vom Kreismittelpunkte K einen solchen Abstand hat, wie die Seite eines dem Kreise einbeschriebenen Quadrates. Dann halbiert die Polare FF' von J in bezug auf k im Schnittpunkte G die Strecke KJ . Wir beschreiben über GJ als Durchmesser einen Kreis l , dessen Ebene auf α senkrecht steht, nehmen auf l einen Punkt M und auf die Polare die Punkte FF' so an, daß $GM = GF = F'G$ sei und bezeichnen die orthogonale Projektion von M auf GJ mit H . Da

$$\overline{GF}^2 = \overline{GM}^2 = GH \cdot GJ = GH \cdot KG$$

ist, so ist der Winkel KFH ein rechter, und es werden daher aus M die konjugierten Polarpaare FK , FH ; FG , FJ durch orthogonale Ebenenpaare und also k durch einen Kegel $M.k$ projiziert, von welchem MF , MF' Fokalstrahlen sind. Diese Fokalstrahlen stehen aber senkrecht aufeinander, daher ist $M.k$ ein orthofokaler Kegel.

Da man nun den Punkt M auf dem Kreis l beliebig annehmen und diesen Kreis um die zur Ebene α im Mittelpunkte K senkrecht stehende Achse drehen kann, so folgt:

Der Ort der Punkte, aus welchen ein Kreis k vom Radius r durch orthofokale Kegel projiziert wird, ist eine Ringfläche; der Äquator und der Kehlkreis desselben ist mit k konzentrisch und liegt in

der Kreisebene und die Radien dieser Kreise sind $r\sqrt{2}$ und $r:\sqrt{2}$.

Anmerkung. Bilden die Fokalstrahlen statt einen Winkel von 2φ , so übergeht jene Ringfläche in eine andere. Der Radius des Kehlkreises und des Äquators derselben ist $r \sin \varphi$, bzw. $r : \sin \varphi$.

7. Der reziproke Kegel des orthogonalen hat die Eigenschaft, daß ihn die zu den Fokalstrahlen senkrechten Ebenen in Parabeln schneiden. Da sich daraus viele Eigenschaften der Parabel auf den Kegel übertragen lassen, so wollen wir ihn parabolischen Kegel nennen.

Um nun den Ort zu finden, aus dessen Punkten der Kreis k durch parabolische Kegel projiziert wird, sei EF die Polare eines außerhalb k liegenden Punktes J , welcher den Kreis k vom Mittelpunkte K in einem E Punkte treffe. Ferner sei $KF \perp EK$ und G der Treffpunkt von EF , KJ ; der Punkt H sei auf KJ so gelegen, daß $FH \perp KF$; der Punkt M auf der zur Kreisebene im Punkte H senkrecht stehenden Geraden so angenommen, daß $KG = GM$; schließlich sei $\sphericalangle MKJ = 2\varphi$, also $MGJ = 2\varphi$.

Da infolge der ähnlichen Dreiecke HFK , KEJ

$$HG:GK = GK:GJ,$$

also $HG \cdot GJ = \overline{GM}^2$ ist, so stehen die Geraden GM , MJ , wie auch die Ebenen MGF , MJF senkrecht aufeinander, und es werden daher die konjugierten Polarpaare KF , FH ; GF , FJ aus dem Punkte M durch orthogonale Ebenenpaare projiziert. Da ferner die Geraden FM zur Kreistangente EJ und zur Geraden ME senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht zur Ebene MEJ . Daraus folgt, daß der den Kreis aus dem Punkte M projizierende Kegel $M.k$ ein parabolischer ist, da sein Fokalstrahl FM zur Tangentialebene MEJ des Kegels senkrecht steht.

Um nun den Ort der Punkte M in der Ebene KMJ zu finden, wenn sich J auf dem Kreisdurchmesser bewegt, beachte man, daß infolge der kongruenten Dreiecke EKF , EMF

$$\overline{KM}^2 = 2 \cdot \overline{KF}^2,$$

ferner

$$\frac{\overline{KF}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{\overline{HF}^2}{\overline{KF}^2} = \frac{HG}{GK} = \frac{HG}{MG} = \cos 2\varphi,$$

woraus

$$\overline{KM}^2 = 2 \cdot \overline{KE}^2 \cdot \cos 2\varphi.$$

Das ist aber die Polargleichung einer Lemniscate, deren Brennpunkte die Endpunkte des Kreisdurchmessers KJ sind. Wir haben daher:

Der Ort der Punkte, aus welchen der Kreis k durch parabolische Kegel (dem orthogonalen reziproken Kegel) projiziert wird, ist eine Rotationsfläche; die Meridiane derselben sind schlichte Lemniscaten, deren Brennpunkte in den Endpunkten der Kreisdurchmesser liegen.