

## Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen.

Von

E. NETTO in Giessen.

---

### § 1.

Ist eine irreductible Gleichung  $f(x) = 0$  mit den Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vorgelegt, und stehen zwei ihrer Wurzeln  $x_1$  und  $x_2$  durch die Gleichung

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

mit einander in Verbindung, wobei  $\varphi$  eine rationale Function bedeutet, dann wird im Allgemeinen auch diejenige Gleichung  $g(y) = 0$ , deren Wurzeln

$$y_1 = P(x_1), y_2 = P(x_2), \dots, y_n = P(x_n)$$

sind, denselben Charakter besitzen, falls  $P$  eine rationale Function ist. Gehören nämlich  $x_1$  und  $P(x_1)$  zu derselben Substitutionengruppe, dann kann auch  $x_1$  rational durch  $P(x_1)$  dargestellt werden, etwa in der Form

$$x_1 = P_1(P(x_1)) = P_1(y_1),$$

und es wird folglich

$$y_2 = P(x_2) = P(\varphi(x_1)) = P(\varphi[P_1(y_1)]) = Q(y_1).$$

Gehört hingegen  $P(x_1)$  nur zu einer Untergruppe der Gruppe für  $x_1$ , dann braucht die betrachtete Eigenschaft nicht mehr zu gelten.

Diese Eigenschaft bleibt aber stets gewahrt, sobald  $f(x) = 0$  eine Abel'sche Gleichung ist, wie  $P$  auch gewählt sein möge. In diesem Falle sind nämlich die Substitutionen der Gruppe von  $f(x) = 0$  sämmtlich unter einander vertauschbar. Daraus folgt, dass jede Untergruppe einer Abel'schen Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe derselben ist. Denn man hat  $s_i^{-1}s_i s_i = s_i s_i^{-1} s_i = s_i$ , und deswegen findet die Transformation  $s_i^{-1} \Gamma s_i = \Gamma$  auch für jede Untergruppe  $\Gamma$  der Abel'schen Gruppe statt. Demnach gehören die conjugirten Werthe  $P(x_1), P(x_2), \dots$  zu derselben Gruppe, d. h.  $P(x_2)$  ist rational durch  $P(x_1)$  darstellbar.

Man kann aber noch weiter nachweisen, dass auch  $g(y) = 0$  eine Abel'sche Gleichung wird. Das zeigt sich bei der Herstellung der

Gruppe  $H$  von  $g(y) = 0$ . Diese findet man, indem man auf die Reihe  $P(x_1), P(x_2), \dots$  die Substitutionen von  $G$ , der Gruppe von  $f(x) = 0$ , anwendet und die entstehenden Umstellungen als Substitutionen unter den  $y$  deutet; wir können sie also durch

$$t_i = |P(x_\mu) P(x_{i_\mu})| = |y_\mu y_{i_\mu}| \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

darstellen. Dann entsprechen den Substitutionen  $s$  von  $G$  eindeutig die Substitutionen  $t$  von  $H$ , und da jene unter einander vertauschbar sind, so werden es auch diese sein, d. h.  $g(y) = 0$  ist eine Abel'sche Gleichung.

§ 2.

Es bedeute wieder  $\varphi(x)$  eine rationale Function von  $x$ , und es werde

$$\varphi(\varphi(x)) = \varphi_2(x), \quad \varphi(\varphi_2(x)) = \varphi_3(x), \dots$$

gesetzt. Wenn nun  $f(x) = 0$  eine irreductible Gleichung darstellt, deren Wurzeln sich in das Schema

$$x_1, \varphi(x_1), \varphi_2(x_1), \varphi_3(x_1), \dots, \varphi_{n-1}(x_1); \quad (\varphi_n(x_1) = x_1),$$

$$x_2, \varphi(x_2), \varphi_2(x_2), \varphi_3(x_2), \dots, \varphi_{n-1}(x_2); \quad (\varphi_n(x_2) = x_2),$$

. . . . .

einordnen lassen, dann kann man zunächst in bekannter Weise  $\varphi(x)$  zu einer ganzen Function von  $x$  machen, deren Grad geringer ist, als der Grad  $n$  der Gleichung  $f(x) = 0$ . Man kann also setzen

$$\varphi(x) = d_0 x^\alpha + d_1 x^{\alpha-1} + d_2 x^{\alpha-2} + \dots \quad (\alpha \leq n - 1).$$

Nach § 1 hat die Gleichung  $g(y) = 0$ , deren Wurzeln mit den  $x_i$  durch

$$y_i = \mu x_i + \nu, \quad x_i = \frac{y_i - \nu}{\mu} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

verbunden sind, neben  $y_1$  noch ein  $y_1' = \psi(y_1)$  zur Wurzel. Nun ist

$$\begin{aligned} y_1' &= \mu x_1' + \nu = \mu \varphi(x_1) + \nu = \mu \left[ d_0 \left( \frac{y_1 - \nu}{\mu} \right)^\alpha + d_1 \left( \frac{y_1 - \nu}{\mu} \right)^{\alpha-1} + \dots \right] + \nu \\ &= \frac{d_0}{\mu^{\alpha-1}} y_1^\alpha + \frac{\mu d_1 - \alpha \nu d_0}{\mu^{\alpha-1}} y_1^{\alpha-1} + \dots, \end{aligned}$$

und man kann folglich über  $\mu$  und  $\nu$  stets so verfügen, dass

$$y_1' = y_1^\alpha + e_2 y_1^{\alpha-2} + e_3 y_1^{\alpha-3} + \dots = \psi(y_1)$$

wird. Gleichzeitig folgt aus

$$\varphi_n(x_1) = x_1,$$

dass auch

$$\psi_n(y_1) = y_1$$

wird, und man kann somit die Wurzeln  $y_i$  von  $g(y) = 0$  in das Schema



gegeben ist, erscheint als recht complicirt, und selbst in den einfachsten Fällen dürfte die angegebene Methode kaum durchführbar sein. Es sollen deswegen bequemere Wege für die Lösung unserer Aufgabe angegeben werden.

## § 4.

Bilden wir in unserer irreductiblen Gleichung durch Iterirung

$$\varphi(x_1), \varphi_2(x_1), \varphi_3(x_1), \dots,$$

so tritt hierin eine erste Function  $\varphi_*(x_1)$  auf, welche wieder gleich  $x_1$  ist. Die Beziehung

$$\varphi_*(x_1) - x_1 = 0$$

gilt dann für jede Wurzel unserer irreductiblen Gleichung  $f = 0$ . Folglich ist die linke Seite durch  $f(x)$  theilbar, d. h.

$$\frac{\varphi_*(x) - x}{f(x)} = Q(x)$$

wird eine ganze Function

Umgekehrt setzen wir irgend einen Theiler  $Q_1(x)$  von  $\varphi_*(x) - x$  gleich Null und benennen mit  $x'$  eine seiner Wurzeln. Dann können zwei Fälle eintreten; entweder hat  $Q_1 = 0$  ausser  $x'$  noch eine andere, von  $x'$  verschiedene Wurzel der Reihe

$$x', \varphi(x'), \varphi_2(x'), \dots;$$

oder es giebt neben  $Q_1(x)$  noch andere Factoren  $Q_2(x), Q_3(x), \dots$  unter welche sich die Wurzeln der Reihe so vertheilen, dass jedem  $Q_n(x) = 0$  nur eine derselben zufällt. Für den ersten Fall werden wir in der Folge Beispiele aufstellen; für den zweiten geben wir das nachstehende an. Es sei

$$\varphi(x) = x^2 + \frac{k^2 - k + 1}{k - 1} x,$$

dann wird

$$\frac{\varphi_2(x) - x}{\varphi(x) - x} = x^2 + \frac{k^2}{k - 1} x + \frac{k^2}{k - 1} = (x + k) \left( x + \frac{k}{k - 1} \right) = 0.$$

Hier hat der erste Factor des letzten Ausdruckes die Wurzel  $x' = -k$ ; dagegen ergibt

$$\varphi(-k) = -\frac{k}{k - 1}$$

die zum zweiten Factor gehörige Wurzel, und umgekehrt

$$\varphi\left(-\frac{k}{k - 1}\right) = -k$$

die zum zweiten Factor gehörige.

In beiden Fällen hat der Factor  $Q_1(x)$  mit  $f(x)$  die Eigenschaft gemeinsam, dass die Iteration  $\varphi_*$  auf eine beliebige Wurzel von  $Q = 0$  oder  $f = 0$  angewendet, dieselbe Wurzel wieder erzeugt.

Es finden sich deshalb unter den Factoren von  $\varphi_x(x) - x$  alle, die gleich Null gesetzt, Gleichungen  $n^{\text{ten}}$  Grades ergeben, deren Wurzeln sich in der Weise

$$x', \varphi(x'), \varphi_2(x'), \dots$$

anordnen lassen. Dabei muss  $x$  alle Theiler von  $n$  durchlaufen.

## § 5.

Es ist

$$\frac{\varphi_m(y) - \varphi_m(z)}{y - z}$$

eine ganze Function von  $y$  und  $z$ ; setzt man hierin  $y = \varphi_{xm}(x)$ ,  $z = \varphi_{(x-1)m}(x)$ , so entsteht

$$\frac{\varphi_{(x+1)m}(x) - \varphi_{xm}(x)}{\varphi_{xm}(x) - \varphi_{(x-1)m}(x)} = Q_{xm}(x),$$

wobei das  $Q_{xm}$  eine ganze Function von  $x$  bezeichnet. Dies ergibt

$$\frac{\varphi_{(x+1)m}(x) - \varphi_{xm}(x)}{\varphi_m(x) - x} = \prod_{\lambda=1}^x \frac{\varphi_{(\lambda+1)m}(x) - \varphi_{\lambda m}(x)}{\varphi_{\lambda m}(x) - \varphi_{(\lambda-1)m}(x)} = Q_m \cdot Q_{2m} \cdot \dots \cdot Q_{xm}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{(x+1)m}(x) - x}{\varphi_m(x) - x} &= \sum_{\lambda=0}^x \frac{\varphi_{(\lambda+1)m}(x) - \varphi_{\lambda m}(x)}{\varphi_m(x) - x} \\ &= 1 + Q_m + Q_m \cdot Q_{2m} + \dots + (Q_m \cdot Q_{2m} \cdot \dots \cdot Q_{xm}). \end{aligned}$$

Für  $m = 1$  entsteht

$$(1) \quad \frac{\varphi_{(x+1)}(x) - x}{\varphi(x) - x} = 1 + Q_1 + Q_1 Q_2 + \dots + (Q_1 Q_2 Q_3 \cdot \dots \cdot Q_x).$$

Natürlich lässt sich dieser Satz auch durch Wurzelbetrachtungen beweisen, aber gerade der hier eingeschlagene Weg, auf dem sie vermieden werden, erscheint vorzuziehen.

Im allgemeinen Falle ist die linke Seite von (1) nicht weiter durch  $\varphi(x) - x$  theilbar. Denn wäre dies der Fall, dann müsste es auch für

$$\varphi(x) = x^\mu, \varphi_2(x) = x^{\mu^2}, \dots, \varphi_{x+1}(x) = x^{\mu^{x+1}}$$

eintreten, d. h. es müsste

$$\frac{x^{\mu^{x+1}} - x}{x^\mu - x}$$

für jede Wurzel der Gleichung  $x^\mu - x$  verschwinden, während dies für  $x = 0$  doch sicher nicht geschieht.

Ob es aber für besondere Wahl der Coefficienten von  $\varphi$  in einzelnen Fällen nicht doch eintreten kann, ist schwerer zu entscheiden. Es müsste dann

$$1 + Q_1(x') + Q_1(x') Q_2(x') + \dots + (Q_1(x') Q_2(x') \cdot \dots \cdot Q_{x-1}(x')) = 0$$

werden für alle Wurzeln  $x'$  von  $\varphi(x) - x = 0$ . Weil nun aber

$$Q_\lambda(x) = Q_{\lambda-1}(\varphi(x))$$

ist, so ergäbe sich für  $x'$

$$Q_\lambda(x') = Q_{\lambda-1}(\varphi(x')) = Q_{\lambda-1}(x') = \dots = Q_1(x'),$$

und die obige Gleichung ginge über in

$$1 + Q_1(x') + Q_1^2(x') + Q_1^3(x') + \dots + Q_1^{\kappa}(x') = 0.$$

Es würde also dann  $Q_1(x')$  eine von der Einheit verschiedene  $(\kappa + 1)^{\text{te}}$  Einheitswurzel sein.

Andrerseits wäre

$$Q_1(x') = \left| \frac{\varphi_\kappa(x) - \varphi(x)}{\varphi(x) - x} \right|_{x'} = \left| \frac{\varphi'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) - \varphi'(x)}{\varphi'(x) - 1} \right|_{x'} = \varphi'(x').$$

Unter der Annahme, dass die linke Seite von (1) noch durch  $\varphi(x) - x$  theilbar ist, müsste also für jede Wurzel von  $\varphi(x) - x = 0$  die Ableitung  $\varphi'(x)$  eine von 1 verschiedene  $(\kappa + 1)^{\text{te}}$  Einheitswurzel sein.

Es darf also insbesondere  $\varphi(x) - x = 0$  keine mehrfache Wurzel haben, da für eine solche  $\varphi'(x) - 1 = 0$  wäre.

Man sieht ferner leicht ein, dass

$$\frac{\varphi_\kappa(x) - x}{\varphi(x) - x} = 1 + Q_1(x)$$

niemals den Factor  $\varphi(x) - x$  enthalten kann. Denn dann müsste für die Wurzeln von  $\varphi(x) - x = 0$ , weil  $\kappa = 1$  ist,  $\varphi'(x) = -1$  sein; das geht nicht, da der Grad von  $\varphi'$  geringer ist als der von  $\varphi$ , und die erste Gleichung keine gleichen Wurzeln besitzt. Eine Ausnahme wäre nur für  $\varphi'(x) \equiv -1$  denkbar; das ergäbe auch in der That ein richtiges, aber banales Resultat, nämlich

$$\varphi(x) = -x + c, \quad \varphi_2(x) = x; \quad \varphi_2(x) - x = 0.$$

## § 6.

Wir gehen nun zum Beweise des allgemeinen Satzes über:

*Die ganze Function*

$$\frac{\varphi_\kappa(x) - x}{\varphi(x) - x}$$

ist für keine Wahl von  $\varphi(x)$  noch durch  $\varphi(x) - x$  theilbar.

Wir nehmen an, es gäbe eine Function, für welche Theilbarkeit vorhanden wäre. Nach den Resultaten des vorigen Paragraphen ist dann für jede Wurzel von  $\varphi(x) - x = 0$  die Ableitung  $\varphi'(x)$  gleich einer von der Einheit verschiedenen  $\kappa^{\text{ten}}$  Einheitswurzel. Die bei allen verschiedenen Wurzeln von  $\varphi = x$  auftretenden Einheitswurzeln

mögen  $\omega', \omega'', \omega''', \dots$  sein. Dann zerfällt  $\varphi(x) - x$  in ebensoviele Factoren  $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots$  derart, dass die Wurzeln von

$$g_\alpha(x) = 0$$

sämmtlich den gleichen Werth

$$\varphi'(x) = \omega^{(\alpha)}$$

hervorrufen. Demnach ist

$$\begin{aligned} \varphi'(x) - \omega' &\text{ theilbar durch } g_1(x), \\ \varphi'(x) - \omega'' &\text{ „ „ } g_2(x), \\ \varphi'(x) - \omega''' &\text{ „ „ } g_3(x), \\ &\dots \end{aligned}$$

Nun sei die  $\tau^{\text{te}}$  Einheitswurzel  $\omega'$  etwa eine primitive  $\tau^{\text{te}}$  Einheitswurzel, was wir durch  $\omega' = \omega_\tau$  andeuten. Dann folgt, dass  $g_1(x)$ , welches wir wegen des Auftretens von  $\omega_\tau$  auch durch  $g_1(x, \omega_\tau)$  bezeichnen können, der grösste gemeinsame Theiler von  $\varphi'(x) - \omega_\tau$  und  $\varphi(x) - x$  ist, so dass man setzen kann

$$A(x, \omega_\tau) \cdot (\varphi(x) - x) + B(x, \omega_\tau) \cdot (\varphi'(x) - \omega_\tau) = g_1(x, \omega_\tau).$$

Diese Gleichung muss für alle primitiven  $\tau^{\text{ten}}$  Einheitswurzeln gelten, und so hat man für alle diese in dem obigen Schema die entsprechenden  $g$  nur durch die  $\omega_\tau$  von einander verschieden zu setzen: Es ist

$$(1) \begin{aligned} \varphi'(x) - \omega_\tau &\text{ theilbar durch } g_1(x, \omega_\tau), & (\omega_\tau, \omega'_\tau \dots \text{ alle primitiven} \\ \varphi'(x) - \omega'_\tau &\text{ „ „ } g_1(x, \omega'_\tau), & \tau^{\text{ten}} \text{ Einheitswurzeln}), \\ &\dots \end{aligned}$$

und ebenso

$$(2) \begin{aligned} \varphi'(x) - \omega_\sigma &\text{ theilbar durch } g_2(x, \omega_\sigma), & (\omega_\sigma, \omega'_\sigma \dots \text{ alle primitiven} \\ \varphi'(x) - \omega'_\sigma &\text{ „ „ } g_2(x, \omega'_\sigma), & \sigma^{\text{ten}} \text{ Einheitswurzeln}), \\ &\dots \end{aligned}$$

wobei *sämmtliche* primitiven  $\tau^{\text{ten}}$ ,  $\sigma^{\text{ten}}$  Einheitswurzeln auftreten, u. s. f. Des einfachen Schreibens wegen nehmen wir nur diese beiden Arten von Wurzeln an; der Beweis bleibt im allgemeinen Falle ungeändert. Wir setzen ferner

$$\begin{aligned} g_1(x, \omega_\tau) \cdot g_1(x, \omega'_\tau) \dots &= G_1, \\ g_2(x, \omega_\sigma) \cdot g_2(x, \omega'_\sigma) \dots &= G_2. \end{aligned}$$

Differenziren wir jetzt die Gleichung

$$\varphi(x) - x = G_1 \cdot G_2,$$

deren Richtigkeit ersichtlich ist, so folgt

$$\begin{aligned} \varphi'(x) - 1 = G_1 G_2 \cdot &\left[ \frac{g_1'(x, \omega_\tau)}{g_1(x, \omega_\tau)} + \frac{g_1'(x, \omega'_\tau)}{g_1(x, \omega'_\tau)} + \dots \right. \\ &\left. + \frac{g_2'(x, \omega_\sigma)}{g_2(x, \omega_\sigma)} + \frac{g_2'(x, \omega'_\sigma)}{g_2(x, \omega'_\sigma)} + \dots \right], \end{aligned}$$

$$(3) \quad \varphi'(x) - \omega_\alpha = 1 - \omega_\alpha + G_1 G_2 \left[ \frac{g_1'(x, \omega_\alpha)}{g_1(x, \omega_\alpha)} + \dots + \frac{g_2'(x, \omega'_\sigma)}{g_2(x, \omega'_\sigma)} + \dots \right].$$

Setzen wir  $\omega_\tau$  statt  $\omega_\alpha$ , dann ist nach (1) die rechte Seite durch  $g_1(x, \omega_\tau)$  theilbar. Dabei sind alle Glieder des letzten Summanden mit Ausnahme des ersten einzeln für sich durch  $g_1(x, \omega_\tau)$  theilbar. Setzen wir dann  $\omega'_\tau, \dots, \omega_\sigma, \dots$  für  $\omega_\alpha$ , so ergeben sich der Reihe nach folgende Resultate: Es ist

$$(1) \quad \begin{aligned} 1 - \omega_\tau + G_1 G_2 \frac{g_1'(x, \omega_\tau)}{g_1(x, \omega_\tau)} & \text{ theilbar durch } g_1(x, \omega_\tau), \\ 1 - \omega'_\tau + G_1 G_2 \frac{g_1'(x, \omega'_\tau)}{g_1(x, \omega'_\tau)} & \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad g_1(x, \omega'_\tau), \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} 1 - \omega_\sigma + G_1 G_2 \frac{g_2'(x, \omega_\sigma)}{g_2(x, \omega_\sigma)} & \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad g_2(x, \omega_\sigma), \\ 1 - \omega'_\sigma + G_1 G_2 \frac{g_2'(x, \omega'_\sigma)}{g_2(x, \omega'_\sigma)} & \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad g_2(x, \omega'_\sigma), \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Alles dies multipliciren wir, setzen zur Abkürzung

$$(1 - \omega_\tau) (1 - \omega'_\tau) \dots (1 - \omega_\sigma) (1 - \omega'_\sigma) \dots = \Omega$$

und behalten nach der Multiplication nur die Glieder des Products bei, deren Theilbarkeit durch  $G_1 G_2$  nicht von selbst klar ist; so entsteht der durch  $G_1 G_2$  theilbare Ausdruck:

$$(4) \quad \Omega + G_1 G_2 \Omega \left( \frac{1}{1 - \omega_\tau} \frac{g_1'(x, \omega_\tau)}{g_1(x, \omega_\tau)} + \frac{1}{1 - \omega'_\tau} \frac{g_1'(x, \omega'_\tau)}{g_1(x, \omega'_\tau)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{1 - \omega_\sigma} \frac{g_2'(x, \omega_\sigma)}{g_2(x, \omega_\sigma)} + \frac{1}{1 - \omega'_\sigma} \frac{g_2'(x, \omega'_\sigma)}{g_2(x, \omega'_\sigma)} + \dots \right).$$

Der Grad von (4) ist um eine Einheit geringer, als der von  $G_1 G_2$ ; folglich muss (4) identisch verschwinden. Insbesondere muss der Coefficient des höchsten Gliedes in (4) gleich Null sein. Diesen wollen wir berechnen.

Es sei

$$\begin{aligned} \varphi(x) - x &= dx^r + \dots, \\ g_1(x, \omega_\tau) &= a(\omega_\tau) \cdot x^\mu + \dots, \\ g_1(x, \omega'_\tau) &= a(\omega'_\tau) \cdot x^\mu + \dots, & a(\omega_\tau) a(\omega'_\tau) \dots b(\omega_\sigma) b(\omega'_\sigma) \dots = \bar{a}, \\ \dots & \dots & \mu \varphi_0(\tau) + \varrho \varphi_0(\sigma) = \nu f, \\ g_2(x, \omega_\sigma) &= b(\omega_\sigma) \cdot x^\varrho + \dots, \\ g_2(x, \omega'_\sigma) &= b(\omega'_\sigma) \cdot x^\varrho + \dots, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$



wobei  $\varphi_0$  die zahlentheoretische Function  $\varphi$  bedeuten soll. Dann erkennt man, dass der gesuchte Coefficient, abgesehen von dem Factor  $d\Omega$  gleich

$$\mu \left[ \frac{1}{1-\omega_\tau} + \frac{1}{1-\omega'_\tau} + \dots \right] + \varrho \left[ \frac{1}{1-\omega_\sigma} + \frac{1}{1-\omega'_\sigma} + \dots \right]$$

werden wird. Fasst man in jeder der Klammern die zu einander reciproken Wurzeln zusammen, so erkennt man, dass dieser Werth gleich

$$\frac{1}{2} \mu \varphi_0(\tau) + \frac{1}{2} \varrho \varphi_0(\sigma)$$

wird. Sollte etwa  $\sigma = 2$  sein, so würde  $\varphi_0(2) = 1$  gleichfalls das richtige Resultat ergeben. Dieser letzte Ausdruck kann aber unmöglich Null werden; er ist wesentlich positiv, wenn nicht  $\mu = 0$ ,  $\varrho = 0$ , also der in § 5 am Schlusse angegebene Fall auftritt.

Die zu Anfang des Paragraphen gesetzte Möglichkeit kann sich also nie verwirklichen, und der ausgesprochene Satz ist allgemein bewiesen.

### § 7.

Wir beweisen zunächst einige Eigenschaften der Gleichung

$$\varphi_x(x) - x = 0,$$

welche ihre Analogie mit der Gleichung  $x^m - 1 = 0$  aufzeigen.

#### I. Besteht in der Reihe

$$(1) \quad x', \varphi(x'), \varphi_2(x'), \varphi_3(x'), \dots$$

in welcher  $x'$  eine beliebige Constante bedeutet, irgend ein Glied, welches gleich  $x'$  wird, so giebt es ein erstes  $\varphi_\alpha(x')$  dieser Eigenschaft und alle folgenden derartigen gehören der Reihe  $\varphi_{2\alpha}(x')$ ,  $\varphi_{3\alpha}(x')$ , ... an.

In der That, wenn  $\varphi_\beta(x') = x'$  ist, und  $\beta = m\alpha + \gamma$  gesetzt wird ( $\gamma < \alpha$ ), so folgt  $\varphi_\beta(x') = \varphi_\gamma(\varphi_{m\alpha}(x')) = \varphi_\gamma(x') = x'$ , und dies ist nur für  $\gamma = 0$  möglich.

#### II. Die Glieder der Reihe

$$x', \varphi(x'), \varphi_2(x'), \dots, \varphi_{\alpha-1}(x) \quad (\varphi_\alpha(x') = x')$$

sind sämmtlich von einander verschieden; bei der Fortsetzung der Iteration wiederholen sich die Werthe in gleicher Reihenfolge.

Wäre

$$\varphi_\mu(x') = \varphi_\nu(x'), \quad (\mu < \nu < \alpha),$$

so müsste

$$\varphi_{\alpha-\nu+\mu}(x') = \varphi_\alpha(x') = x'$$

sein, was der in I gemachten Annahme widerspricht. Der zweite Theil des Satzes ist klar.

III. Bedeutet  $x'$  eine Wurzel von  $\varphi_x(x) - x = 0$ , so ist jedes  $\varphi_\lambda(x')$  auch eine Wurzel derselben Gleichung.

Denn es ist

$$\varphi_{\kappa}[\varphi_{\lambda}(x')] = \varphi_{\lambda}[\varphi_{\kappa}(x')] = \varphi_{\lambda}(x').$$

IV. Die gemeinsamen Wurzeln von

$$\varphi_{\mu}(x) = x, \quad \varphi_{\lambda}(x) = x$$

sind auch Wurzeln von

$$\varphi_{\mu}(x) = x,$$

wenn  $\mu$  den grössten gemeinsamen Theiler von  $\kappa, \lambda$  bedeutet.

Den gemachten Voraussetzungen nach giebt es in (1) die Glieder  $\varphi_{\kappa}(x'), \varphi_{\lambda}(x')$ , welche gleich  $x'$  werden. Also sind  $\kappa, \lambda$  Vielfache desjenigen ersten Index, für den die Iteration  $x'$  liefert; das zeigt, dass auch  $\mu$  ein Vielfaches dieses ersten Index wird.

V. Ist  $x'$  eine Wurzel von  $\varphi_{\kappa}(x) - x = 0$ , so ist es auch eine Wurzel von  $\varphi_{m\kappa}(x) - x = 0$ , wo  $m$  die Reihe der positiven, ganzen Zahlen durchlaufen kann.

Denn es ist

$$\varphi_{2\kappa}(x') = \varphi_{\kappa}[\varphi_{\kappa}(x')] = \varphi_{\kappa}(x') = x',$$

$$\varphi_{3\kappa}(x') = \varphi_{2\kappa}[\varphi_{\kappa}(x')] = \varphi_{2\kappa}(x') = x',$$

.....

VI. Definition. Eine primitive Wurzel von

$$\varphi_{\kappa}(x) - x = 0$$

soll  $x'$  dann heissen, wenn in der Reihe (1)  $\varphi_{\kappa}(x')$  das erste Glied ist, welches dem Anfangsgliede gleich wird.

VII. Bedeutet  $p$ , wie immer im Folgenden, eine Primzahl, ist ferner  $\varphi(x)$  vom Grade  $m$ , so hat

$$\varphi_p(x) - x = 0$$

$m(m^{p-1} - 1)$  primitive Wurzeln, welche sich in  $m \frac{m^{p-1} - 1}{p}$  Reihen

$$x', \quad \varphi(x'), \quad \varphi_2(x'), \quad \dots \quad \varphi_{p-1}(x'),$$

$$x'', \quad \varphi(x''), \quad \varphi_2(x''), \quad \dots \quad \varphi_{p-1}(x''),$$

.....

vertheilen.

Nach den Resultaten des vorigen Paragraphen wird

$$\frac{\varphi_p(x) - x}{\varphi(x) - x}$$

eine ganze Function, welche nicht mehr durch  $\varphi(x) - x$  theilbar ist. Setzt man den Zähler allein gleich Null, so zerfallen die Wurzeln in zwei Arten; in solche, bei denen  $\varphi(x) = x$  wird und in solche bei denen erst  $\varphi_p(x) = x$  wird. Nach I. dieses Paragraphen gehören alle Wurzeln einer von diesen beiden Arten an. Setzt man also den Nenner gleich Null und tilgt dadurch die Wurzeln der ersten Art, so bleiben nur solche der zweiten Art übrig.

$\varphi(x)$  ist vom Grade  $m$ ,  $\varphi_p(x)$  vom Grade  $m^p$ ; daraus folgen die oben gemachten Zahlenangaben.

VIII. Die primitiven Wurzeln von

$$(2) \quad \varphi_\mu(x) - x = 0; \quad \mu = p^d$$

werden durch die Gleichung

$$(3) \quad \frac{\varphi_\mu(x) - x}{\varphi_{\mu:p}(x) - x} = 0$$

gegeben; ihre Anzahl ist  $= m^{p^d-1} (m^{p^d-p^{d-1}} - 1)$ .

Alle nicht-primitiven Wurzeln von  $\varphi_\mu(x) - x = 0$  werden schon die Gleichung  $\varphi_{\mu:p}(x) - x = 0$  befriedigen; der obige Quotient besitzt also, gleich Null gesetzt, nur die primitiven Wurzeln von (2). Nach dem vorigen Paragraphen enthält  $\varphi_\mu(x) = x$  die „zum Index  $p^{d-1}$  gehörigen Wurzeln“ nur einmal;  $\varphi_{\mu:p} = x$  die zum Index  $p^{d-2}$  gehörigen nur einmal, u. s. w. Daraus folgt, dass (3) die primitiven Wurzeln, jede nur einfach, liefert.

IX. Die primitiven Wurzeln von

$$(4) \quad \varphi_\mu(x) - x = 0; \quad \mu = p_1^{d_1} p_2^{d_2} p_3^{d_3} \dots$$

werden durch die Gleichung

$$\frac{[\mu:1] \cdot [\mu:p_1 p_2] [\mu:p_1 p_3] [\mu:p_2 p_3] \dots}{[\mu:p_1] [\mu:p_2] [\mu:p_3] \dots} = 0$$

gegeben, worin

$$\varphi_{\mu:\tau}(x) - x = [\mu:\tau]$$

gesetzt worden ist.

Der Beweis dieses Satzes läuft dem vorigen einerseits, dem für die primitiven Einheitswurzeln andererseits bekannten parallel, so dass wir von einer Darlegung desselben absehen können.

X. Hat das Gleichungssystem

$$(5) \quad \varphi_n(x) = y, \quad \varphi_\lambda(y) = x$$

die Lösungen  $x = x'$ ,  $y = y'$ , dann sind  $x'$ ,  $y'$  Wurzeln der Gleichung

$$(6) \quad \varphi_{n+\lambda}(x) - x = 0;$$

und wenn umgekehrt  $x'$  eine Lösung von (6) ist, dann bilden

$$x' \text{ und } y' = \varphi_n(x')$$

eine Lösung von (5).

Der Beweis ist unmittelbar ersichtlich.

§ 8.

Wir nehmen jetzt wieder an, dass  $\varphi(x)$  vom Grade  $m$  ist, und betrachten

$$(1) \quad \frac{\varphi_p(x) - x}{\varphi(x) - x} = 0,$$

also die Gleichung, welche alle primitiven zu  $\varphi$  gehörigen Wurzeln des Index  $p$  liefert. Ist  $x'$  eine derselben, so sind

$$(2) \quad x', \varphi(x'), \varphi_2(x'), \dots, \varphi_{p-1}(x') \quad (\varphi_p(x') = x')$$

Wurzeln von (1), und zwar sind alle von einander verschieden. Der Grad von (1) ist  $m(m^{p-1} - 1)$ ; jede symmetrische Function der Wurzeln (2) ist innerhalb des Bereiches der Gleichung (1) im Allgemeinen

$$M_p = m \frac{m^{p-1} - 1}{p} \text{-werthig.}$$

Wir setzen, wenn  $x'', \dots$  die anderen primitiven Wurzeln von (1) sind,

$$(3) \quad \begin{aligned} x' + \varphi(x') + \varphi_2(x') + \dots + \varphi_{p-1}(x') &= \vartheta_1', \\ x'' + \varphi(x'') + \varphi_2(x'') + \dots + \varphi_{p-1}(x'') &= \vartheta_1'', \\ &\dots \end{aligned}$$

dann kann man alle symmetrischen Functionen der Grössen (2) rational durch  $\vartheta_1'$  darstellen und kann also die Grössen (2) als Wurzeln einer Gleichung

$$(4) \quad z^p + \vartheta_1' \cdot z^{p-1} + \vartheta_2' \cdot z^{p-2} + \dots + \vartheta_p' = 0$$

auffassen, deren Coefficienten  $\vartheta_2', \dots, \vartheta_p'$  rationale Functionen von  $\vartheta_1'$  sind.  $\vartheta_1'$  selbst genügt einer Gleichung des Grades  $M_p$  mit rational bekannten Coefficienten

$$(5) \quad u^{M_p} + A_1 u^{M_p-1} + \dots + A_{M_p} = 0.$$

Man kann nun versuchen, die Coefficienten von  $\varphi(x)$  innerhalb eines beliebigen Rationalitätsbereiches so anzunehmen, dass (5) eine rationale Wurzel  $\vartheta_1'$  hat; dann sind alle Coefficienten von (4) gleichfalls rationale Grössen, und (4) ist eine einfache Abel'sche Gleichung, deren Wurzeln durch die Grössen (2) gegeben sind.

Setzt man  $\varphi(x)$  allgemein vom  $(p - 1)$ ten Grade an, so erhält man auf diesem Wege die allgemeinen Abel'schen Gleichungen vom Grade  $p$ . Die Art der Rechnung möge an einigen Beispielen erläutert werden.

### § 9.

Ist eine Abel'sche Gleichung dritten Grades gegeben, für welche

$$x_2 = \varphi(x_1) = mx_1^2 + nx_1 + p$$

ist, so kann man gemäss § 1 und § 2 durch eine lineare Transformation die Gleichung so umgestalten, dass für sie

$$x_2 = x_1^2 + a$$

wird. Diese neue Gleichung betrachten wir und setzen.

$$(1) \quad \varphi(x) = x^2 + a.$$

Dann wird

$$(2) \frac{\varphi_2(x) - x}{\varphi(x) - x} = x^6 + x^5 + (3a + 1)x^4 + (2a + 1)x^3 + (3a^2 + 3a + 1)x^2 + (a^2 + 2a + 1)x + (a^3 + 2a^2 + a + 1) = 0.$$

Jetzt setzen wir, wenn  $x'$  eine Wurzel dieser Gleichung bezeichnet,

$$\begin{aligned} x' + \varphi(x') + \varphi_2(x') &= \vartheta_1(x'), \\ x' \varphi(x') + \varphi(x') \varphi_2(x') + \varphi_2(x') x' &= \vartheta_2(x'), \\ x' \varphi(x') \varphi_2(x') &= \vartheta_3(x'). \end{aligned}$$

Hier wird

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x') &= x'^4 + (2a + 1)x'^2 + x' + (a^2 + 2a); \\ \vartheta_2(x') &= x'^6 + x'^5 + 3ax'^4 + (2a + 1)x'^3 + (3a^2 + a)x'^2 \\ &\quad + (a^2 + 2a)x' + (a^3 + a^2) \\ &= \frac{\varphi_2(x') - x'}{\varphi(x') - x'} - \vartheta_1(x') + (a - 1) \\ &= -\vartheta_1(x') + (a - 1); \\ \vartheta_3(x') &= x'^7 + 3ax'^5 + (3a^2 + a)x'^3 + (a^3 + a^2)x' \\ &= (x' - 1) \frac{\varphi_2(x') - x'}{\varphi(x') - x'} + a\vartheta_1(x') + (a + 1), \end{aligned}$$

so dass die Gleichung

$$(3) z^3 - \vartheta_1(x') \cdot z^2 - (\vartheta_1(x') - a + 1)z - (a\vartheta_1(x') + a + 1) = 0$$

die Wurzeln  $x'$ ,  $\varphi(x')$ ,  $\varphi_2(x')$  besitzt. Bezeichnet man die übrigen drei Wurzeln von (2) mit  $x''$ ,  $\varphi(x'')$ ,  $\varphi_2(x'')$  und auch unterschiedslos die 6 Wurzeln von (2) mit  $x_1, x_2, \dots, x_6$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x') + \vartheta_1(x'') &= \sum x_2 = -1, \\ \vartheta_1(x') \cdot \vartheta_1(x'') &= \sum x_2 x_\mu - \vartheta_2(x') - \vartheta_2(x'') \\ &= (3a + 1) + \vartheta_1(x') + \vartheta_1(x'') - 2(a - 1) \\ &= a + 2, \end{aligned}$$

so dass die Gleichung

$$(4) u^2 + u + (a + 2) = 0$$

die Wurzeln  $\vartheta_1(x')$ ,  $\vartheta_1(x'')$  besitzt. Aus (4) folgt

$$u = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{-4a - 7});$$

also entsteht für

$$-(4a + 7) = (2\lambda + 1)^2, \quad a = -(\lambda^2 + \lambda + 2)$$

die rationale Wurzel

$$u = \frac{1}{2} (-1 \pm 2\lambda \pm 1)$$

d. h. wir können setzen

$$\vartheta_1(x') = \lambda, \quad \vartheta_1(x'') = -(\lambda + 1).$$

Dann entstehen aus (3) die beiden Gleichungen

$$(5) \quad z^3 - \lambda z^2 - (\lambda^2 + 2\lambda + 3)z + (\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 1) = 0,$$

$$(5a) \quad z^3 + (\lambda + 1)z^2 - (\lambda^2 + 2)z - (\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0,$$

deren Product (2) ergeben muss. Uebrigens sind (5) und (5a) nicht wesentlich von einander verschieden. Denn

$$a = -(\lambda^2 + \lambda + 2)$$

geht durch  $\lambda = -(\lambda_1 + 1)$  in  $-(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 2)$  und gleichzeitig (5) in die entsprechende Form (5a) über. Es giebt daher (5) die Abel'schen Gleichungen dritten Grades, wobei

$$\varphi(x) = x^2 - (\lambda^2 + \lambda + 2)$$

zu setzen ist. Nehmen wir noch

$$\lambda = 3\mu,$$

$$z = \xi + \mu,$$

dann entsteht

$$\xi^3 - 3(4\mu^2 + 2\mu + 1)\xi + (4\mu^2 + 2\mu + 1)(4\mu + 1) = 0$$

als allgemeine Form der Abel'schen Gleichungen; hierbei ist

$$\xi'' = \varphi(\xi') = \xi'^2 + 2\mu\xi' - 2(4\mu^2 + 2\mu + 1)$$

die Beziehung, welche zwischen den Wurzeln herrscht.

Bemerkenswerth ist, was aus (5) und (5a) hervorgeht, dass jeder Abel'schen Gleichung dritten Grades eine andere zugeordnet ist, welche dieselben Wurzelrelationen aufweist, wie jene.

### § 10.

Wir fragen weiter nach denjenigen Gleichungen vierten Grades, deren Wurzeln durch

$$x', \varphi(x'), \varphi_2(x'), \varphi_3(x')$$

dargestellt werden können, wobei  $\varphi$  nur bis zum zweiten Grade aufsteigt, so dass also

$$(1) \quad \varphi(x) = x^2 + a$$

gesetzt werden kann. Man hat hier, den allgemeinen Entwicklungen gemäss

$$\frac{\varphi_4(x) - x}{\varphi_3(x) - x} = 0$$

zu bilden. Dies wird

$$(2) \quad x^{12} + 6ax^{10} + x^9 + (15a^2 + 3a)x^8 + 4ax^7 + (20a^3 + 12a^2 + 1)x^6 \\ + (6a^2 + 2a)x^5 + (15a^4 + 18a^3 + 3a^2 + 4a)x^4 \\ + (4a^5 + 4a^2 + 1)x^3 + (6a^5 + 12a^4 + 6a^3 + 5a^2 + 4a)x^2 \\ + (a^4 + 2a^3 + a^2 + 2a)x \\ + (x^6 + 3a^5 + 3a^4 + 3a^3 + 2a^2 + 1) = 0,$$

so dass diese Gleichung die zwölf Wurzeln

$$x^{(i)}, \varphi(x^{(i)}), \varphi_2(x^{(i)}), \varphi_3(x^{(i)}), \quad (i = 1, 2, 3)$$

besitzt. Nun setzen wir wieder

$$\begin{aligned} x' + \varphi(x') + \varphi_2(x') + \varphi_3(x') &= \vartheta_1(x'), \\ x' \varphi(x') + x' \varphi_2(x') + \dots + \varphi_2(x') \varphi_3(x') &= \vartheta_2(x'), \\ x' \varphi(x') \varphi_2(x') + \dots + \varphi(x') \varphi_2(x') \varphi_3(x') &= \vartheta_3(x'), \\ x' \varphi(x') \varphi_2(x') \varphi_3(x') &= \vartheta_4(x'); \end{aligned}$$

dann genügen zunächst die 3 Functionen

$$\vartheta_1(x'), \vartheta_1(x''), \vartheta_1(x''')$$

einer Gleichung dritten Grades mit rationalen Coefficienten; für diese findet man auf demselben Wege wie im vorigen Paragraphen

$$(3) \quad u^3 + (4a + 3)u + 4 = 0.$$

In Folge von (3) kann man die dritte und alle höheren Potenzen von  $\vartheta_1(x')$  durch niedere ausdrücken, indem man von

$$\vartheta_1(x')^3 = -(4a + 3)\vartheta_1(x') - 4$$

Gebrauch macht; insbesondere werden  $\vartheta_2(x'), \vartheta_3(x'), \vartheta_4(x')$  die Form

$$a_0 \vartheta_1(x')^2 + b_0 \vartheta_1(x') + c_0$$

annehmen. Führt man die Rechnung durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x') &= \frac{1}{2} [\vartheta_1(x')^2 - \vartheta_1(x') + 4a], \\ \vartheta_3(x') &= -\frac{1}{2} [\vartheta_1(x')^2 - (2a - 1)\vartheta_1(x') + 2], \\ \vartheta_4(x') &= \frac{1}{2} [a\vartheta_1(x')^2 + a\vartheta_1(x') + 2a^2 + 2a + 2]. \end{aligned}$$

Demnach genügen die Grössen  $x^{(i)}, \varphi(x^{(i)}), \varphi_2(x^{(i)}), \varphi_3(x^{(i)})$  der Gleichung

$$(4) \quad \begin{aligned} s^4 - \vartheta^{(i)} s^3 + \frac{1}{2} (\vartheta^{(i)2} - \vartheta^{(i)} + 4a) s^2 \\ + \frac{1}{2} (\vartheta^{(i)2} - (2a - 1)\vartheta^{(i)} + 2) s \\ + \frac{1}{2} (a\vartheta^{(i)2} + a\vartheta^{(i)} + 2a^2 + 2a + 2) = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\vartheta^{(i)} = \vartheta_1(x^{(i)})$$

gesetzt ist. Hat nun (3) eine rationale Wurzel, dann liefert die entsprechende Gleichung (4) eine Abel'sche Gleichung der verlangten Art. Wir setzen das Polynom von (3)

$$u^3 + (4a + 3)u + 4 = (u - \kappa)(u^2 + \kappa u + \lambda)$$

und erhalten für die Zerlegungsmöglichkeit

$$\begin{aligned} \kappa \lambda &= -4, & \lambda - \kappa^2 &= 4a + 3, \\ a &= -\frac{\kappa^3 + 3\kappa + 4}{4\kappa}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$(5) \quad \begin{aligned} z^4 - \kappa z^3 - \frac{\kappa^2 + 3\kappa + 4}{2\kappa} z^2 + \frac{\kappa^3 + 2\kappa^2 + 5\kappa + 8}{4} z \\ + \frac{\kappa^5 - 2\kappa^4 + 4\kappa^3 - 2\kappa^2 + 11\kappa + 4}{16\kappa} = 0 \end{aligned}$$

die allgemeinste Abel'sche Gleichung vierten Grades mit den Wurzeln

$$z', \quad \varphi(z') = z'^2 + a, \quad \varphi_2(z'), \quad \varphi_3(z');$$

dabei muss

$$(6) \quad a = -\frac{\kappa^3 + 3\kappa + 4}{4\kappa}$$

sein.

Führt man diesen Werth in (2) ein, so zerfällt der Ausdruck auf der linken Seite, und die linke Seite von (5) wird, falls man darin  $z$  durch  $x$  ersetzt, ein Factor von (2).

Man erkennt gleichzeitig, dass jeder Abel'schen Gleichung vierten Grades von der angegebenen Eigenschaft eine Gleichung des achten Grades entspricht, deren Wurzeln

$$\begin{aligned} z'', \quad \varphi(z''), \quad \varphi_2(z''), \quad \varphi_3(z''); \\ z''', \quad \varphi(z'''), \quad \varphi_2(z'''), \quad \varphi_3(z''') \end{aligned}$$

sind.

### § 11.

Endlich stellen wir noch diejenigen Gleichungen vierten Grades auf, deren Wurzeln

$$x', \quad \varphi(x'); \quad x'', \quad \varphi(x'')$$

werden, wobei man allgemein

$$(1) \quad \varphi(x) = x^3 + ax + b$$

setzen darf. Hier wird

$$(2) \quad \frac{\varphi_2(x) - x}{\varphi(x) - x} = x^6 + (2a + 1)x^4 + 2bx^3 + (a^2 + a + 1)x^2 \\ + (2ab + b)x + (a + 1 + b^2) = 0,$$

und die Gleichung, deren Wurzeln

$$x^{(i)} + \varphi(x^{(i)}) = \vartheta_i(x^{(i)}), \quad (i = 1, 2, 3)$$

sind, erscheint in der Form

$$(3) \quad u^3 + (a + 2)u - b = 0.$$

Soll (3) zerfallen, so muss die linke Seite

$$(u - \kappa)(u^2 + \kappa u + \lambda)$$



werden, und dies erfordert die Annahme

$$a = \lambda - \kappa^2 - 2; \quad b = \kappa\lambda.$$

In der That ergibt sich für diese Annahme die linke Seite von (2) gleich

$$(x^2 - \kappa x + \lambda - 1) (x^4 + \kappa x^3 + [\lambda - \kappa^2 - 2] x^2 + [2\kappa\lambda - \kappa - \kappa^3] x + [\kappa^2\lambda + \kappa^2 + 1]) = 0.$$

Es wird demnach

$$x^4 + \kappa x^3 + (\lambda - \kappa^2 - 2) x^2 + (2\kappa\lambda - \kappa - \kappa^3) x + (\kappa^2\lambda + \kappa^2 + 1) = 0$$

die allgemeine Gleichung vierten Grades mit der verlangten Eigenthümlichkeit. Dabei muss sein

$$\varphi(x) = x^3 + (\lambda - \kappa^2 - 2) x + \kappa\lambda.$$

Giessen, den 28. Juli 1892.

---