**9. Die Minkowskischen Bewegungsgleichungen und Plancksche Dynamik;
von K. Schaposchnikow.**

H. Minkowski hat folgende Bewegungsgleichungen der Relativitätsdynamik vorgelegt¹⁾:

$$\frac{d}{d\tau} \left(m' \frac{dx}{d\tau} \right) = X, \quad \frac{d}{d\tau} \left(m' \frac{dy}{d\tau} \right) = Y, \quad \frac{d}{d\tau} \left(m' \frac{dz}{d\tau} \right) = Z, \\ \frac{d}{d\tau} \left(m' \frac{du}{d\tau} \right) = U,$$

wo X, Y, Z, U die Komponenten des vierdimensionalen Vektors erster Art nach den Koordinaten: $x, y, z, u = ict$ sind; $d\tau = dt \sqrt{1 - q^2/c^2}$, wo q die Bewegungsgeschwindigkeit des Körpers, c die Lichtgeschwindigkeit, m' die Ruhmassendichte, welche Minkowski für Konst. gehalten hat, bedeutet.

Wenn wir einen homogenen Körper haben, dessen Ruhmasse M' und Ruhvolumen v' ist, so können wir die obigen Gleichungen in solcher Form darstellen:

$$\frac{1}{v' \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \frac{dx}{dt} \right) = X \dots \\ \frac{ic}{v' \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \right) = U,$$

wo

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

die Komponenten nach den Koordinaten x, y, z der Geschwindigkeit q sind. $\frac{M' c^2}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}$ ist die kinetische Energie des Körpers.¹⁾

Das Volumen des bewegten Körpers v ist durch die folgende Gleichung mit dem Ruhvolumen v' verbunden:

$$v = v' \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}.$$

1) H. Minkowski, Göttinger Nachr. p. 107, 108. 1908.

Daher können die Gleichungen folgendermaßen geschrieben werden:

$$(1) \begin{cases} \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \frac{dx}{dt} \right) = X, & \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \frac{dy}{dt} \right) = Y, \\ \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \frac{dz}{dt} \right) = Z, & \frac{i}{cv} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{M' c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \right) = U. \end{cases}$$

Wir haben einen homogenen Körper, der sich mit einer gleichmäßigen (oder quasi-stationären) Translationsgeschwindigkeit bewegt.¹⁾ Der Zustand dieses Körpers ist eine Funktion von drei Variablen: der Geschwindigkeit q , des Volumens v , und des Druckes p . Für solchem Körper stellen die Formeln von Minkowski keine allgemeine Bewegungsgleichungen dar.

Wollen wir die Gleichungen von Minkowski (1) in folgender Weise verallgemeinern: nehmen wir vor allem an, daß M' mit der Zeit veränderlich ist²⁾; wenn, weiter, die volle Energie des Körpers E ist, dann nehmen wir an, daß auch $\frac{i}{cv} \cdot \frac{dE}{dt}$ die vierte Komponente des Vektors erster Art ist.³⁾ So können wir die folgende Hypothese aufstellen: *die Bewegung des betreffenden Körpers wird durch die folgende dynamische Gleichungen definiert:*

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \frac{dx}{dt} \right) = X, & \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \frac{dy}{dt} \right) = Y, \\ \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{M'}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \frac{dz}{dt} \right) = Z, & \frac{i}{cv} \cdot \frac{dE}{dt} = U, \end{cases}$$

wo X, Y, Z, U die Komponenten des Vektors erster Art sind, M' ist eine Zustandsfunktion des ruhenden Körpers, und

$$\frac{dE}{dt} = qK - p \frac{dv}{dt} + T \frac{dS}{dt}$$

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 26. p. 1. 1908.

2) Auf eine solche Verallgemeinerung hat schon M. Abraham hingewiesen. Phys. Zeitschr. 10. p. 731. 1909.

3) Es ist natürlich solche Annahme zu machen, weil in der letzten Formel (1) $\frac{M' c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$ auch die Energie ist.

ist. In dieser Energiegleichung bedeutet das erste Glied der rechten Seite die Translationsarbeit, das zweite Glied — die Arbeit der Druckkräfte und das dritte Glied — die Wärmemenge, welche der Körper von außen erhält; T ist die Temperatur und S die Entropie.

Die ersten drei Gleichungen (2) können wir in vektorieller Form (des dreidimensionalen Raumes) schreiben:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M' \cdot q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \right) = K,$$

wo K die Resultante der äußeren Kräfte ist. Die Komponenten von K sind Xv , Yv , Zv , weil (X, Y, Z) die Kraft ist, die auf Volumeneinheit wirkt.

Aus der letzten Gleichung sehen wir, daß Impuls des Körpers

$$(3) \quad G = - \frac{M' q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

ist.

Jetzt wollen wir unseren Hauptsatz, daß X, Y, Z, U die Komponenten des vierdimensionalen Vektors erster Art sind, analytisch ausdrücken. Das skalare Produkt zweier Vektoren erster Art ist eine Invariante der Lorentztransformation, d. h. vierdimensionaler Skalar. Nehmen wir einen unendlich kleinen Vektor erster Art mit den Komponenten dx, dy, dz, du und bilden das folgende skalare Produkt:

$$X dx + Y dy + Z dz + U du = d\Phi,$$

wo $d\Phi$ eine Invariante ist.

Setzen wir in die letzte Gleichung die Größe von U ein, und machen darauf aufmerksam, daß

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{1}{v} \cdot q K dt,$$

so bekommen wir:

$$\frac{p dv - T dS}{v} = d\Phi.$$

Multiplizieren wir diese Größe mit der Invariante $\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$, so erhalten wir dann eine neue Invariante:

$$(4) \quad \frac{p dv - T dS}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}.$$

Setzen wir voraus, daß unser Körper sich zuerst adiabatisch verhält, d. h. $dS = 0$, dann isochorisch, d. h. $dv = 0$, dann ersehen wir, daß

$$\frac{p dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{und} \quad \frac{T dS}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

einzelnen vierdimensionale Skalaren sein müssen. Da aber $\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ und S Invarianten¹⁾ sind, so müssen auch

$$p \quad \text{und} \quad \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Invarianten sein.

Wir sehen also, daß die Invarianz von p und $\frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ aus unseren Bewegungsgleichungen folgt.

Da (4) eine Invariante ist, so finden wir aus der Energiegleichung, daß

$$\frac{dE - q K dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

auch eine Invariante sein muß.

Setzen wir hier $K = dG/dt$, dann bekommen wir:

$$\frac{dE - q dG}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck in Ruhe transformieren, d. h. wenn wir $q = 0$ annehmen, dann erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\frac{dE - q dG}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = dE'$$

wo E' die Energie des ruhenden Körpers bedeutet.

1) Die Invarianz von $\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ und S folgt aus den allgemeinen Sätzen des Relativitätsprinzips und wird unabhängig von unseren Betrachtungen bewiesen.

Für die gleichmäßige Bewegung $q = \text{const.}$ erhalten wir aus dieser Gleichung:

$$(5) \quad E = q \cdot G + E' \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} + f(q),$$

wo $f(q)$ eine beliebige Funktion nur von q ist.

Finden wir jetzt die zweite Gleichung, welche E und G verbindet, aus. Für diesen Zweck nehmen wir an, daß der Körper sich quasi-stationär bewegt¹⁾ und integrieren die Energiegleichung

$$dE = q dG - p dv + T dS.$$

Setzen wir hier $v = v' \sqrt{1 - q^2/c^2}$, $p = p'$ und $S = S'$. Dabei ist S' — die Entropie des ruhenden Körpers — eine Funktion nur von v' und p' . Dann bekommen wir:

$$(6) \quad dE = q dG - p' d\left(v' \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right) + T dS'.$$

E ist eine Funktion von drei Variablen p, v, q . Wenn wir die Einsetzung $p = p'$ und $v = v' \sqrt{1 - q^2/c^2}$ ausführen, dann wird E eine Funktion von p', v', q . dE wird ein vollständiges Differenzial der Variablen p, v, q und folglich auch von p', v', q , sein. Wollen wir die Gleichung (6) nach q integrieren, wobei wir p' und v' für Const. halten. Wir bemerken, daß S' in diesem Fall invariabel ist, weil es Funktion nur von p' und v' ist.

Dann brauchen wir nur die folgende einfache Gleichung zu integrieren:

$$dE = q dG - p' v' d\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right).$$

Setzen wir hier G aus (3) ein. Nach der Integrierung haben wir:

$$(7) \quad E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left\{ M' c^2 - p' v' + \frac{p' v' q^2}{c^2} \right\} + \psi(v', p'),$$

wo ψ eine beliebige Funktion der Integration ist, die nur von v' und p' abhängt.

1) Die quasi-stationäre Bewegung wird durch dieselben Formeln ausgedrückt wie die gleichmäßige Bewegung.

Wenn wir die Gleichungen (5) und (7) vergleichen, so können wir schließen, daß $f(q) = 0$ und $\psi(v', p') = 0$.¹⁾

Die Gleichung (7) wird dann so geschrieben:

$$(8) \quad E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left\{ M' c^2 - p' v' + \frac{p' v' q^2}{c^2} \right\}.$$

Nehmen wir hier $q = 0$ an, dann finden wir $E' = M' c^2 - p' v'$ und

$$M' = \frac{E' + p' v'}{c^2}.$$

Setzen wir jetzt die Größe von M' in die Gleichung (3) und (8) ein. Dann haben wir:

$$G = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \frac{E' + p' v'}{c^2}, \quad E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \left\{ E' + \frac{p' v' q^2}{c^2} \right\}.$$

Diese beiden Gleichungen stellen die bekannten Formeln von M. Planck für den Impuls und die Energie des bewegten Körpers dar.

Moskau, Februar 1912.

1) Eliminieren wir E aus den Gleichungen (5) u. (7), dann haben wir:

$$f(q) + \{E' + p' v' - M' c^2\} \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} = \psi(v', p').$$

Da $f(q)$ Funktion nur von q , $\psi(v', p')$ Funktion nur von v', p' ist, so kann man diese Identität nur auf zweierlei Art befriedigen: erstens, wenn $f(q) = \text{const.}$ und $E' + p' v' - M' c^2 = 0$; zweitens, wenn $f(q) = A \cdot \sqrt{1 - q^2/c^2}$, wo A eine Konstante ist, und $E' + p' v' - M' c^2 + A = 0$. Setzen wir $f(q)$ in die Gleichung (5) ein, und gehen zu dem Fall, daß $q = 0$ und folglich $E = E'$ ist, über. Dann finden wir, daß im ersten Falle $\text{const.} = 0$ und in dem zweiten $A = 0$, d. h. in beiden Fällen $f(q) = 0$ und folglich $\psi(v', p') = 0$ ist.

(Eingegangen 15. Februar 1912.)