TEOREMI SUI POLIGONI DI STEINER

INSCRITTI IN UNA CURVA DI TERZO ORDINE,

Nota di V. Martinetti, in Messina.

Adunanza dell'8 marzo 1891

1. Siano P e P' due punti distinti di una curva piana di terzo ordine, C_3 .

Consideriamo sulla curva un punto arbitrario A_1 e diciamo A_2 l'ulteriore intersezione di C_3 colla retta PA_1 , A_3 l'ulteriore intersezione di C_3 colla retta $P'A_2$, A_4 la residua intersezione di C_3 colla retta PA_3 , e così di seguito. Otteniamo in tal modo sulla C_3 la serie di punti

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots,$$

vertici consecutivi di una spezzata, i cui lati passano alternativamente per P e P' e che chiameremo una *spezzata di Steiner* relativa alla coppia P, P' di punti *fondamentali*, e la indicheremo col simbolo.

$$\begin{array}{l} P \mid A_1 A_2, A_3 A_4, A_5 A_6, \dots, A_{2i-1} A_{2i}, \\ P' \mid A_2 A_3, A_4 A_5, A_6 A_7, \dots, A_{2i} A_{2i+1}, \end{array}$$

Per i due punti considerati, P e P' , sono allora possibili due casi soltanto (I teorema di Steiner) (*)

(*) J Steiner, « Geometrische Lehrsätze » (Giornale di Crelle, vol XXXII, pag 182)

A Clebsch, « Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven 3^{ter} Ordnung » (Giornale di Crelle-Borchardt, vol LXIII, pag 94)

K Küpper, « Ueber die Steiner'schen Polygone auf einer Curve 3^{ter} Ordnung, etc » (Math. Ann, Bd. XXIV, S 1)

P. H Schoute, « Die Steiner'schen Polygone » (Giornale di Crelle Kronecker, vol XCV, pag 105)

1) Per quanto grande si prenda il numero dei vertici della spezzata, e comunque si scelga il primo vertice, essa non si *chiude* mai [ossia non è mai il punto A_{2n+1} coincidente con A_1 , per alcun valore di $n (> 0)$ ed alcuna posizione di A_1],

2) ovvero, essa si chiude sempre, qualunque sia il punto di partenza A_1 e dopo aver considerato lo stesso numero $2n$ di vertici

In quest'ultimo caso si ottiene un poligono semplice (detto di *Steiner*) di $2n$ vertici, i cui lati passano alternativamente per P e P' , e noi chiameremo allora P, P' una *coppia Steineriana* (o di *Steiner*) d'ordine n

2. Se immaginiamo di continuare indefinitamente la denominazione, sopra accennata, di una spezzata di *Steiner*, e se immaginiamo ancora questa spezzata continuata in senso opposto (dicendo cioè A_0 il punto di C_3 allineato con $P' A_1$, A_{-1} quello allineato con $P A_0$, ecc.), quando la spezzata si chiude, se PP' cioè è una coppia Steineriana d'ordine n , per ogni valore intero di x e $x+1$ simboli

$$A_1, \quad A_{1+2xn}$$

rappresentano il medesimo punto della cubica (scriveremo $A_1 \equiv A_{1+2xn}$). Per la qual cosa ogni vertice di un $2n$ gono di *Steiner* può essere indicato da infiniti simboli A_i , gli indici dei quali sono fra loro congruenti rispetto al modulo $2n$

In certe circostanze sarà utile immaginare così rappresentati i poligoni di *Steiner*

Varii ed interessanti teoremi si conoscono sui poligoni di *Steiner*, fra questi in particolare due, per quali si possono dedurre da coppie Steineriane di punti delle nuove coppie Steineriane. Sono questi il *teorema di Clebsch*, che permette di trovare infinite coppie Steineriane d'ordine n quando ne sia data una (*), ed il *II teorema di Steiner* (*Verdoppelungstheorem*) (**) col quale si possono trovare coppie Steineriane d'ordine $2^n n$ quando si conosca una coppia di *Steiner* d'ordine n , e viceversa

(*) Clebsch, l. c., pag. 108. Vedi anche Kuppel e Schoute, l. c. e H. Schroeter, *Theorie der ebenen Curven 3ter Ordnung* (Leipzig, 1888) § 31

(**) Steiner, l. c.

Un teorema, che dimostreremo in questa Nota, permetterà di dedurre coppie di Steiner d'ordine n quando si conoscano coppie Steineriane, i cui ordini $n_1, n_2, \dots, n_x$ abbiano per minimo comune multiplo il numero n

3. LEMMA — Se si hanno due spezzate di Steiner relative ai medesimi punti fondamentali P, P' , cioè

$$\begin{array}{l|l} P & A_{-1}A_0, A_1A_2, A_3A_4, \dots, A_{2i-1}A_{2i}, \dots \\ P' & \dots A_0A_1, A_2A_3, A_4A_5, \dots, A_{2i}A_{2i+1}, \dots \end{array}$$

e

$$\begin{array}{l|l} P & \dots B_{-1}B_0, B_1B_2, B_3B_4, \dots, B_{2i-1}B_{2i}, \dots \\ P' & B_0B_1, B_2B_3, B_4B_5, \dots, B_{2i}B_{2i+1}, \dots \end{array}$$

le congiungenti le coppie di punti

$$A_{2i-1}B_{2i+2x},$$

che si ottengono dando ad i tutti i valori interi, passano per uno stesso punto Q_x della cubica, come pure passano per un medesimo punto Q'_x della cubica le congiungenti le coppie di punti

$$A_{2i}, B_{2i+1+2x}$$

$$(\text{per } i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots),$$

ed i due punti Q_x, Q'_x (relativi al medesimo valore di x) sono allineati coll'ulteriore intersezione di C_3 colla retta PP' .

Infatti Le due terne di punti di C_3

$$P, A_{2j-1}, A_{2j}, \quad P', B_{2j+2x}, B_{2j+1+2x},$$

sono in linea retta, e lo sono anche le due altre terne

$$P, B_{2j+1+2x}, B_{2j+2+2x}, \quad P', A_{2j}, A_{2j+1},$$

quindi, per un notissimo teorema (teorema del fascio) (*), se A_{2j} è diverso da B_{2j+2x} (e quindi sempre A_i diverso da B_{i+2x} per ogni valore di i), come possiamo supporre, perchè nella ipotesi contraria il teorema è evidente, abbiamo, che le due rette

$$A_{2j-1}B_{2j+2x}, A_{2j+1}B_{2j+2+2x}$$

(*) PLÜCKER, « Analytisch-geometrische Entwicklungen », I Bd (Essen 1828), p. 229. Vedi anche CREMONA, « Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane » (Mem. dell'Acc. di Bologna, 1^a serie, tom. XII), art. 8, n° 41, ed art. 9, n° 45, c).

passano per uno stesso punto Q_x della cubica, pel quale passano allora evidentemente tutte le rette

$$A_{2i-1} B_{2i+2x},$$

che si ottengono dando ad i tutti i possibili valori interi

Analogamente si trova, che le rette

$$A_{2i} B_{2i+1+2x}$$

passano per uno stesso punto Q'_x della cubica

Finalmente avendosi fra gli otto punti

$$P, P', Q_x, Q'_x, A_{2i-1}, A_{2i}, B_{2i+2x}, B_{2i+1+2x}$$

i quattro allineamenti

$$P A_{2i-1} A_{2i}, \quad P' B_{2i+2x} B_{2i+1+2x},$$

$$Q_x A_{2i-1} B_{2i+2x}, \quad Q'_x A_{2i} B_{2i+1+2x},$$

segue, che le rette PP' , $Q_x Q'_x$ devono passare per lo stesso punto della cubica c. v. D

Questo teorema si può applicare a due spezzate coincidenti, non solo, ma anche a poligoni di Steiner distinti o coincidenti, e si hanno allora come casi particolari vari teoremi noti (*)

4 Siano P, P' due punti fondamentali per $2n$ -goni di Steiner, e

$$P \mid A_1^1 A_2^2, A_2^1 A_3^3, A_3^1 A_4^4, \dots, A_n^1 A_1^2,$$

$$P' \mid A_2^2 A_1^1, A_3^3 A_2^1, A_4^4 A_3^1, \dots, A_1^2 A_n^1$$

sia uno di questi $2n$ -goni Siano poi P' e P_i punti fondamentali per $2m$ -goni di Steiner ed indichiamo con

$$P' \mid A_1^1 A_i^2, A_i^3 A_1^4, \dots, A_i^{2m-1} A_1^{2m},$$

$$P_i \mid A_1^2 A_i^3, A_i^4 A_1^5, \dots, A_i^{2m} A_1^1$$

il $2m$ -gono, relativo ad essi, ed avente A_i^1 tra i suoi vertici Di questi $2m$ -goni ne avremo n Imaginiamo indicati, per comodo, gli $n+1$ poligoni di Steiner sopra nominati in modo analogo a quello considerato al n° 2, sicchè le rette (per ogni valore intero di i e λ)

$$A_i^1 A_{i+\lambda}^2 \text{ passano tutte per } P, \text{ le rette}$$

$$A_i^{2x-1} A_i^{2x} \text{ passano per } P', \text{ e le}$$

$$A_i^{2x} A_{i+1}^{2x+1} \text{ passano per } P_i$$

Allora, per il Lemma del numero 3, noi avremo ancora, che per il punto P passano tutte le rette

$$A_i^{2x-1} A_{i+1}^{2x},$$

(*) Vedi i lavori citati, specialmente quelli di Küpper e Schroeter.

che si ottengono dando ad z e x ogni valore intero

Infatti basta considerare i $2m$ -goni aventi P' e P_1 per punti fondamentali, e per vertici rispettivamente A_i^1 , A_{i+1}^1 , ed osservare, che la congiungente i punti $A_i^1 A_{i+1}^2$ passa per P , per concludere, che sono allineate con P tutte le coppie di punti A_i^{2x-1} , A_{i+1}^{2x}

Si osservi, che supponendo, come facciamo, che P , P' , P' , P_1 siano coppie Steineriane proprie degli ordini n , m (cioè non contemporaneamente coppie di ordini sottomultipli di n ed m) ed A_i^1 un punto arbitrario, deve essere A_i^x diverso da $A_{i'}^x$ se non è $x \equiv x' \pmod{2m}$ e deve essere A_i^x diverso da $A_{i'}^x$ se non è $i \equiv i' \pmod{n}$ e che quindi in generale sarà A_i^x diverso da $A_{i'}^{x'}$ se non è

$$i \equiv i' \pmod{n} \quad \text{e} \quad x \equiv x' \pmod{2m}$$

Costruendo ora la spezzata di Steiner coi punti fondamentali P , P_1 , e col vertice A_i^1 avremo

$$\begin{array}{l} P \mid A_1^1 A_2^2, A_2^3 A_3^4, A_3^5 A_4^6, \quad, A_{i-1}^{2i-1} A_{i+1}^{2i}, \dots, \\ P_1 \mid A_2^2 A_3^3, A_3^4 A_4^5, A_4^6 A_5^7, \dots, A_{i+1}^{2i} A_{i+2}^{2i+1}, \dots \end{array}$$

E ciò dimostra, che questa spezzata necessariamente si chiude, e si chiuderà in generale (*) la prima volta, per $i=p$, se p è il minimo comune multiplo di m ed n

Donde il teorema

« Se P , P' , P , P_1 sono coppie di Steiner proprie degli ordini n , m , P , P_1 formano una coppia Steineriana (in generale propria) d'ordine eguale al minimo comune multiplo di m ed n »

5 Sia P , P_1 una coppia (propria) di Steiner d'ordine p e si abbia $p = m n$, con m ed n primi fra loro

Il poligono di Steiner avente per vertice un punto arbitrario A_i^1 di C_3 , e relativo a P , P_1 sia .

$$\begin{array}{l} P \mid A_1^1 A_2^2, A_2^3 A_3^4, \quad, A_{x-1}^{2x-1} A_{x+1}^{2x}, \quad, A_{p-1}^{2p-1} A_1^{2p}, \\ P_1 \mid A_2^2 A_3^3, A_3^4 A_4^5, \quad, A_{x+1}^{2x} A_{x+2}^{2x+1}, \quad, A_i^{2p} A_1^{2p}, \end{array}$$

il quale, per l'arbitrarietà di A_i^1 , e perchè P , P_1 è una coppia propria, avrà tutti i vertici distinti

(*) Diciamo in generale, perchè, se per coppie speciali di Steiner fosse $A_i^x \equiv A_{i'}^{x'}$ e non contemporaneamente $i \equiv i' \pmod{n}$, $x \equiv x' \pmod{n}$, la spezzata sopra costruita potrebbe anche chiudersi prima

Immaginiamo di sostituire ad ogni indice superiore delle A quel numero positivo $e \equiv 2m$ congruo ad esso rispetto al modulo $2m$: Così facendo, gl'indici superiori delle A restano soltanto i numeri $1, 2, \dots, 2m$, e precisamente, considerando i vertici del poligono nell'ordine $A_1^1 A_2^2 A_3^3 A_4^4 A_5^5 \dots A_p^{2p-1} A_1^p$, essi si possono distribuire in n gruppi di $2m$ vertici consecutivi i cui indici superiori siano $1, 2, \dots, 2m$.

Immaginiamo ancora di sostituire a ciascuno degl'indici inferiori delle A il numero (positivo) $\equiv n$ congruo ad esso rispetto al modulo n : I vertici del poligono sopra considerato si potranno allora distribuire in m gruppi di $2n$ vertici consecutivi i cui indici inferiori siano ordinatamente $1, 2, 2, 3, 3, 4, \dots, n, n, 1$.

In questo modo ogni vertice del poligono viene ad essere indicato da A_i^x dove i e x sono rispettivamente non superiori ad n e $2m$.

Due vertici diversi del poligono vengono indicati in questa maniera da simboli diversi. Infatti, se i due vertici distinti $A_x^y, A_{x'}^{y'}$, secondo la primitiva denominazione (indicati adunque da simboli diversi), fossero, secondo la nuova, designati dallo stesso simbolo A_i^x , dovrebbe essere:

$$r + 2hm = y, \quad s + kn = x,$$

$$r + 2h'm = y', \quad s + k'n = x':$$

donde:

$$y \equiv y' \pmod{2}.$$

Ma, se y ed y' sono pari, deve essere.

$$x = \frac{y}{2} + 1, \quad x' = \frac{y'}{2} + 1,$$

e, se sono dispari, deve essere:

$$x = \frac{y+1}{2}, \quad x' = \frac{y'+1}{2}$$

ed in ogni caso risulta.

$$x - x' = \frac{y - y'}{2} = (h - h')m = (k - k')n,$$

condizioni incompatibili con quelle supposte, cioè. che h e k siano di-

versi da h' e k' , che h ed h' siano positivi e minori di n , che k e k' siano positivi e minori di m e finalmente che m ed n siano primi fra loro.

Essendo poi $2mn$ i vertici del poligono risulta, che ponendo nel simbolo A_i^x $i = 1, 2, \dots, n$, $x = 1, 2, \dots, 2m$, si ottengono tutti e soli i simboli dei vertici del poligono

In particolare, il vertice A_2^1 sarà stato indicato nella primitiva designazione da A_{2+bn}^{1+2am} , essendo a, b quei due numeri positivi, interi, minori rispettivamente di n ed m , per quali si ha:

$$am = bn + 1 \quad (*)$$

Per il Lemma del n° 3 avremo allora che tutte le rette (per α qualunque)

$$A_{2+x}^{2+2x} \quad A_{2+x}^{1+2x}$$

(dove si intende diminuito di $2m$ l'indice superiore e di n quello inferiore, successivamente fino a che essi non superino rispettivamente $2m$ ed n) passano per un medesimo punto P' della cubica, sicchè dando a α tutti i valori della forma $j am + j' bn$ si trova, che le rette

$$A_i^{2x-1} \quad A_i^{2x} \quad (\text{per } i = 1, 2, \dots, n, x = 1, 2, \dots, m)$$

passano per un medesimo punto P' della cubica

Costruendo la spezzata di Steiner avente per origine A_i^1 e per punti fondamentali P, P' avremo

$$\begin{array}{l} P \mid A_1^1 A_2^2, A_2^1 A_3^2, \dots, A_i^1 A_{i+1}^2, \\ P' \mid A_2^2 A_1^1, A_3^2 A_2^1, \dots, A_{i+1}^2 A_i^1, \dots \end{array}$$

Questa spezzata si chiude necessariamente e per la prima volta quando $i = n$, dunque P, P' è una coppia di Steiner d'ordine n

Considerando invece la spezzata di Steiner avente P', P_i per punti fondamentali ed A_i^1 per origine, otteniamo

$$\begin{array}{l} P' \mid A_i^1 A_i^2, A_i^1 A_i^3, \dots, A_i^{2x-1} A_i^{2x}, \dots \\ P_i \mid A_i^2 A_i^1, A_i^3 A_i^1, \dots, A_i^{2x} A_i^{2x+1}, \dots \end{array}$$

(*) Una sola coppia deve esistere di tali numeri a, b , come risulta dal fatto ragionamento, e come del resto è noto dalla teoria delle congruenze *Vedi ad es Dirichlet, « Lezioni sulla teoria dei numeri »* (trad di A Faifofer, Venezia, 1881) § 18, e J A Serret, « *Cours d'Algèbre supérieure* (Paris, 1879, IV^e ed), tome II, chap I, n° 28;

la quale pure si chiude, e la prima volta per $\kappa = m$, però $P' P_1$ è una coppia Steineriana d'ordine m . Dunque

Se P, P_1 è una coppia di Steiner propria d'ordine p , e se $p \equiv m \pmod n$ con m, n primi fra loro, si può trovare un punto P' della cubica tale, che P, P' sia una coppia Steineriana propria d'ordine n , e P', P_1 una coppia propria d'ordine m

6 Sia P, P_1 una coppia di Steiner d'ordine p , e siano m, n due numeri non primi fra loro ed avverti p per minimo comune multiplo. Potremo ancora trovare un punto P' della cubica tale, che P, P' , P_1, P' risultino coppie Steineriane degli ordini m, n rispettivamente.

Diciamo infatti D il massimo comun divisore di m ed n , ed abbiati

$$m = m_1 D, \quad n = n_1 D$$

Spezziamo il numero D in due fattori m_2, n_2 primi fra loro e così, che m_2 risulti primo con n_1 , ed n_2 con m_1 , cosa sempre possibile, soltanto uno dei fattori potrebbe essere l'unità. Avremo adunque.

$$p = m_1 n_1 m_2 n_2,$$

$$m = m_1 m_2 n_2,$$

$$n = n_1 m_2 n_2$$

Sia ora P, P_{m_2} una coppia di Steiner d'ordine m_2 (*), e P_1, P_{n_2} una coppia Steineriana d'ordine n_2 , sicchè, pel teorema del n° 4, sarà P_{m_2}, P_{n_2} una coppia di Steiner d'ordine p . Ma p è uguale al prodotto dei due numeri $m_1 m_2, n_1 n_2$ primi fra loro, quindi (n° 5) esiste un

(*) Rispetto all'esistenza di questa coppia ed il modo di trovarla, si osservi, che se è dato il poligono

$$\begin{array}{l} P \\ P_1 \end{array} \left| \begin{array}{l} A_1 A_2, A_3 A_4, \quad, A_{2p-1} A_{2p} \\ A_2 A_3, A_4 A_5, \quad, A_{2p} A_1 \end{array} \right.$$

le rette $A_{2+2x}, A_{2x+1+2x}$ (per il Lemma del n° 3) passano per un medesimo punto P_x della cubica, ed allora la spezzata di Steiner

$$\begin{array}{l} P \\ P_x \end{array} \left| \begin{array}{l} A_1 A_2, \quad A_{2x+1} A_{2x+2}, A_{4x+1} A_{4x+2}, \\ A_2 A_{2x+1}, A_{2x+2} A_{4x+1}, A_{4x+2} A_{6x+1}, \end{array} \right.$$

(la quale si chiude sempre), se x è un divisore di p , diviene un poligono di Stei-

ner di $2 \frac{p}{\kappa}$ vertici, quindi, ecc

punto P' , pel quale P_{m_2} , P' , P_{n_2} , P' sono coppie Steineriane rispettivamente degli ordini n_1 , n_2 , m_1 , m_2 . Per il teorema del n° 4 sarà allora

P P' una coppia Steineriana d'ordine n_1 , n_2 , $m_2 = n$,

P_1 P' una coppia di Steiner d'ordine m_1 , m_2 , $n_2 = m$, c. v. d.

7. Per notorie proprietà del minimo comune multiplo di più numeri possiamo generalizzare nel seguente modo i teoremi sopra dimostrati:

« Se PP_1 , P_1P_2 , P_2P_3 , . . . , $P_{x-1}P'$ sono x coppie Steineriane degli ordini n_1 , n_2 , n_3 , . . . n_x (sopra una stessa cubica), PP' costituiscono una coppia di Steiner (in generale propria) dell'ordine n , essendo n il minimo comune multiplo dei numeri n_1 , n_2 , n_3 , . . . n_x ».

E reciprocamente:

« Se PP' è una coppia di Steiner d'ordine n , sopra una curva di terzo ordine e sono n_1 , n_2 , n_3 , . . . n_x , x numeri interi, maggiori di 1, aventi n per minimo comune multiplo, si possono trovare sulla curva $x - 1$ altri punti P_1 , P_2 , P_3 , . . . P_{x-1} in modo, che le PP_1 , P_1P_2 , P_2P_3 , . . . , $P_{x-1}P'$ siano coppie di Steiner rispettivamente degli ordini n_1 , n_2 , n_3 , . . . , n_x »

Da questi teoremi si possono dedurre vari corollari per quali resta facilitato lo studio delle relazioni esistenti tra i vertici di un poligono di Steiner qualunque, ed in generale tra gli elementi di tre gruppi connessi del Kupper (l. c.) In particolare si vede poi come basterebbe conoscere tutte le coppie di Steiner di ordine eguale alle potenze dei numeri primi, per avere tutte le possibili coppie Steineriane. Etc

8 La dimostrazione dei teoremi sopra enunciati si può dare ancora in modo molto semplice (non più elementare però come quello seguito sopra) ricorrendo alla rappresentazione delle coordinate x_1 , x_2 , x_3 di un punto variabile della cubica per mezzo di funzioni ellittiche di un parametro u (*)

(*) Nella citata memoria del Clebsch, lo studio dei poligoni di Steiner è appunto fatto seguendo questa via, ed è in questa memoria, che per la prima volta si trovano applicate le funzioni ellittiche allo studio dell'e curve di genere 1. Per questa applicazione si confronti anche il Clebsch-Lindemann « *Leçons sur la Géométrie* » (trad. francese, Parigi, 1880), tome II, chap II, § VII, alle notazioni del quale noi ci atterremo in seguito

Rappresentando una curva generale di terzo ordine per mezzo delle equazioni

$$\rho x_1 = \operatorname{sn}^3 u,$$

$$\rho x_2 = \operatorname{sn} u,$$

$$\rho x_3 = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

la condizione necessaria e sufficiente perchè due punti P, P' , di parametri u, u' , costituiscano una coppia Steineriana d'ordine n è.

$$u = u' + \frac{p\omega + q\omega'}{n},$$

dove p e q sono numeri interi non nulli entrambi (che si possono supporre positivi e minori di n) ed ω, ω' sono rispettivamente eguali a $2K, 2iK'$ (K, K' essendo le ordinarie costanti di Jacobi). Quando p, q, n non abbiano un fattore (intero) comune allora la coppia è propria.

Supponiamo ora che u, u', u_1 siano parametri di tre punti P, P', P_1 e che P, P' e P_1 costituiscano delle coppie di Steiner proprie degli ordini n, m rispettivamente.

Dovrà essere.

$$u = u' + \frac{p'\omega + q'\omega'}{n},$$

$$u' = u_1 + \frac{p_1\omega + q_1\omega'}{m}.$$

Quindi:

$$u = u_1 + \frac{p'\omega + q'\omega'}{n} + \frac{p_1\omega + q_1\omega'}{m}$$

Detto D il massimo comun divisore di m ed n e posto $n = n_1 D$, $m = m_1 D$, sarà

$$u = u_1 + \frac{(m_1 p' + n_1 p_1)\omega + (m_1 q' + n_1 q_1)\omega'}{m_1 n_1 D}$$

la quale relazione dimostra il teorema del n° 4

La coppia P, P_1 è in generale una coppia propria d'ordine $p = m, n, D$, ma potrebbe diventare, in casi particolari, una coppia d'ordine inferiore. Precisamente quando

$$m, p' + n, p_1, \quad m, q' + n, q_1, \quad p$$

avessero un fattore comune

Si noti in proposito, che tale fattore comune dovrebbe dividere necessariamente (come si vede subito) D , massimo comun divisore di m ed n . Dunque, se m ed n sono primi fra loro, P, P_1 è senza eccezione una coppia propria d'ordine m, n .

Si osservi ancora che se $m = n$, ed entrambi questi numeri sono pari, e se le coppie P, P', P', P_1 appartengono alla stessa classe (cioè $p' = p_1, q' = q_1$) (*) vale a dire una è proiezione dell'altra sulla cubica fatta da un certo punto della cubica stessa (nel nostro caso dal tangenziale di P') allora P, P_1 deve appartenere non all'ordine n , ma all'ordine $\frac{n}{2}$, e da questa osservazione nasce il II teorema di Steiner (n° 2).

9. Anche la dimostrazione del teorema del n° 5 [dal quale e dal precedente segue poi quella del teorema generale (n° 7)] è semplicissima.

Supposta P, P_1 , di parametri u, u_1 , una coppia propria d'ordine $p = m, n$ con m ed n primi fra loro, sarà.

$$u = u_1 + \frac{p_1 \omega + q_1 \omega'}{p}.$$

E, perchè m ed n sono primi fra loro, si potranno trovare quattro numeri p', p'_1, q', q'_1 interi e tali, che si abbia (**):

$$mp' - p_1 = np'_1, \quad mq' - q_1 = nq'_1,$$

(*) Clebsch, I c, pag 108

(**) Dirichlet, I c, § 22

ed allora il punto P' di parametro

$$u' = u - \frac{p' \omega + q' \omega'}{n}$$

(sicchè P, P' è una coppia di Steiner d'ordine n) insieme al punto P_1 forma una coppia Steineriana d'ordine m , perchè si ha :

$$u' = u_1 + \frac{p_1 \omega + q_1 \omega'}{p} - \frac{p' \omega + q' \omega'}{n},$$

ossia :

$$u' = u_1 - \frac{p'_1 \omega + q'_1 \omega'}{m}.$$

Messina, 28 febbrajo 1891

V. MARTINETTI.