Über das Verhalten der Ideale des Grundkörpers im Klassenkörper.

Von Ph. Furtwängler in Wien.

Einleitung. Von dem großen Satze, den Herr D. Hilbert¹⁾ über den Klassenkörper aufgestellt hat, sind alle Teile vollständig bewiesen bis auf eine Aussage: daß im Klassenkörper alle Ideale des Grundkörpers Hauptideale, d. h. Körperzahlen werden. Diese Tatsache ist von Herrn Hilbert im Falle der Klassenzahl $h=2$, vom Verfasser allgemeiner für alle Körper mit zyklischer Klassengruppe bewiesen.²⁾ In der folgenden Arbeit soll der nächst allgemeinere Fall erledigt werden, daß die Klassenzahl $h=l^2$ ist und die Klassengruppe zwei Basisklassen besitzt; l kann dabei gleich 2 sein oder eine ungerade Primzahl bedeuten.³⁾

Im § 1 wird zunächst allgemein gezeigt, daß, wenn der Grundkörper die Klassenzahl $h=2^2=4$ hat, alle seine Ideale im zugehörigen Klassenkörper wirkliche Zahlen werden. In den nächsten Paragraphen wird die Konstitution der Klassengruppe des Klassenkörpers und seiner Unterkörper im angegebenen Falle näher untersucht und insbesondere an zwei numerischen Beispielen gezeigt, daß die Klassenzahl des Klassenkörpers für unseren Fall sowohl ungerade als gerade sein kann. Danach sind einige Angaben von Herrn Hilbert über den Fall $h=4$ zu modifizieren.⁴⁾ Im letzten Paragraphen endlich wird der Fall $h=l^2$, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet, allgemein erledigt.

§ 1.

Der Grundkörper k habe das Klassensystem

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} (x=0, 1).$$

¹⁾ D. Hilbert, Über die Theorie der relativ Abelschen Zahlkörper. Gött. Nachr. 1898, p. 378, Satz 10.

²⁾ Ph. Furtwängler, Allgemeiner Existenzbeweis usw., Math. Ann. 63 (1906), p. 1 (§ 8).

³⁾ Im Falle $l=2$ wird angenommen, daß die Klassenzahl im weiteren und engeren Sinne gleich 4 sei.

⁴⁾ D. Hilbert, l. c. Satz 16b und Satz 16c (von letztem Satz das kursiv Gedruckte).

Es existieren dann in k zwei singuläre Primärzahlen ω_1, ω_2 , die resp. zu den Untergruppen $c_1^{x_1}$ und $c_2^{x_2}$ gehören, so daß der Klassenkörper von k durch:

$$Kk = (k, \sqrt{\omega_1}, \sqrt{\omega_2})$$

gegeben ist. Betrachten wir zunächst den Unterkörper des Klassenkörpers $K_1 = (k, \sqrt{\omega_1})$, so können wir, wie aus der allgemeinen Theorie des Klassenkörpers ¹⁾ folgt, sein Klassensystem durch

$$C^{F(S)}$$

darstellen; C bedeutet dabei eine Klasse aus K_1 , deren Relativnorm in k in c_1 fällt, und S ist die Substitution $\sqrt{\omega_1} | - \sqrt{\omega_1}$. Der Körper K_1 besitzt nun sicher einen ambigen Komplex, der entweder eine ambige Klasse enthalten kann oder nicht.

Enthält er eine ambige Klasse, so folgt aus der allgemeinen Theorie, daß zwei unabhängige Klassenverbände aus k in K_1 in die Hauptklasse übergehen, d. h. in diesem Falle gehen bereits sämtliche Klassen aus k in K_1 , um so mehr also in Kk in die Hauptklasse über.

Enthält der ambige Komplex keine ambige Klasse, so gehen nicht alle Klassen aus k in K_1 in die Hauptklasse über, sondern es gibt eine Klasse c in k , die in K_1 die Äquivalenz

$$A^{S-1} \sim c \not\sim 1$$

befriedigt, wo A eine Klasse des ambigen Komplexes bedeutet. In diesem Falle gehe ich durch Adjunktion von $\sqrt{\omega_2}$ zu K_1 zum Klassenkörper Kk über und zeige, daß bei dieser Adjunktion c in die Hauptklasse übergeht.

Nach der allgemeinen Theorie muß es in K_1 eine Klasse C_0 geben, die in K_1 nicht Hauptklasse ist und in Kk in die Hauptklasse übergeht. Mit C_0 gehen dann offenbar auch alle Klassen

$$C_0^{(S-1)^n} = C_n$$

in Kk in die Hauptklasse. Da die $(S-1)^{2te}$ symbolische Potenz einer Klasse gleichzeitig Quadrat einer Klasse ist, muß für einen gewissen Exponenten n

$$C_n^{q_n} \sim 1, \quad C_{n-1}^{q_n} \not\sim 1$$

sein, wo q_n eine ungerade Zahl bedeutet. Die Klasse C_{n-1} befriedigt dann in K_1 die Äquivalenz:

$$C_{n-1}^{q_n(S-1)} \sim 1, \quad C_{n-1}^{q_n} \not\sim 1.$$

Da nach Annahme keine ambige Klasse in K_1 existieren soll, muß $C_{n-1}^{q_n} \sim c$ gelten; es geht also c ebenfalls in Kk in die Hauptklasse über.

¹⁾ Ph. Furtwängler, l. c. § 6 und Gött. Nachr. 1907, § 4.

§ 2.

In diesem und dem folgenden Paragraphen soll die Konstitution der Klassengruppe des Klassenkörpers K/k und der unverzweigten Zwischenkörper zwischen Grundkörper und Klassenkörper genauer untersucht werden. Wir wählen zu diesem Zweck folgende Bezeichnungen. Der Grundkörper sei k mit der Klassengruppe

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \quad (x = 0, 1),$$

wobei wir noch die Klasse $c_1 c_2$ mit c_3 bezeichnen.

Es existieren dann drei unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf k :

$$K_1 = (k, \sqrt{\omega_1}) \text{ zur Klassengruppe } 1, c_1 \text{ gehörig,}$$

$$K_2 = (k, \sqrt{\omega_2}) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 1, c_2 \quad \text{,,}$$

$$K_3 = (k, \sqrt{\omega_3}) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 1, c_3 \quad \text{,,} \quad .$$

Dabei sind $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ singuläre Primärzahlen in k und $\omega_3 = \omega_1 \omega_2$. Der Klassenkörper ist durch $(k, \sqrt{\omega_1}, \sqrt{\omega_2})$ bestimmt. Wir bezeichnen endlich folgende Substitutionen:

$$S_1 = \begin{vmatrix} \sqrt{\omega_1} & \sqrt{\omega_1} \\ \sqrt{\omega_2} & -\sqrt{\omega_2} \\ \sqrt{\omega_3} & -\sqrt{\omega_3} \end{vmatrix} \quad S_2 = \begin{vmatrix} \sqrt{\omega_1} & -\sqrt{\omega_1} \\ \sqrt{\omega_2} & \sqrt{\omega_2} \\ \sqrt{\omega_3} & -\sqrt{\omega_3} \end{vmatrix} \quad S_3 = \begin{vmatrix} \sqrt{\omega_1} & -\sqrt{\omega_1} \\ \sqrt{\omega_2} & -\sqrt{\omega_2} \\ \sqrt{\omega_3} & \sqrt{\omega_3} \end{vmatrix},$$

zwischen denen die Beziehung: $S_1 S_2 S_3 = 1$ besteht. Der Übergang vom Klassenkörper zum Körper K_i erfolgt dann durch symbolische Potenzierung mit $1 + S_i$.

Wir untersuchen zunächst die möglichen Fälle, die die Klassengruppe von K_1 bieten kann. Das Klassensystem von K_1 ist darstellbar in der Gestalt:

$$C_1^{F(S_2)},$$

wo C_1 eine Klasse bedeutet, deren Relativnorm in k in c_1 fällt, und wobei ein- für allemal verabredet werden soll, daß als Einheits- element der Klassengruppe das System aller Klassen mit ungeradem Exponenten angenommen wird. Wir haben nun mehrere Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I. } C_1^2 \sim 1.$$

a) $C_1^{2^s-1} \sim 1$. In diesem Falle existiert in K_1 eine ambige Klasse und es gehen daher alle Klassen aus k bereits in K_1 in die Hauptklasse über. Das Klassensystem von K_1 ist in diesem Falle:

$$C_1^x \quad (x = 0, 1)$$

und die Klassenzahl von Kk wird ungerade. Aus dem letzten Umstande ergibt sich sofort, daß in unserem Falle auch die Klassenzahlen von K_2 und K_3 gleich 2 sein müssen und daß auch in diesen Körpern sämtliche Klassen aus k in die Hauptklasse übergehen.

b) $C_1^{S_2-1} \not\sim 1$. Es existiert jetzt keine ambige Klasse in K_1 und daher geht jetzt nur eine Klasse aus k in K_1 in die Hauptklasse über; es gilt nämlich:

$$c_1 \sim C_1^{S_2+1} \sim C_1^{S_2-1} \not\sim 1.$$

Das Klassensystem in K_1 bildet jetzt keine zyklische, sondern eine Abelsche Gruppe mit zwei Basisklassen:

$$C_1^x c_1^y (x, y = 0, 1).$$

Die Klassenzahl von Kk ist eine gerade Zahl.

$$\text{II. } C_1^2 \not\sim 1.$$

Da die Relativnorm von C_1^2 in k in die Hauptklasse fällt, muß C_1^2 der $(S_2 - 1)^{\text{ten}}$ Potenz einer Klasse äquivalent sein, d. h. es muß eine Äquivalenz gelten:

$$C_1^2 \sim C_1^{m(S_2-1)},$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet. Die Zahl m muß ungerade sein; denn wäre $m = 2m_1$, so würde folgen:

$$C_1^2 \sim C_1^{2m_1(S_2-1)} \sim C_1^{2m_1^2(S_2-1)^2} \sim C_1^{2m_1^3(S_2-1)^3} \dots \sim 1,$$

was nach Annahme ausgeschlossen ist. Ist nun:

$$C_1^{2^n} \sim 1,$$

so folgt aus der vorletzten Äquivalenz:

$$C_1^{S_2-1} \sim C_1^{2^{m'}},$$

wenn man m' aus der Kongruenz:

$$m m' \equiv 1 (2^n)$$

bestimmt.

Es liegt also in unserem Falle $C_1^{S_2-1}$ bereits im Hauptverbande und daher kann nur ein unabhängiger Klassenverband in K_1 existieren; das Klassensystem von K_1 wird

$$C_1^x (x = 0, 1, \dots, 2^n - 1) \quad (n > 1).$$

Die Klassenzahl von Kk ist wiederum gerade.

§ 3.

Es soll jetzt untersucht werden, in welcher Kombination die Fälle Ia, Ib, II des vorigen Paragraphen bei den Körpern K_1 , K_2 , K_3 auftreten können.

Wenn der Fall Ia bei einem der drei Körper eintritt, so tritt er bei allen dreien auf, wie ohne weiteres aus der Tatsache folgt, daß die Klassenzahl von Kk in diesem Falle ungerade ist.

Wir können daher jetzt annehmen, daß der Fall Ia bei keinem der drei Körper K_i eintritt, und wollen zunächst zeigen, daß die Klassengruppe von Kk in jedem Falle zyklisch ist. Liegt in einem der Körper K_i der Fall II vor, so ist seine Klassengruppe zyklisch und bleibt es daher auch beim Übergang zu Kk , wie aus der allgemeinen Theorie des Klassenkörpers folgt. Wir haben also nur noch den Fall zu erwägen, daß bei allen drei Körpern K_i der Fall Ib eintritt (was nicht möglich ist, wie sich später zeigen wird). Beim Übergang von K_i zu Kk könnte dann wieder der Fall Ib vorliegen und so ein Klassensystem

$$D^x E^y (x, y = 0, 1)$$

in Kk liefern. Es dürfte dann kein ambiger Komplex mit ambiger Klasse in Kk bezüglich K_1, K_2, K_3 existieren. Daraus würde folgen, daß alle Klassen:

$$1, D, S_1 D, S_2 D, S_3 D$$

verschieden sein müßten, was bei unseren Annahmen ausgeschlossen ist, da nur vier verschiedene Klassen in Kk existieren. Daraus folgt aber, daß die Klassengruppe von Kk zyklisch sein muß, da eine andere Annahme zu einem Widerspruch führt.

Es existiert also ein unverzweigter relativquadratischer Körper in bezug auf Kk :

$$K' = (Kk, \sqrt{\Omega}),$$

der nach der allgemeinen Theorie nicht relativ Abelsch in bezug auf k sein kann.¹⁾ Dagegen ist er ein relativ Galoischer Körper bezüglich k ; denn da nur eine Art singulärer Primärzahlen in Kk existieren kann und $S_1 \Omega$, $S_2 \Omega$, $S_3 \Omega$ zugleich mit Ω singuläre Primärzahlen sind, muß gelten:

$$S_i \Omega = A_i^2 \Omega \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo die Zahlen A_i dem Körper Kk angehören. Durch Bildung der Relativnorm in bezug auf K_i folgt:

$$A_i^{1+S_i} = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

¹⁾ Ph. Furtwängler, Eine charakteristische Eigenschaft des Klassenkörpers, Gött. Nachr. 1906 und 1907.

Ich will nachweisen, daß

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = -1$$

sein muß. Sind alle drei Zahlen $\varepsilon_i = -1$, so ist die Beziehung erfüllt; es sei also etwa $\varepsilon_1 = +1$.

Da jetzt $A_1^{1+S_1} = 1$, ist $A_1 = B_1^{1-S_1}$, wo B_1 eine Zahl aus Kk ist. Es gilt also:

$$S_1(\Omega B_1^2) = \Omega B_1^2,$$

d. h. ΩB_1^2 ist eine Zahl aus K_1 . Da man ΩB_1^2 an Stelle von Ω setzen kann, kann man also auch Ω als Zahl aus K_1 wählen. In diesem Falle ist dann die Klassengruppe von K_1 nicht zyklisch, sondern Abelsch mit zwei Basisklassen, da in K_1 zwei unabhängige singuläre Primärzahlen ω_2, Ω existieren. Umgekehrt gilt auch, daß $\varepsilon_1 = +1$ sein muß, wenn man Ω als Zahl aus K_1 wählen kann, denn es ist dann $A_1 = 1$.

Es sei also Ω jetzt eine Zahl aus K_1 , daher $A_1 = 1$; wir haben nachzuweisen, daß dann $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3$ ist. Es gilt jetzt:

$$S_1 \Omega = \Omega, \quad S_2 \Omega = A_2^2 \Omega, \quad S_3 \Omega = A_3^2 \Omega.$$

Daraus folgt:

$$S_3 \Omega = S_1 S_2 \Omega = S_1 A_2^2 \Omega$$

$$S_3 \Omega = S_2 S_1 \Omega = A_2^2 \Omega.$$

Damit der Körper K' kein Abelscher in bezug auf k sei, muß gelten:

$$A_2 = -S_1 A_2 = A_3.$$

Es wird also:

$$\varepsilon_3 = A_3^{1+S_3} = A_2^{1+S_1 S_2} = A_2 \cdot (-S_2 A_2) = -A_2^{1+S_2} = -\varepsilon_2.$$

Es ist also in jedem Falle:

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = -1$$

und, abgesehen von Indizesvertauschungen, ergeben sich daher nur die beiden Möglichkeiten:

$$\varepsilon_1 = -1, \quad \varepsilon_2 = -1, \quad \varepsilon_3 = -1$$

$$\varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = +1, \quad \varepsilon_3 = -1.$$

Nach dem, was oben ausgeführt ist, heißt das aber auf die Körper K_i übertragen, daß entweder bei allen drei Körpern der Fall II des vorigen Paragraphen eintreten muß oder nur bei einem.

Aus unseren bisherigen Ausführungen ergeben sich demnach folgende drei Typen:

Typus *A*: Klassenzahl von Kk ungerade.

Klassensysteme von:

$$\begin{array}{c|c|c} K_1 & K_2 & K_3 \\ C_1^x & C_2^x & C_3^x \\ c_1 \infty c_2 \infty c_3 \infty 1 & c_1 \infty c_2 \infty c_3 \infty 1 & c_1 \infty c_2 \infty c_3 \infty 1 \end{array} \quad (x = 0, 1).$$

Typus *B*: Klassenzahl von Kk gleich 2; alle drei Körper K_i haben zyklische Klassengruppen:

Klassensysteme von:

$$\begin{array}{c|c|c} K_1 & K_2 & K_3 \\ C_1^x & C_2^x & C_3^x \\ c_1 \infty 1, c_2 \infty c_3 \not\infty 1 & c_2 \infty 1, c_1 \infty c_3 \not\infty 1 & c_3 \infty 1, c_1 \infty c_2 \not\infty 1 \end{array} \quad (x = 0, 1, 2, 3).$$

Zu diesem Schema sind noch einige Begründungen zu geben. Zunächst ist klar, daß die Klassenzahl in allen drei Körpern K_i dieselbe sein muß, da sie das Doppelte der Klassenzahl von Kk ist; sie sei etwa gleich 2^n . Der Klassenkörper K^2k von Kk ist dann gleichzeitig Klassenkörper von K_1, K_2, K_3 und vom Relativgrad 2^n bezüglich dieser. Ist nun $\mathfrak{p}_1$ ein Primideal aus c_1 , so zerfällt dies in K_1 in zwei verschiedene Faktoren, die dann beim Übergang nach K^2k nicht mehr zerlegt werden. Es zerfallen also alle Primideale aus c_1 in K^2k in zwei verschiedene Primfaktoren. Betrachten wir andererseits den Körper K_2 , so bleibt $\mathfrak{p}_1$ in ihm Primideal und geht entweder in die Hauptklasse oder in eine Klasse, deren Quadrat in die Hauptklasse fällt, über. Bei dem Übergang zum Körper K^2k zerfällt dann nach dem Zerlegungssatz für den Klassenkörper ¹⁾ $\mathfrak{p}_1$ in 2^n oder 2^{n-1} verschiedene Primfaktoren. Da diese Zahl 2 sein muß und $n > 1$ ist, kann der erste Fall überhaupt nicht eintreten, sondern es muß der zweite Fall stattfinden mit $n = 2$. Es gilt dann also in K_2 : $c_1 \infty c_2^2 \not\infty 1$.

Indem man dieselben Überlegungen für alle übrigen Klassen und Körper durchführt, kommt man zur Begründung aller Angaben des Schemas.

¹⁾ Ph. Furtwängler, Allgem. Beweis d. Zerlegungssatzes usw. Gött. Nachr. 1911.

Typus C : Klassenzahl von Kk gleich 2^n ($n > 0$);
nur Körper K_3 hat zyklische Klassengruppe.

Klassensysteme von:

$$\begin{array}{c|c|c} K_1 & K_2 & K_3 \\ C_1^x c_1^y & C_2^x c_2^y & C_3^z \\ c_2 \infty 1, c_1 \infty c_3 \nmid 1 & c_1 \infty 1, c_2 \infty c_3 \nmid 1 & — \end{array}$$

$$(x, y = 0, 1 \quad z = 0, 1, \dots, 2^{n+1} - 1).$$

Zur Begründung des Schemas sei noch folgendes bemerkt:
Der Klassenkörper K^2k von Kk ist auch Klassenkörper für K_3 ;
in ihm werden daher die Primideale aus c_3 in zwei verschiedene
Faktoren zerlegt. Daraus folgt, daß c_3 in K_1 nicht in die Haupt-
klasse übergehen kann, weil sonst die Primideale aus c_3 in K^2k
in mehr als zwei Primfaktoren zerfallen würden. Da auch $c_1 \nmid 1$
in K_1 , muß $c_2 \infty 1$ in K_1 sein. Entsprechendes gilt für K_2 .

Für den speziellen Fall $n=1$ lassen sich auch über den
Körper K_3 noch genauere Angaben machen. Wir fügen daher noch
folgendes spezielle Schema hinzu:

Typus C , $n=1$: Klassenzahl von Kk gleich 2.

Klassensysteme von:

$$\begin{array}{c|c|c} K_1 & K_2 & K_3 \\ C_1^x c_1^y & C_2^x c_2^y & C_3^z \\ c_2 \infty 1, c_1 \infty c_3 \nmid 1 & c_1 \infty 1, c_2 \infty c_3 \nmid 1 & c_1 \infty c_2 \infty c_3 \infty 1 \end{array}$$

$$(x, y = 0, 1 \quad z = 0, 1, 2, 3).$$

Der Klassenkörper von K_1 repräsentiert jetzt den Typus A
und daher wird ein Primideal aus c_1 in K_1 in zwei Faktoren zer-
fallen, von denen jeder in K^2k nochmals in zwei Faktoren zerfällt;
die Primideale aus c_1 zerfallen also in K^2k in vier verschiedene
Primfaktoren. Aus diesem Grunde muß in K_3 : $c_1 \infty 1$ gelten. In
entsprechender Weise schließt man mit Hilfe des Körpers K_2 , daß
auch $c_3 \infty 1$ in K_3 ist.

Daß die hier aufgestellten Typen in Wirklichkeit alle vor-
kommen, ergeben die bisherigen Ausführungen nicht. Dies soll in
den nächsten Paragraphen dadurch gezeigt werden, daß für die
Typen A, B, C je ein Beispiel gegeben wird.¹⁾

¹⁾ Es ist auch gruppentheoretisch leicht zu zeigen, daß die beiden einzigen
nicht kommutativen Gruppen von der Ordnung 8 diejenigen sind, die der Relativ-
gruppe von K^2k bei dem Typus B und C mit $n=1$ entsprechen; Typus B
entspricht der Hamiltonschen Quaternionengruppe.

Wir notieren schließlich noch folgenden Satz, dessen Richtigkeit aus dem Vorstehenden folgt:

Satz: Konstruiert man zu einem Körper k , dessen Klassenzahl genau durch 4 teilbar ist, den Klassenkörper Kk und zu diesem wieder den Klassenkörper K^2k , so ist die Klassenzahl von K^2k ungerade und K^2k ist ein relativ Galois'scher Körper in bezug auf k . (Die Konstruktion der Klassenkörper bezieht sich dabei immer nur auf die Relativgrade, die eine Potenz von 2 sind.)

§ 4.

Wir geben zunächst ein Beispiel zu dem Typus A ; dies liefert der Körper $(\sqrt{-21})$ mit der Diskriminante -84 . Wir bestimmen zunächst seine Klassengruppe, indem wir die Zerlegung der Zahlen 2, 3, 5, 7 untersuchen ($\sqrt{84} < 10$).

Ihre Zerlegung in Primideale ist die folgende:

$$2 = \mathfrak{p}_2^2 \quad \mathfrak{p}_2 = (2, 1 + \sqrt{-21})$$

$$3 = \mathfrak{p}_3^2 \quad \mathfrak{p}_3 = (3, \sqrt{-21})$$

$$7 = \mathfrak{p}_7^2 \quad \mathfrak{p}_7 = (7, \sqrt{-21}) \quad \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_7 \approx 1$$

$$5 = \mathfrak{p}_5 \cdot \bar{\mathfrak{p}}_5 \quad \mathfrak{p}_5 = (5, 2 + \sqrt{-21}) \quad \mathfrak{p}_5^2 = 2 + \sqrt{-21} \approx 1.$$

Aus

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = (3 + \sqrt{-21})(3 - \sqrt{-21})$$

folgt

$$\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \approx \mathfrak{p}_5 \nmid 1;$$

denn $\mathfrak{p}_5$ kann nicht ≈ 1 sein, weil ± 5 nicht Norm einer Körperzahl aus $(\sqrt{-21})$ ist. Da $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_5$ nicht äquivalente Ideale sind, die nicht in der Hauptklasse liegen, ist die Klassenzahl von $(\sqrt{-21})$ gleich 4 und die Klassengruppe:

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \quad (x = 0, 1),$$

wobei die Bezeichnung der Klassen so gewählt sei, daß in

$$c_1 \quad \text{das Primideal } \mathfrak{p}_2$$

$$c_2 \quad " \quad " \quad \mathfrak{p}_3$$

$$c_1 c_2 \quad " \quad " \quad \mathfrak{p}_5$$

liegt.

Der Klassenkörper von $(\sqrt{-21})$ wird:

$$Kk = (\sqrt{-21}, \sqrt{-3}, \sqrt{-7}) = (i, \rho, \sqrt{7}),$$

wenn wir unter ρ eine primitive dritte Einheitswurzel verstehen.

Die Klassenzahl von Kk ist, wie wir jetzt zeigen wollen, ungerade und daher liegt Typus A vor.

Die Klassenzahl von (i) ist gleich 1; 3 ist primäres Primideal im Körper (i) und $-3 \equiv 1 \pmod{4}$ eine zugehörige Primärzahl; daher ist die Klassenzahl von (i, ρ) ungerade.¹⁾

Die Zahl 7 zerfällt in (i, ρ) in zwei nichtprimäre Primfaktoren:

$$7 = (2 + \sqrt{-3})(2 - \sqrt{-3}).$$

Daß $2 + \sqrt{-3}$ nicht primär ist, folgt, weil für die Einheit $i + \rho$ gilt:

$$\left(\frac{i + \rho}{2 + \sqrt{-3}}\right)_{(i, \rho)} = \left(\frac{-\rho}{2 + \sqrt{-3}}\right)_{(\rho)} = \left(\frac{-1}{2 + \sqrt{-3}}\right)_{(\rho)} = \left(\frac{-1}{7}\right) = -1.$$

Daher ist die Klassenzahl von $(i, \rho, \sqrt{7})$ ungerade.¹⁾

Daß der Typus A vorliegt, ergibt sich auch daraus, daß alle Ideale aus $(\sqrt{-21})$ bereits in K_1, K_2, K_3 Hauptideale werden, wie folgende Angaben zeigen:

$$\text{Körper } (\sqrt{-21}, \sqrt{-3}) = (\sqrt{7}, \sqrt{-3});$$

$$2 = (3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7}), \quad 3 = (\sqrt{-3})(-\sqrt{-3})$$

$$, \quad (\sqrt{-21}, \sqrt{-7}) = (\sqrt{3}, \sqrt{-7});$$

$$-2 = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}), \quad -3 = (\sqrt{3})(-\sqrt{3})$$

$$, \quad (\sqrt{-21}, \sqrt{21}) = (\sqrt{21}, i);$$

$$2 = (1 + i)(1 - i), \quad -3 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{21}}{2}.$$

§ 5.

Beispiele für die Typen B und C liefert uns die Untersuchung des Körpers $k(\sqrt{-195}) = k(\sqrt{-3 \cdot 5 \cdot 13})$. Wir stellen zunächst die Klassengruppe dieses Körpers fest, indem wir die Zerlegung von 2, 3, 5, 7, 11, 13 in k untersuchen.

¹⁾ Da die Anzahl der ambigen Komplexe gleich 1 ist; vgl. Ph. Furtwängler, Über die Reziprozitätsgesetze usw., Math. Ann. 58, p. 43.

3, 5, 13 gehen in der Diskriminante auf und werden daher in k Quadrate von Primidealen:

$$3 = p_3^2, \quad 5 = p_5^2, \quad 13 = p_{13}^2, \quad p_3 p_5 p_{13} \approx 1.$$

Von den noch übrigen Primzahlen 2, 7, 11 bleibt 2 wegen

$$-195 \equiv 5 \pmod{8}$$

Primzahl, während 7 und 11 zerlegt werden:

$$7 = p_7 \cdot \bar{p}_7, \quad p_7 = \left(7, \frac{1 + \sqrt{-195}}{2} \right), \quad p_7^2 = \frac{1 + \sqrt{-195}}{2} \approx 1,$$

$$11 = p_{11} \cdot \bar{p}_{11}, \quad p_{11} = \left(11, \frac{17 + \sqrt{-195}}{2} \right), \quad p_{11}^2 = \frac{17 + \sqrt{-195}}{2} \approx 1.$$

Ferner folgt aus:

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = \frac{15 + \sqrt{-195}}{2} \cdot \frac{15 - \sqrt{-195}}{2}, \quad \text{daß } p_3 p_5 p_7 \approx 1$$

und aus

$$55 = 5 \cdot 11 = \frac{3 + \sqrt{-195}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{-195}}{2}, \quad \text{daß } p_{11} p_5 \approx 1.$$

Da

$$p_3 \nmid p_5 \nmid p_7 \nmid 1$$

ist, ergibt sich aus dem Vorstehenden, daß die Klassenzahl von k gleich 4 ist und daß die Klassengruppe in der Gestalt:

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \quad (x = 0, 1)$$

geschrieben werden kann, wobei die Bezeichnung so gewählt sei, daß die Klassen $c_1, c_2, c_3 = c_1 c_2$ resp. die Primideale p_3, p_7, p_5 enthalten.

Der Klassenkörper Kk von k ist:

$$Kk = (\sqrt{-195}, \sqrt{-3}, \sqrt{5}) = (\sqrt{-3}, \sqrt{5}, \sqrt{13}).$$

Ich behaupte, daß seine Klassenzahl gerade ist, was man auf verschiedene Weise zeigen kann.

1. Beweis: Es gibt in Kk eine singuläre Primärzahl:

$$-1 + 2\sqrt{-3} \equiv 1 \pmod{4}.$$

$-1 + 2\sqrt{-3}$ ist das Quadrat des Ideals $\mathfrak{p} = (\sqrt{13}, -1 + 2\sqrt{-3})$; es ist also nur nachzuweisen, daß $-1 + 2\sqrt{-3}$ nicht Quadrat einer

Zahl aus Kk ist. Wir betrachten zu dem Zweck das Primideal $\mathfrak{P}_5 = \left(\sqrt{5}, \frac{1 + \sqrt{-39}}{2} \right)$, dessen Relativnorm im Körper $(\sqrt{-39})$ gleich $\mathfrak{p}'_5 = \left(5, \frac{1 + \sqrt{-39}}{2} \right)$ ist. Für dieses gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1 + 2\sqrt{-3}}{\mathfrak{P}_5} \right)_{Kk} &= \left(\frac{-1 + 2\sqrt{-3}}{\mathfrak{p}'_5} \right)_{(\sqrt{-3}, \sqrt{13})} = \\ &= \left(\frac{-1 + 2\sqrt{-3}}{5} \right)_{(\sqrt{-3})} = \left(\frac{13}{5} \right) = -1. \end{aligned}$$

Es kann also $-1 + 2\sqrt{-3}$ nicht Quadrat einer Zahl aus Kk sein, womit der gewünschte Beweis erbracht ist.

2. Beweis: Wir zeigen, daß die Klassenzahl von $(\sqrt{-39})$ gleich 4 und die Klassengruppe zyklisch ist, indem wir die Zerlegung der Zahlen 2, 3, 5 im Körper $(\sqrt{-39})$ prüfen. Es wird:

$$\begin{aligned} 2 &= \mathfrak{p}'_2 \cdot \bar{\mathfrak{p}}'_2 & \mathfrak{p}'_2 &= \left(2, \frac{1 + \sqrt{-39}}{2} \right) & \mathfrak{p}_2^4 &= \frac{5 + \sqrt{-39}}{2} \approx 1 \\ 3 &= \mathfrak{p}_3^2 & \mathfrak{p}'_3 &= (3, \sqrt{-39}) & \mathfrak{p}_3^2 &= 3 \approx 1 \\ 5 &= \mathfrak{p}'_5 \cdot \bar{\mathfrak{p}}'_5 & \mathfrak{p}'_5 &= \left(5, \frac{1 + \sqrt{-39}}{2} \right) & \mathfrak{p}_5^4 &= 1 - 4\sqrt{-39} \approx 1. \end{aligned}$$

Ferner schließt man aus:

$$\mathfrak{p}'_2 \cdot \mathfrak{p}'_5 = \frac{1 + \sqrt{-39}}{2}, \quad 12 = \frac{3 + \sqrt{-39}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{-39}}{2},$$

daß

$$\mathfrak{p}'_2 \mathfrak{p}'_5 \approx 1, \quad \mathfrak{p}_3^2 \approx 1.$$

Da überdies leicht festzustellen ist, daß nicht bereits $\mathfrak{p}_2^2 \approx 1$ ist, folgt, daß das Klassensystem von $k'(\sqrt{-39})$ in der Gestalt

$$c^x \quad (x = 0, 1, 2, 3)$$

darstellbar ist, wo die Klasse c so gewählt sei, daß $\mathfrak{p}'_5$ in ihr liegt.

Im Körper $K_3 = (\sqrt{-39}, \sqrt{5})$ wird dann $\mathfrak{p}'_5 = \mathfrak{P}_5^2$, wo $\mathfrak{P}_5$ die oben angegebene Bedeutung hat. Es ist dann sicher $\mathfrak{P}_5^8 \approx 1$, aber nicht bereits $\mathfrak{P}_5^2 \approx \mathfrak{p}'_5 \approx 1$, denn sonst würde durch Bildung der Relativnorm bezüglich $k'(\sqrt{-39})$ folgen, daß in k' $\mathfrak{p}_5^2 \approx 1$ gelten

müßte, was unmöglich ist. Es existiert also in K_3 eine Klasse mit dem Exponenten 4 und daher kann die Klassenzahl von

$$Kk = (K_3, \sqrt{13})$$

nicht ungerade sein.

Für die Körper K_1, K_2, K_3 gilt in unserem Falle folgendes:

K ö r p e r	Klassensystem	Verhalten der Ideale aus k
$K_1 = (\sqrt{-195}, \sqrt{13})$ $\left(\frac{13}{p_3}\right)_k = \left(\frac{13}{3}\right) = +1$	$C_1^x c_1^y \quad (x, y = 0, 1)$	$c_2 \approx 1, c_1 \approx c_3 \not\approx 1$
$K_2 = (\sqrt{-195}, \sqrt{-3})$ $\left(\frac{-3}{p_7}\right)_k = \left(\frac{-3}{7}\right) = +1$	$C_2^x c_2^y \quad (x, y = 0, 1)$	$c_1 \approx 1, c_2 \approx c_3 \not\approx 1$
$K_3 = (\sqrt{-195}, \sqrt{5})$ $\left(\frac{-39}{p_5}\right)_k = \left(\frac{-39}{5}\right) = +1$	$C_3^z \quad (z = 0, 1, \dots, 7)$	$c_3 \approx 1, c_1 \approx c_2 \not\approx 1$

Die Angaben dieser Tabelle folgen zum Teil aus den allgemeinen Untersuchungen des § 3, zum Teil sollen sie im folgenden bewiesen werden.

Da im Körper K_2 neben 5 noch die singuläre Primärzahl $-1 + 2\sqrt{-3} = (\sqrt{65}, 1 + 2\sqrt{-3})^2$ existiert, kann seine Klassengruppe nicht zyklisch sein; es muß daher der Klassenkörper von $k(\sqrt{-195})$ den Typus C repräsentieren. Daß dann die Klassengruppe von K_3 zyklisch sein muß, folgt daraus, daß in ihm eine Klasse mit dem Exponenten 4 existiert; daß die Klassenzahl von K_3 gleich 8 ist, muß noch bewiesen werden.

Nach den bisherigen Ausführungen kann diese Klassenzahl nur 4 oder 8 sein. Wäre sie gleich 4, so würde der Klassenkörper K^2k von K_1 oder K_2 oder K_3 in bezug auf K_1 und K_2 den Typus A repräsentieren; Primideale aus c_1 würden dann in K_1 in zwei verschiedene Primideale zerfallen und jedes von diesen würde in K^2k wieder in zwei verschiedene Primideale zerfallen, so daß also die Primideale aus c_1 in K^2k in vier verschiedene Primideale zerfallen würden; dasselbe würde von den Primidealen aus c_2 gelten. Dann müßte aber in K_3 :

$$c_1 \approx c_2 \approx 1$$

sein, was unmöglich ist, wie wir zeigen wollen.

Da der Körper K_3 unverzweigt vom Relativgrad 2 in bezug auf k ist, gilt für ihn unter Benützung der üblichen Bezeichnungen:¹⁾

$$v^* = m' - e_1 + 1.$$

Nun ist in unserem Falle $m' = 1$ und wegen

$$-1 = (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$$

auch $v^* = 1$. Es folgt also $e_1 = 1$, d. h. es kann nur ein unabhängiger Klassenverband aus k in K_3 in die Hauptklasse übergehen. Wegen $p_3 \infty 1$ in K_3 muß deshalb gelten:

$$c_3 \infty 1, c_1 \infty c_2 \nmid 1 \text{ in } K_3.$$

Gleichzeitig folgt, daß die Klassenzahl von K_3 gleich 8 ist.

Unsere Körper liefern uns auch ein Beispiel für den Typus B . Im Klassenkörper K^2k des Klassenkörpers Kk zerfallen die Primideale aus c_1 und c_2 in je vier verschiedene Primfaktoren, während die Primideale aus c_3 nur in zwei Faktoren zerfallen. In K^2k zerfallen daher alle Primideale aus K_1 , die nicht in der Hauptklasse liegen, in zwei verschiedene Primfaktoren, so daß der Klassenkörper von K_1 (oder K_2) den Typus B repräsentiert.

Wir haben daher folgende Zusammenstellung:

K ö r p e r	Klassenzahl	Klassenzahl des Klassenkörpers	Typus
$(\sqrt{-21})$	4	1	A
$(\sqrt{-195}, \sqrt{13})$	4	2	B
$(\sqrt{-195})$	4	4	C

§ 6.

Um den Fall zu erledigen, daß die Klassenzahl des Grundkörpers k gleich l^2 ist und seine Klassengruppe:

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \quad (x = 0, 1, \dots, l-1),$$

kann man ganz analog wie in § 1 verfahren, so daß ich mich kurz fassen kann. Zur Untergruppe $c_1^{x_1}$ der Klassengruppe von k gehört ein unverzweigter Körper K_1 vom Relativgrad l in bezug auf k , dessen Klassensystem in der Gestalt:

$$C_1^{F(S)}$$

¹⁾ Ph. Furtwängler, Über die Konstr. des Klassenkörpers usw., Gött. Nachr., 1903, p. 295, Satz 8.

darstellbar ist, wo C_1 eine Klasse aus K_1 bedeutet, deren Relativnorm in k in c_1 fällt und S eine erzeugende Substitution der Relativgruppe des Körpers K_1 bezüglich k ist. Enthält K_1 eine ambige Klasse, so wird bereits in K_1 :

$$c_1 \sim c_2 \sim 1.$$

Enthält K_1 keine ambige Klasse, so muß es doch in K_1 eine Klasse C' geben, die in K_1 nicht Hauptklasse ist, aber im Klassenkörper Kk von k in die Hauptklasse übergeht. Mit C' liegen dann auch alle Klassen $C_i = C'^{(S-1)^i}$ in Kk in der Hauptklasse. Da die symbolische $(S-1)^{l^e}$ Potenz auch wirkliche l^e Potenz einer Klasse ist, muß es dann einen Index n geben, so daß:

$$C_{n+1}^q \sim 1, \quad C_n^q \not\sim 1 \text{ in } K_1,$$

wo q einen zu l primen Exponenten bedeutet. Es ist dann

$$C_n^{q(S-1)} \sim 1,$$

und da keine ambige Klasse in K_1 existiert, muß

$$C_n^q \sim c \not\sim 1$$

gelten, wo c eine Klasse aus k bedeutet, die in K_1 nicht in der Hauptklasse liegt, aber in Kk in die Hauptklasse übergeht. Da bei dem Übergang von k nach K_1 stets auch ein Klassenverband in die Hauptklasse übergeht, so gehen also in jedem Falle alle Klassen aus k im Klassenkörper Kk in die Hauptklasse über.

Für die vorstehenden Betrachtungen ist es gleichgültig, ob der Grundkörper k eine primitive l^e Einheitswurzel enthält oder nicht, wenn auch die benützten Überlegungen zum Teil nur für den ersten Fall in meinen früheren Arbeiten durchgeführt sind; ihre Übertragung auf den zweiten Fall bietet keine Schwierigkeiten.