ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 13.

1. *Der elektrische Strom
in ionisierter Luft in einem ebenen Kondensator;
von Gustav Mie.*

1. Das, wodurch sich die elektrischen Ströme (Entladungen) in Gasen von den Strömen in Elektrolyten und Metallen so auffällig unterscheiden, ist hauptsächlich, daß sich in den Gasen wegen der langsamen Neubildung von Ionen durch den Strom selbst freie Ladungen anhäufen, während in den eigentlichen Leitern immer so überreichlich Ionen vorhanden sind, daß alle Ladungen, die sich etwa im Innern bilden wollten, sofort zerstreut werden. Berechnet man den Einfluß dieser inneren Ladungen auf das elektrische Feld, das den Strom erzeugt, so bekommt man in dem Falle plattenförmiger paralleler Elektroden eine auf den ersten Blick ganz einfach aussehende Differentialgleichung (6). Aber auf diese Differentialgleichung kann man merkwürdigerweise, wie mir Mathematiker von Fach bestätigt haben, von den Hilfsmitteln der modernen Analysis nichts anwenden. Nur, wenn die von mir mit κ bezeichnete GröÙe verschwindet, kann man, was übrigens schon J. J. Thomson bemerkt hat, die Integration auf eine Quadratur zurückführen. Will man das Feld wirklich berechnen, so muß man sich im allgemeinen auf Näherungsformeln beschränken. Ja auch so sind die Rechnungen noch sehr umständlich, wie man aus dem Folgenden sehen wird. Aus diesem Grunde sind sie wohl auch bisher noch nicht durchgeführt. Es scheint mir aber, daß es bei vielen Messungen doch wohl wichtig sein muß, eine gute Grundlage zur Ausrechnung der gesuchten Konstanten der Gasionen zu haben. Deswegen veröffentliche ich die folgenden Berechnungen, in denen ich allerdings, um zunächst überhaupt passende Ansätze für Näherungsformeln

zu gewinnen, einige Komplikationen fürs erste noch außer acht gelassen habe. Ich habe nämlich angenommen:

1. daß die Oberflächenwirkung der Elektroden auf die Ionisierung des Gases gegen die „Volumenionisierung“ vernachlässigt werden könne,

2. daß die Diffusion der Ionen vernachlässigt werden könne,

3. daß die Wirbelbewegungen des Gases (die natürlich eine Konvektion der Ionen bewirken) keinen wesentlichen Einfluß auf die Verteilung der freien Ladungen haben.

Die unter 1. und 2. genannten Wirkungen ließen sich jedenfalls (wenn nötig) ohne große Schwierigkeiten in die unten gegebenen Formeln noch einfügen. Die Wirbelbewegungen dagegen wird man wohl praktischer durch geeignete Versuchsanordnungen möglichst unschädlich zu machen suchen.

Ferner ist noch angenommen, daß die Stromstärken so klein sind, daß keine Ionisierung durch Ionenstoß in Betracht kommt.

Unter diesen Annahmen erhält man, wie schon bekannt ist, die Differentialgleichung (6). Damit aber über die von mir gewählten Bezeichnungen und Maßeinheiten keine Unklarheit bestehen möge, will ich diese Gleichung noch einmal kurz herleiten.

Alle Größen, die sich auf die Kationen oder auf die Kathode beziehen, will ich durch den Index K kennzeichnen, die Beziehung zu den Anionen oder zur Anode soll dagegen durch A angedeutet werden. So sei v_K und v_A der Gehalt des Gases an positiven und negativen Ionen, ausgedrückt in Grammäquivalenten pro Kubikzentimeter. Dann geht nach den Untersuchungen J. J. Thomsons und anderer Forscher dieser Gehalt dem Gase mit der Zeit verloren, wenn keine besondere ionisierende Wirkung vorhanden ist, und zwar nach dem Gesetz:

$$\frac{dv_K}{dt} = \frac{dv_A}{dt} = -\alpha \cdot v_K \cdot v_A,$$

wo α eine für das Gas charakteristische Konstante ist. Nach den Messungen von R. K. McClung¹⁾ ist z. B. für Luft $\alpha = 0,98 \cdot 10^{18}$, und zwar unabhängig vom Druck. (Ich habe α umgerechnet in das in der Elektrochemie allgemein übliche

1) R. K. McClung, Phil. Mag. (6) 9. p. 283. 1902.

Maßsystem, wo das Gehalt an Ionen, ν , in Grammäquivalenten gerechnet wird, während die englischen Forscher ihn meist durch die Zahl der einzelnen wirklichen Ionen angeben.)

Ist nun eine ionisierende Kraft (z. B. Röntgenstrahlen) vorhanden, die q Grammäquivalente Ionen in jeder Sekunde hervorbringt, so wird

$$\frac{d\nu_K}{dt} = \frac{d\nu_A}{dt} = q - \alpha \cdot \nu_A \cdot \nu_K.$$

Schließlich tritt ein Gleichgewichtszustand ein, der charakterisiert ist durch die folgende, dem *Dissoziationsgesetz der eigentlichen Elektrolyte entsprechende Gleichung*:

$$q = \alpha \cdot \nu_A \cdot \nu_K.$$

Verbindet man die Platten eines ebenen Luftkondensators, zwischen denen eine ionisierende Wirkung tätig ist, mit einer Elektrizitätsquelle, so gehorcht der Strom bekanntlich nur bei niedrigen Spannungen dem Ohmschen Gesetz und strebt bei höheren einem Maximalwert zu, den er schließlich konstant beibehält, und der dadurch charakterisiert ist, daß der Strom in jeder Sekunde die gesamte Zahl von Ionen, die die ionisierende Wirkung in einer Sekunde erzeugt, den Platten zuführt. Es sei $F = 0,965 \cdot 10^5$ Coulomb die Äquivalentladung, ferner $2A$ der Abstand der Kondensatorplatten in cm, J die Stromdichte in Ampère/qcm, dann ist dieser Maximalstrom J_M :

$$(1) \quad J_M = q \cdot F \cdot 2A.$$

Wir bezeichnen den durch die Kationen vermittelten Strom durch J_K , den Strom der Anionen mit J_A , also:

$$J = J_K + J_A.$$

Das Koordinatensystem wollen wir so wählen, daß die x -Achse senkrecht zu den Kondensatorplatten gerichtet ist. Und zwar rechnen wir x entweder von der Anode zur Kathode hin, also im Sinne des Stromes: x_A , oder von der Kathode aus entgegengesetzt: x_K . Im folgenden wollen wir, wenn nichts weiter bemerkt ist, x immer in dem Sinne x_A gebrauchen. Es sei ferner ν_K' und ν_A' die Dichtigkeit der nur durch die Wirkung des Stromes angehäuften Ionen, das heißt:

$$F \cdot \frac{d\nu_K'}{dt} = - \frac{dJ_K}{dx}, \quad F \cdot \frac{d\nu_A'}{dt} = + \frac{dJ_A}{dx}.$$

Die Geschwindigkeiten, die die beiden Ionengattungen bei einer Feldstärke von 1 Volt/Zentimeter annehmen, sollen u_A und u_K heißen, und zwar gerechnet in cm/sec. Für Luft bei Atmosphärendruck ist z. B. $u_A = 1,85$ cm/sec, $u_K = 1,34$ cm/sec. Ferner sei E die Feldstärke, gerechnet in Volt Zentimeter, also:

$$J_K = v_K \cdot F \cdot u_K \cdot E; \quad J_A = v_A \cdot F \cdot u_A \cdot E.$$

Im ganzen ändert sich nun bei konstantem Strom und konstanter Ionisationswirkung die Dichtigkeit der Ionen nach folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dv_K}{dt} &= q - \alpha \cdot v_A \cdot v_K - u_K \cdot \frac{dv_K \cdot E}{dx}, \\ \frac{dv_A}{dt} &= q - \alpha \cdot v_A \cdot v_K + u_K \cdot \frac{dv_A \cdot E}{dx}. \end{aligned}$$

Ist der Strom stationär geworden, so ist zu setzen:

$$dv_K/dt = dv_A/dt = 0,$$

und wir erhalten so die bekannten *Fundamentalgleichungen für die Theorie der Ströme in Gasen*:

$$(2) \quad \begin{cases} q - \alpha \cdot v_A \cdot v_K - u_K \cdot \frac{dv_K \cdot E}{dx} = 0, \\ q - \alpha \cdot v_A \cdot v_K + u_K \cdot \frac{dv_A \cdot E}{dx} = 0. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen ist aber das Feld und damit der Strom noch nicht vollständig bestimmt. Wir müssen noch die Gleichung hinzufügen, die ausdrückt, daß die *Divergenzstellen des Feldes mit den freien Ladungen identisch sind*:

$$F \cdot (v_K - v_A) = \epsilon_0 \cdot \frac{dE}{dx}.$$

Hier bedeutet ϵ_0 die *Dielektrizitätskonstante des Gases, die wir gleich der des reinen Äthers ansehen können*. In dem von uns gebrauchten praktischen Maßsystem ist

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} = 0,884 \cdot 10^{-13}.$$

Wir wollen im folgenden den Quotienten $\epsilon_0/F = 0,916 \cdot 10^{-13}$ durch den Buchstaben ϵ bezeichnen.

$$(3) \quad v_K - v_A = \epsilon \cdot \frac{dE}{dx}.$$

Zunächst geben die beiden Gleichungen (2) durch Subtraktion

$$u_K \cdot \frac{d v_K \cdot E}{d x} + u_A \cdot \frac{d v_A \cdot E}{d x} = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich sofort integrieren:

$$(4) \quad F \cdot (u_K \cdot v_K \cdot E + u_A \cdot v_A \cdot E) = J.$$

J ist die Stromdichte, die also nach (4) in dem ganzen Zwischenraum zwischen den beiden Kondensatorplatten wie bei jedem stationären Strom konstant ist. Wir multiplizieren nun die beiden Gleichungen (2) mit u_A und u_K und addieren:

$$q \cdot (u_K + u_A) - \alpha \cdot (u_K + u_A) \cdot v_K \cdot v_A - u_K \cdot u_A \cdot \frac{d E \cdot (v_K - v_A)}{d x} = 0.$$

Wir benutzen weiter Gleichung (3), die mit (4) kombiniert liefert:

$$v_K + v_A = - \frac{u_K - u_A}{u_K + u_A} \cdot \varepsilon \cdot \frac{d E}{d x} + \frac{2}{u_K + u_A} \frac{J}{F \cdot E}$$

und:

$$v_K \cdot v_A = - \frac{u_K \cdot u_A}{(u_K + u_A)^2} \cdot \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{d E}{d x} \right)^2 - \frac{u_K - u_A}{(u_K + u_A)^2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{J}{F \cdot E} \cdot \frac{d E}{d x} + \frac{1}{(u_K + u_A)^2} \frac{J^2}{F^2 E^2},$$

und kommen so zu der Differentialgleichung für E :

$$\begin{aligned} u_K \cdot u_A \cdot \varepsilon \cdot E^2 \cdot \frac{d}{d x} \left(E \cdot \frac{d E}{d x} \right) - \frac{u_K \cdot u_A \cdot \alpha \cdot \varepsilon^2}{u_K + u_A} \cdot E^2 \cdot \left(\frac{d E}{d x} \right)^2 \\ - \frac{u_K - u_A}{F(u_K + u_A)} \cdot \alpha \cdot \varepsilon \cdot J \cdot E \cdot \frac{d E}{d x} \\ - q \cdot (u_K + u_A) \cdot E^2 + \frac{\alpha \cdot J^2}{F^2 (u_K + u_A)} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird sehr viel übersichtlicher, wenn wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha}{F^2 (u_K + u_A)^2} \cdot \frac{J^2}{q} &= a^2, \\ \frac{E^2}{a^2} &= z, \\ \frac{u_A - u_K}{u_K + u_A} &= x, \\ \frac{u_K + u_A}{\alpha \cdot \varepsilon} &= \lambda, \\ \frac{2 \cdot q \cdot F}{J} x &= \frac{J_M}{J} \cdot \frac{x}{A} = \xi. \end{aligned} \right.$$

Wir bekommen so:

$$(6) \quad \frac{1 - \kappa^2}{2\lambda} \cdot z \cdot \frac{d^2 \kappa}{d\xi^2} - \frac{1 - \kappa^2}{4\lambda^2} \cdot \left(\frac{d\kappa}{d\xi} \right)^2 + \frac{\kappa}{\lambda} \frac{d\kappa}{d\xi} - z + 1 = 0.$$

In dieser Gleichung ist ξ zu verstehen als ξ_A , d. h. von der Anode aus gerechnet im Sinne der Stromlinien. Die Gleichung für ξ_K erhalten wir aus (6) einfach, wenn wir das Vorzeichen von κ umkehren.

Die Bedeutung der Konstanten a ist leicht zu verstehen. Wenn das Feld, wie es bei sehr schwachen Strömen der Fall ist, in der Mitte eine Region hat, wo keine freien Ladungen vorhanden sind, also $dz/d\xi = 0$, so ist hier $z = 1$, $E = a$. In dieser Region stört der Strom das Dissoziationsgleichgewicht nicht, es ist $q = \alpha \cdot v^2$, also

$$E = a = \frac{J}{F \cdot (u_K + u_A)} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{q}} = \frac{J}{F \cdot v \cdot (u_K + u_A)}.$$

Die Größe $F \cdot v \cdot (u_K + u_A)$ ist das spezifische Leitvermögen der ionisierten Luft, solange sie vom Strom noch nicht verändert ist.

Es sei nun der Widerstand der ionisierten Luft zwischen den Kondensatorplatten pro Quadratcentimeter, gerechnet in Ohm, R genannt, dann ist:

$$(7) \quad \begin{cases} a = \frac{R \cdot J}{2 A}, \\ E = a \sqrt{z} = \frac{R \cdot J}{2 A} \cdot \sqrt{z}. \end{cases}$$

Es kommt jetzt alles darauf an, z als Funktion von ξ zu berechnen. Dafür brauchen wir nur die beiden Größen κ und λ zu kennen. Aus den schon oben angeführten Zahlenwerten erhält man z. B. für Luft:

$$\lambda = 3,56; \quad \kappa = 0,160.$$

Wir unterscheiden nun praktisch die beiden Fälle, daß
a) der Strom nur ein kleiner Bruchteil des Maximalwertes J_M ist; b) daß er nicht mehr viel von J_M verschieden ist.

Schwache Ströme.

2. In der Nähe der Platte ($\xi = 0$) kann man das Integral der Gleichung (6) in eine Potenzreihe nach ξ entwickeln:

$$z = c_0 - c_1 \cdot \xi + c_2 \cdot \xi^2 - c_3 \cdot \xi^3 + c_4 \cdot \xi^4 - \dots$$

Dann ist der Koeffizient c_1 durch die Anfangsbedingung gegeben, daß in der unmittelbaren Nachbarschaft der Platte keine positiven Ionen vorhanden sind, da sie sofort bei ihrer Bildung vom Strom weggeführt werden und hier keine Schicht mehr vorhanden ist, aus der sie sich ergänzen.

Für $\xi = 0$ haben wir also in (3) und (4) einzusetzen $v_K = 0$, und bekommen so:

$$\left(\frac{dE^2}{dx^2}\right)_{x=0} = -\frac{J}{F \cdot u_A \cdot \varepsilon}.$$

Rechnen wir das mit Hilfe der Formeln (5) um, so bekommen wir:

$$\left(\frac{d\kappa}{d\xi}\right)_{\xi=0} = -\frac{2\lambda}{1+\kappa}.$$

Also an der Seite der Anode:

$$(8) \quad c_{1A} = \frac{2\lambda}{1+\kappa}.$$

Ebenso an der Seite der Kathode:

$$c_{1K} = \frac{2\lambda}{1-\kappa}.$$

Das konstante Glied c_0 , d. h. der Wert von $z = E^2/a^2$ für $x = 0$, läßt sich einfach deuten als das Verhältnis der Quadrate der Feldintensitäten unmittelbar an der Platte und in der Mitte des Kondensators. Um es zu berechnen, wollen wir die Differentialgleichung (6) etwas umformen, indem wir dz/dx durch das Symbol u ausdrücken und als Funktion von z selbst auffassen. Es ist dann $d^2z/dx^2 = du/dz \cdot u$ und die Gleichung wird jetzt:

$$(9) \quad \frac{1-\kappa^2}{2\lambda} \cdot z \cdot u \cdot \frac{du}{dz} - \frac{1-\kappa^2}{4\lambda^2} \cdot u^2 + \frac{\kappa}{\lambda} \cdot u - z + 1 = 0.$$

Wir wollen diese Gleichung mit

$$4 \cdot \lambda \cdot z^{-\frac{1}{\lambda}-1} / (1-\kappa^2)$$

multiplizieren, dann bekommen wir:

$$(10) \quad \frac{d\left(u^2 \cdot z^{-\frac{1}{\lambda}}\right)}{dz} + \frac{4\kappa}{1-\kappa^2} \cdot u \cdot z^{-\frac{1}{\lambda}-1} - \frac{4\lambda}{1-\kappa^2} \left(z^{-\frac{1}{\lambda}} - z^{-\frac{1}{\lambda}-1}\right) = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich sofort integrieren, wenn $\kappa = 0$ ist. Man bekommt dann:

$$u^2 = 4\lambda^2 \cdot \left(\frac{\kappa}{\lambda-1} + 1 - C \cdot z^{\frac{1}{\lambda}}\right),$$

wo C die Integrationskonstante ist. Um C zu bestimmen, machen wir von unserer Annahme Gebrauch, daß wir es mit schwachen Strömen zu tun haben, bei denen im mittleren Feld $u = 0$, $z = 1$ wird. Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich $C = \lambda(\lambda - 1)$, also:

$$(11) \quad u^2 = \frac{4\lambda^2}{\lambda-1} \left(z + (\lambda-1) - \lambda \cdot z^{\frac{1}{\lambda}} \right).$$

Da nun unmittelbar an der Platte $(u)_0 = -c_1 = -2\lambda$ ist, und $(z)_0 = c_0$, so gibt (8) die Gleichung:

$$(12) \quad \begin{cases} c_0 - \lambda \cdot c_0^{\frac{1}{\lambda}} = 0, \\ c_0 = \lambda^{\frac{1}{\lambda-1}}. \end{cases}$$

Diese Gleichung ist schon von J. J. Thomson gefunden. Im allgemeinen bekommen wir

$$(13) \quad \begin{cases} u^2 = -\frac{4\kappa}{1-\kappa^2} \cdot z^{-\frac{1}{\lambda}} \int_1^z u \cdot z^{-\frac{1}{\lambda}-1} \cdot dz \\ \quad + \frac{4\lambda^2}{1-\kappa^2} \cdot \left(\frac{z}{1-1} + 1 - \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot z^{\frac{1}{\lambda}} \right) \end{cases}$$

und wir können hier auf der rechten Seite für die Funktion u einen Näherungswert einsetzen, weil κ in allen praktischen Fällen klein gegen 1 ist, und es sich also nur um ein Korrektionsglied handelt, das an (12) anzubringen ist. Am einfachsten ist es, die beiden Punkte $u = 0$, $z = 1$ und $u = -2\lambda/(1+\kappa)$, $z = c_0$ durch eine gerade Linie zu verbinden und zu setzen:

$$(14) \quad u = -\frac{2\lambda}{1+\kappa} \cdot \frac{\kappa-1}{c_0-1}.$$

Um später Rechenschaft geben zu können über die dabei gemachte Vernachlässigung wollen wir setzen:

$$\int_1^z u \cdot z^{-\frac{\lambda+1}{\lambda}} \cdot dz = -(1+\delta) \cdot \frac{2\lambda}{(1+\kappa)(c_0-1)} \int_1^z \left(z^{-\frac{1}{\lambda}} - z^{-\frac{\lambda+1}{\lambda}} \right) \cdot dz.$$

δ' ist natürlich eine Funktion von z , wir werden aber sehen, daß ihr Wert so klein ist, daß man sie gegen 1 streichen kann. Durch eine einfache Rechnung bekommt man nun folgenden Ausdruck für u^2 :

$$(15) \quad \left\{ u^2 = \frac{4\lambda^2}{(1-\kappa^2)} \cdot \left(1 + \left(1 + \frac{\delta'}{c_0} \right) \cdot \frac{2\kappa}{1-\kappa} \cdot \frac{c_0}{c_0-1} \right) \cdot \left(\frac{\kappa}{\lambda-1} + 1 - \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot z^{1/\lambda} \right) \right.$$

Wir setzen hier nun die Endwerte $z = c_0$, $u = 2\lambda/(1+\kappa)$ ein und verstehen auch unter δ' den entsprechenden Endwert, dann bekommen wir folgende Gleichung:

$$(16) \quad \left\{ c_0 - \lambda \cdot c_0^{1/\lambda} = - \left(1 + \frac{\delta'}{c_0} \right) \cdot \frac{2\kappa}{1-\kappa} \cdot \frac{c_0}{c_0-1} \cdot ((\lambda-1) + c_0 - \lambda \cdot c_0^{1/\lambda}) \right.$$

Da κ klein ist, so ist $c_0 - \lambda \cdot c_0^{1/\lambda} = 0$ eine Annäherung an diese exakte Gleichung. Also ist auch $\lambda^{\lambda/(\lambda-1)}$ eine erste Näherung für c_0 und wir setzen deswegen:

$$c_0 = \lambda^{\lambda/(\lambda-1)} \cdot (1 + \delta),$$

wo δ jedenfalls klein gegen 1 ist. Um den Wert δ zu berechnen, setzen wir diesen Ausdruck für c_0 in die Gleichung (16) ein und entwickeln beide Seiten in eine Potenzreihe nach δ . Wir wollen dabei zunächst δ'/c_0 streichen, ferner wollen wir alle höheren Potenzen von δ streichen, so daß wir einfach eine lineare Gleichung bekommen, die sich nun sehr leicht ausrechnen läßt. Das Resultat ist folgendes:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = c \cdot (1 + \delta), \\ c = \lambda^{\lambda/(\lambda-1)}, \\ \delta \cdot \left(\frac{1-\kappa}{2\kappa} \cdot \frac{c-1}{\lambda} + \frac{c}{\lambda} - \frac{1}{c-1} \right) = -1. \end{array} \right.$$

Hier bedeutet c_0 soviel wie c_{0A} , zur Berechnung von c_{0K} haben wir einfach das Vorzeichen von κ umzukehren. So ist für Luft:

$$c = 5,845$$

und ferner

auf der Kathodenseite

$$\delta = 0,284$$

$$c_0 = 7,50$$

$$E_K = 2,74 \cdot a$$

auf der Anodenseite

$$\delta = -0,200$$

$$c_0 = 4,68$$

$$E_A = 2,16 \cdot a$$

Hier ist E_K , E_A die Feldstärke unmittelbar an der Elektrode, $a = E_0$ die in der Mitte des Feldes.

Damit ist die Berechnung von c_0 erledigt.

Wir wollen nun nachweisen, daß die Formeln (17) genau genug sind, indem wir die Fehler taxieren, die durch die benutzten Vernachlässigungen entstehen. Zunächst lassen wir noch δ'/c_0 weg, berücksichtigen aber die Glieder zweiter Ordnung in δ . Wir bekommen:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \delta \cdot \left[\left(\frac{1-x}{2x} \cdot \frac{c-1}{\lambda} + \frac{c}{\lambda} \right) \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2\lambda} \right) - \frac{1}{c-1} \right. \\ & \quad \left. \cdot \left(1 + \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{c-1} \right) \cdot \delta \right) \right] = -1. \end{aligned} \right.$$

Setzt man die Werte für Luft und zwar in die Korrektionsglieder die schon gewonnenen Näherungswerte für δ ein, so ergibt sich

$$\begin{array}{l} \text{auf der Kathodenseite} \\ \delta = 0,273 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{auf der Anodenseite} \\ \delta = -0,205 \end{array}$$

Die Werte c_{0A} , c_{0K} , E_A , E_K ändern sich dadurch nur ganz wenig.

Um δ' zu taxieren, berechnen wir den Verlauf der Funktion u nach (15), wo wir zunächst δ'/c_0 streichen und konstruieren uns die Kurve

$$v = z^{-\frac{\lambda+1}{\lambda}} \cdot u = f_1(z).$$

Ganz dasselbe führen wir mit der ungenauen Formel (14) aus. Die beiden Flächen, die durch je eine dieser Kurven und die Geraden: $v = 0$ und $z = c_0$ begrenzt sind, verhalten sich dann wie $(1 + \delta') : 1$. Man kann δ' ohne viel Mühe durch Ausmessen des Flächeninhaltes bekommen.

Ich habe das für Luft ausgeführt. In Fig. 1 sind die beiden v -Kurven für die Kathodenseite, in Fig. 2 für die Anodenseite gezeichnet. Beide Male ist b die ungenaue, mit Hilfe der Formel (14) berechnete, a die genaue Kurve. Man sieht, daß beide Male $1 + \delta' > 1$, also δ' positiv ist. Die Ausmessung ergibt für die Kathodenseite $\delta' = 0,19$; für die Anodenseite $\delta' = 0,25$. Wir haben nun in (18) das Glied

$$(1-x) \cdot (c-1) / 2x \cdot \lambda$$

zu dividieren durch $(1 + \delta'/c_0)$, um den genauen Wert von δ zu finden, man erhält:

auf der Kathodenseite

$$\begin{aligned}\delta &= 0,288 \\ c_{0K} &= 7,52 \\ E_K &= 2,745 \cdot a\end{aligned}$$

auf der Anodenseite

$$\begin{aligned}\delta &= -0,211 \\ c_{0A} &= 4,60 \\ E_A &= 2,145 \cdot a\end{aligned}$$

Vergleicht man diese genauen Werte c_0 und E mit den nach der Formel (17) berechneten, so sieht man, daß die Annäherung von (17) besser ist als die der feinsten Messungen, die man ausführen kann. Da nun die Eigenschaften der ioni-

Fig. 1.

Fig. 2.

sierten Gase wenig voneinander verschieden sind, so darf man die benutzte Annäherung allgemein als genügend ansehen.

Nachdem nun c_1 und c_0 gefunden sind, ist es nicht mehr schwer, die übrigen Koeffizienten der Reihe (7) zu berechnen. Man setzt einfach die Reihe mit unbestimmten Koeffizienten in (6) ein, setzt die Faktoren der Potenzen von ξ einzeln gleich Null, und erhält so eine Anzahl von Gleichungen, deren jede eine Größe c liefert. Man findet nach dieser Methode der unbestimmten Koeffizienten:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} c_2 &= \frac{\lambda}{1-x^2}, & c_3 &= \frac{2}{3 \cdot c_0} \cdot \frac{\lambda}{(1-x^2)^2}, \\ c_4 &= -\frac{1}{3 \cdot c_0^2} \cdot \frac{\lambda}{(1-x^2)^3} \cdot (2\lambda(1-x) - 1) + \frac{1}{6 c_0} \cdot \frac{\lambda}{(1-x^2)^2}. \end{aligned} \right.$$

Nach (8), (17), (19) ergibt sich für Luft die Reihenentwicklung für z auf der negativen Seite:

$$z = 7,52 - 8,48 \cdot \xi_K + 3,66 \cdot \xi_K^2 - 0,332 \cdot \xi_K^3 - 0,082 \cdot \xi_K^4,$$

auf der positiven Seite:

$$z = 4,60 - 6,135 \cdot \xi_A + 3,66 \cdot \xi_A^2 - 0,543 \cdot \xi_A^3 - 0,166 \cdot \xi_A^4.$$

3. Diese Darstellung von z durch eine Potenzreihe gilt nun jedenfalls nur ganz in der Nähe der Platten, für einigermaßen große ξ muß sich nahezu konstant $z=1$ ergeben. Um dies Verhalten wiederzugeben, dazu eignet sich eine Potenzreihe schlecht. Wir setzen deswegen:

$$(20) \quad z = 1 + (c_0 - 1) \cdot e^{-y},$$

wo y eine Funktion von ξ ist, die für $\xi = 0$ ebenfalls Null wird, aber für einigermaßen große Werte ξ große Beträge annimmt. Für kleine Werte ξ können wir y wieder in eine Potenzreihe entwickeln

$$(21) \quad y = a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 + a_3 \cdot \xi^3 + a_4 \cdot \xi^4.$$

Setzt man dies in (20) ein und entwickelt nun z in eine Potenzreihe nach ξ , so kann man durch Vergleichung mit der ursprünglichen Potenzreihe für z eine Anzahl Gleichungen gewinnen, aus denen sich die Koeffizienten a durch die c ausdrücken lassen. Es sind das folgende Gleichungen:

$$(22) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{c_1}{c_0 - 1}, \\ a_2 = \frac{1}{2} a_1^2 - \frac{c_2}{c_0 - 1}, \\ a_3 = -\frac{1}{6} \cdot a_1^3 + a_1 a_2 + \frac{c_3}{c_0 - 1}, \\ a_4 = \frac{1}{24} \cdot a_1^4 - \frac{1}{2} a_1^2 a_2 + \frac{1}{2} a_2^2 + a_1 a_3 - \frac{c_4}{c_0 - 1}. \end{cases}$$

Für Luft bekommt man so auf der negativen Seite:

$$y = 1,30 \cdot \xi + 0,284 \cdot \xi^2 + 0,0537 \cdot \xi^3 - 0,0225 \cdot \xi^4,$$

auf der positiven Seite:

$$y = 1,70 \cdot \xi + 0,433 \cdot \xi^2 + 0,065 \cdot \xi^3 - 0,027 \cdot \xi^4.$$

Da schon für $\xi = 1$ der Wert von e^{-y} recht klein ist, so erkennt man, daß man mit den ersten beiden Gliedern der Reihe für y immer völlig auskommt. Man hat also für kleine ξ :

$$y = a_1 \xi + a_2 \cdot \xi^2.$$

4. Daraus folgt nun eine sehr einfache Darstellung von y für große ξ . Setzt man nämlich in die Differentialgleichung (6) für z den Ausdruck (20) ein, so bekommt man folgende Gleichung für y :

$$(23) \quad y'' - y'^2 + \frac{2x}{1-x^2} \cdot y' + \frac{2\lambda}{1-x^2} = (c_0 - 1) \cdot e^{-y} \cdot \left(\frac{2\lambda - 1}{2\lambda} \cdot y'^2 - y'' \right).$$

Ist nun ξ so groß, daß $(c_0 - 1) \cdot e^{-y}$ schon klein gegen 1 ist, so setzen wir in erster Näherung die rechte Seite gleich Null und bekommen:

$$(24) \quad y'' - y'^2 + \frac{2x}{1-x^2} \cdot y' + \frac{2\lambda}{1-x^2} = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich nach bekannten Methoden leicht einmal integrieren. Wir wollen die beiden Wurzeln der algebraischen Gleichung:

$$\eta^2 - \frac{2x}{1-x^2} \cdot \eta - \frac{2\lambda}{1-x^2} = 0$$

bezeichnen mit η_1 und η_2 :

$$\eta_1 = \frac{x + \sqrt{2\lambda(1-x^2) + x^2}}{1-x^2}, \quad \eta_2 = \frac{x - \sqrt{2\lambda(1-x^2) + x^2}}{1-x^2}.$$

Dann ist das erste Integral von (24):

$$y' = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} + \frac{\eta_1 - \eta_2}{2} \frac{1 + e^{(\eta_1 - \eta_2) \cdot (\xi - \xi_0)}}{1 - e^{(\eta_1 - \eta_2) \cdot (\xi - \xi_0)}}.$$

Hier ist ξ_0 die Integrationskonstante.

Wenn wir nun für ξ_0 einen Wert annehmen wollten, der von ξ in der näheren oder weiteren Nachbarschaft der positiven Platte erreicht wird, dann würde in etwas größerer Entfernung, z. B. schon für $\xi = \xi_0 + 1$, die e -Funktion in unserer Formel sehr groß gegen 1 werden und wir würden den Wert bekommen $y' = \eta_2$, also $y = c + \eta_2 \cdot \xi$. Nun ist aber η_2 eine negative Größe, es würde also in größerer Entfernung, wo

$\xi > \xi_0$, z nicht mehr gegen 1 näher und näher konvergieren, sondern sich im Gegenteil davon entfernen. Dadurch ist nun der Wert von ξ_0 für unsere Zwecke genügend genau bestimmt. Er muß nämlich so groß sein, daß er in dem ganzen Gebiet zwischen den Platten immer gegen ξ überwiegt. Die beiden Exponentialausdrücke sind dann immer verschwindend klein gegen 1 und wir bekommen so:

$$y' = \eta_1 = \frac{x + \sqrt{2\lambda(1-x^2) + x^2}}{1-x^2}.$$

Die Differentialgleichung (23) liefert daher bei genügend großen Werten von ξ für y eine lineare Funktion:

$$(25) \quad \begin{cases} y = b_0 + b_1 \cdot \xi. \\ b_1 = \frac{x + \sqrt{2\lambda(1-x^2) + x^2}}{1-x^2}. \end{cases}$$

Um den Grad der Näherung dieser Formel zu prüfen, wollen wir noch eine zweite Näherung für das Integral von (23) berechnen, indem wir setzen:

$$y = b_0 + b_1 \xi + b_2 \cdot e^{-y}$$

und nun alle Größen von der Ordnung e^{-y} stehen lassen, während wir die Glieder von der Ordnung e^{-2y} und die höheren streichen. Dann ist nämlich:

$$y' = b_1 + b_2 \cdot y' \cdot e^{-y} = b_1 + b_1 b_2 \cdot e^{-y},$$

$$y'^2 = b_1^2 + 2 b_1^2 \cdot b_2 \cdot e^{-y},$$

$$y'' = b_1 \cdot b_2 \cdot y' \cdot e^{-y} = b_1^2 \cdot b_2 \cdot e^{-y}.$$

Eingesetzt in (23) ergibt das für b_2 die Gleichung:

$$3 b_1^2 b_2 - \frac{2x}{1-x^2} \cdot b_1 b_2 = \frac{2\lambda-1}{2\lambda} \cdot (c_0 - 1) \cdot b_1^2.$$

Man bekommt also:

$$(26) \quad \begin{cases} b_2 = (c_0 - 1) \cdot \frac{(2\lambda - 1) \cdot b_1 \cdot (1 - x^2)}{2\lambda \cdot (3 b_1 \cdot (1 - x^2) - 2x)}, \\ y = b_0 + b_1 \xi + b_2 \cdot e^{-b_0 - b_1 \xi}, \end{cases}$$

wo b_1 nach (25) zu berechnen ist.

Wir haben jetzt noch b_0 zu bestimmen. Das geschieht durch die Bedingung, daß für einen Wert $\xi = \xi_1$, der so groß ist, daß $(c_0 - 1) \cdot e^{-\gamma}$ schon klein ist gegen 1, aber doch auch noch klein genug, daß man γ nach der Potenzreihe (21) berechnen darf, und zwar nur mit den beiden ersten Gliedern, daß für diesen Wert ξ_1 die beiden Entwicklungen von γ selbst und ihre ersten Ableitungen noch übereinstimmen:

$$a_1 \cdot \xi_1 + a_2 \cdot \xi_1^2 = b_0 + b_1 \cdot \xi_1,$$

$$a_1 + 2 a_2 \cdot \xi_1 = b_1.$$

Der Wert, für den diese beiden Bedingungen allein genau erfüllt sein können, ist:

$$(27) \quad \xi_1 = \frac{b_1 - a_1}{2 a_2}.$$

Und es ergibt sich daraus:

$$(28) \quad b_0 = - \frac{(b_1 - a_1)^2}{4 a_2}.$$

Berechnet man nach diesen Formeln die Zahlenwerte für Luft, so bekommt man auf der negativen Seite:

$$\gamma = -1,32 + 2,52 \cdot \xi + 1,79 \cdot e^{1,34 - 2,55 \cdot \xi}, \quad \xi_1 = 2,14;$$

auf der positiven Seite:

$$\gamma = -0,80 + 2,875 \cdot \xi + 1,07 \cdot e^{0,80 - 2,875 \cdot \xi}, \quad \xi_1 = 1,36.$$

An diesen Zahlen kann man nun prüfen, ob die Rechnung mit der ersten Näherung noch in dem Punkt ξ_1 , wo sich die beiden Entwicklungen von γ treffen sollen, genügend genau ist. Man findet:

	Entwicklung für kleine ξ		Entwicklung für große ξ	
	zweigliedrig	viergliedrig	erste Näherung	zweite Näherung
neg. γ	4,08	4,16	4,08	4,11
Seite γ'	2,52	2,37	2,52	2,45
pos. γ	3,11	3,18	3,11	3,16
Seite γ'	2,88	2,97	2,875	2,74

Diese Zahlen sind deswegen von Wert, weil sich die andern Gase nicht so viel von der Luft unterscheiden, daß

für sie nicht ungefähr dieselbe Annäherung mit unseren Formeln erreicht würde.

5. Wir können bei schwachen Strömen das Feld in den Gasen also nach folgenden Formeln berechnen:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{R \cdot J}{2 A} \cdot \sqrt{z}, \\ z = 1 + (c_0 K - 1) \cdot e^{-y_K} + (c_0 A - 1) \cdot e^{-y_A}, \\ y = a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 \text{ für kleine } \xi, \\ y = b_0 + b_1 \cdot \xi \text{ für große } \xi. \\ \xi = \frac{J_M}{J} \cdot \frac{x}{A}, \\ c_0 = c \cdot (1 + \delta), \\ c = \lambda \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \\ \delta \cdot \left(\frac{1 - \kappa}{2 \kappa} \cdot \frac{c - 1}{\lambda} + \frac{c}{\lambda} - \frac{1}{c - 1} \right) = -1, \\ a_1 = \frac{2 \lambda}{(1 + \kappa)(c_0 - 1)}, \\ a_2 = \frac{\lambda}{(1 + \kappa)(c_0 - 1)} \cdot \left(\frac{2 \lambda}{(1 + \kappa)(c_0 - 1)} - \frac{1}{1 - \kappa} \right), \\ b_1 = \frac{\kappa + \sqrt{2 \lambda (1 - \kappa^2) + \kappa^2}}{1 - \kappa^2}, \quad b_0 = -\frac{(b_1 - a_1)^2}{4 a_2}, \\ \lambda_K = \lambda_A = \frac{u_K - u_A}{\alpha \cdot \delta}, \\ \kappa_A = \frac{u_A - u_K}{u_A + u_K}, \quad \kappa_K = -\kappa_A. \end{array} \right.$$

Die beiden Entwicklungen von y treffen zusammen in dem Punkte:

$$(30) \quad \xi_1 = \frac{b_1 - a_1}{2 a_2}.$$

Diese Stelle kann man als die bezeichnen, die das ungefähr homogene Mittelfeld von dem stark variierenden Feld in der Nähe der Platten abgrenzt.

6. Wir wollen nun gleich die Frage beantworten, wo die Feldstärke ihr äußerstes Minimum erreiche. Es ist das zugleich die Stelle, wo die räumliche Dichte der elektrischen Ladungen genau gleich Null wird.

Wir setzen also:

$$\frac{d\pi}{d\xi} = -y'_A \cdot (c_{0A} - 1) \cdot e^{-y_A} + y'_K \cdot (c_{0K} - 1) \cdot e^{-y_K} = 0,$$

$$y_A = b_{0A} + b_{1A} \cdot \xi, \quad y_K = b_{0K} + b_{1K} \left(2 \frac{J_M}{J} - \xi \right).$$

Es möge nun x der Abstand eines Punktes von der Mittelebene des Kondensators sein, gemessen in der Richtung des Stromes, also:

$$\xi_A = \xi = \frac{J_M}{J} \cdot \left(1 + \frac{x}{A} \right),$$

$$\xi_K = 2 \cdot \frac{J_M}{J} - \xi = \frac{J_M}{J} \cdot \left(1 - \frac{x}{A} \right).$$

Für den Abstand x_0 des Punktes, in dem die Feldstärke ihr Minimum hat, von der Mittelebene erhalten wir nun die Gleichung:

$$y_A - y_K = \ln \frac{b_{1A} \cdot (c_{0A} - 1)}{b_{1K} \cdot (c_{0K} - 1)}.$$

Also:

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{J_M}{J} \cdot (b_{1A} + b_{1K}) \cdot \frac{x_0}{A} = \frac{J_M}{J} \cdot (b_{1K} - b_{1A}) + (b_{0K} - b_{0A}) \\ \quad + \ln \frac{b_{1A} \cdot (c_{0A} - 1)}{b_{1K} \cdot (c_{0K} - 1)}. \end{cases}$$

Setzt man die Werte für die Luft ein, so bekommt man:

$$\frac{x_0}{A} = -0,066 - 0,181 \cdot \frac{J}{J_M}.$$

Der Punkt liegt also der Mitte sehr nahe, aber etwas nach der Anode hin.

7. Um das Potential zu berechnen, müssen wir zuerst eine bequeme Entwicklung für $\sqrt{z}$ finden. In dem mittleren Felde, wo y_A und y_K beide sehr groß sind, gilt jedenfalls sehr genau:

$$(32) \quad \sqrt{z} = 1 + \frac{1}{2}(c_{0K} - 1) \cdot e^{-y_K} + \frac{1}{2}(c_{0A} - 1) \cdot e^{-y_A}.$$

In der Nähe der Elektroden bekommen wir, wenn wir aus der Potenzreihe für z die Wurzel ausziehen:

$$(33) \quad \sqrt{z} = \sqrt{c_0} - \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{c_0}} \cdot \xi + \frac{1}{8} \frac{4c_0c_2 - c_1^2}{\sqrt{c_0^3}} \cdot \xi^2 + \dots$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{z} = 1 + \frac{1}{2}(c_0 - 1) \cdot e^{-\bar{y}}, \\ \bar{y} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \xi + \alpha_2 \cdot \xi^2, \\ \alpha_0 = \ln \frac{(c_0 - 1)}{2 \cdot (\sqrt{c_0} - 1)}, \quad \alpha_1 = \frac{c_1}{2 \cdot \sqrt{c_0} \cdot (\sqrt{c_0} - 1)} = \frac{\sqrt{c_0} + 1}{2 \cdot \sqrt{c_0}} \cdot a_1, \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot \alpha_1^2 - \frac{4 \cdot c_0 c_2 - c_1^2}{8 \cdot \sqrt{c_0}^3 \cdot (\sqrt{c_0} - 1)} \\ = \frac{\sqrt{c_0} + 1}{2 \sqrt{c_0}} \cdot \left(a_2 + \frac{\sqrt{c_0} - 1}{4 \cdot c_0} \cdot a_1^2 \right). \end{array} \right.$$

Die Kurven

$$\bar{y} = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \cdot \xi^2, \quad y = b_0 + b_1 \xi$$

schneiden sich in diesem Falle in den beiden Punkten:

$$\xi = \frac{b_1 - \alpha_1}{2 \alpha_2} \pm \sqrt{\frac{(b_1 - \alpha_1)^2}{4 \alpha_2^2} - \frac{(\alpha_0 - b_0)}{\alpha_2}}.$$

Sie verlaufen aber zwischen diesen beiden Schnittpunkten so nahe nebeneinander, daß es bei der Berechnung von $\sqrt{z}$ keinen merkbaren Unterschied macht, ob man die eine oder die andere Formel für y nimmt. Wir wollen als den Grenzpunkt zwischen beiden Formeln den mittleren Punkt zwischen den beiden Schnittpunkten nehmen:

$$(35) \quad \xi_1 = \frac{b_1 - \alpha_1}{2 \alpha_2}.$$

Der Unterschied der beiden verschieden berechneten Werte von y an dieser Stelle ist:

$$(36) \quad (y - \bar{y})_1 = \alpha_2 \cdot \left(\frac{(b_1 - \alpha_1)^2}{4 \alpha_2^2} - \frac{\alpha_0 - b_0}{\alpha_2} \right).$$

Setzt man die Zahlenwerte für Luft ein, so bekommt man an der Kathode:

$$\bar{y} = 0,625 + 0,89 \cdot \xi + 0,261 \cdot \xi^2,$$

$$y = -1,32 + 2,52 \cdot \xi,$$

$$\xi_1 = 3,12,$$

$$(y - \bar{y})_1 = 0,59, \quad y_1 = 6,55, \quad \bar{y}_1 = 5,96.$$

Die beiden verschieden berechneten Werte von $\sqrt{z}$ sind für ξ_1 :

$$1,0046 \quad \text{und} \quad 1,0085,$$

an der Anode:

$$\bar{y} = 0,453 + 1,25 \cdot \xi + 0,45 \cdot \xi^2,$$

$$y = -0,80 + 2,875 \cdot \xi,$$

$$\xi_1 = 1,805,$$

$$(y - \bar{y})_1 = 0,21, \quad y_1 = 4,40, \quad \bar{y}_1 = 4,19.$$

Die beiden verschieden berechneten Werte von $\sqrt{z}$ sind:

$$1,012 \quad \text{und} \quad 1,015.$$

Beide Male haben wir also an der Stelle ξ_1 , wo die Abweichung beider Werte nahezu die größte ist, nur Unterschiede von wenigen Promille.

Wir bilden nun, von der Anode ausgehend:

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^x \sqrt{z} \cdot dx &= x + \frac{A \cdot J}{J_M} \cdot \left(\frac{c_{0A} - 1}{2} \cdot \int_0^{\xi_A} e^{-y_A} \cdot d\xi_A \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_{0K} - 1}{2} \cdot \int_{\xi_K}^{\infty} e^{-y_K} \cdot d\xi_K \right). \end{aligned} \right.$$

Wir führen die Integration zunächst in dem Gebiet aus, wo $y = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2$ zu setzen ist. Zu dem Zweck führen wir folgenden Ausdruck ein:

$$(38) \quad \eta = \sqrt{\alpha_2} \cdot \xi + \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2}}, \quad \eta_0 = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2}}.$$

Dann ist nämlich:

$$y = \eta^2 + \alpha_0 - \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2}, \quad d\xi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \cdot d\eta.$$

Dadurch wird das Integral zurückgeführt auf die bekannte Funktion:

$$\int_0^\eta e^{-\eta^2} \cdot d\eta = \psi(\eta).$$

Für diese Funktion gibt es Tabellen in den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung.¹⁾

1) z. B. A. Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung p. 545. Leipzig 1879.

Man kann ihre Werte aber auch leicht berechnen und zwar für Werte von η , die zwischen 0 und etwa 1,4 liegen, aus folgender Potenzentwicklung:

$$(39) \quad \psi(\eta) = \eta \cdot \left(1 - \frac{\eta^2}{3}\right) + \frac{\eta^5}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{\eta^2}{21}\right) + \frac{\eta^9}{24} \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{\eta^2}{55}\right).$$

Für größere Werte η nach einer semikonvergenten Reihe:

$$(40) \quad \psi(\eta) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} - \frac{e^{-\eta^2}}{2\eta} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{2\eta^2}\right) + \frac{3}{4\eta^4} \cdot \left(1 - \frac{5}{2\eta^2}\right) \right).$$

Besonders zu bemerken ist der Wert $\psi(\infty) = \sqrt{\pi}/2$.

Wir bekommen so *in der Nähe der Anode*:

$$(41) \quad \int_0^x \sqrt{z} \cdot dx = x + \frac{A \cdot J}{J_M} \cdot \frac{\sqrt{c_0 A - 1}}{\sqrt{\alpha_2}} \cdot e^{\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2}} \cdot (\psi(\eta) - \psi(\eta_0)),$$

wo α_1 , α_2 , η , η_0 (vgl. Formel (38)) alle für die Anodenseite zu berechnen sind.

In etwas größerer Entfernung berechnen wir η nach (40), und zwar werden wir bei genügend großen Werten von η den Faktor des zweiten Gliedes einfach gleich 1 setzen. Das gilt z. B. an der Stelle ξ_1 , wo der Gültigkeitsbereich des linearen Ausdruckes für y beginnt. Wir führen noch folgende Abkürzung ein:

$$(42) \quad C = \frac{\sqrt{c_0 - 1}}{\sqrt{\alpha_2}} \cdot e^{\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \psi\left(\frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2}}\right) \right).$$

Dann ergibt sich:

$$\frac{1}{2}(c_0 - 1) \cdot \int_0^{\xi_1} e^{-y} d\xi = C - \frac{c_0 - 1}{2} \cdot \frac{e^{-y_1}}{b_1}.$$

Ich betrachte die beiden wenig voneinander abweichenden Werte y_1 und $\bar{y}_1$ einfach als identisch. Setzen wir nun für die Werte $\xi > \xi_1$: $y = b_0 + b_1 \cdot \xi$, dann ergibt die weitere Fortsetzung der Integration:

$$\frac{1}{2}(c_0 - 1) \cdot \int_0^{\xi} e^{-y} \cdot d\xi = C - \frac{c_0 - 1}{2} \cdot \frac{e^{-y}}{b_1}$$

und wir bekommen nun in dem mittleren Gebiet des Feldes:

$$(43) \quad \left\{ \int_0^x \sqrt{z} \cdot dx = x + \frac{A \cdot J}{J_M} \left(C_A - \frac{e_{0A} - 1}{2 b_{1A}} \cdot e^{-y_A} + \frac{e_{0K} - 1}{2 b_{1K}} \cdot e^{-y_K} \right) \right\}.$$

Gehen wir weiter über den Punkt ξ_{1K} in das Gebiet der Kathode hinein, so bekommen wir durch sehr einfache Rechnungen:

$$(44) \quad \left\{ \int_0^x \sqrt{z} \cdot dx = x + \frac{A \cdot J}{J_M} \cdot \left[C_A + C_K - \frac{\sqrt{e_{0K} - 1}}{\sqrt{\alpha_2}} \cdot e^{\frac{\alpha_1^2}{4 \alpha_2}} \cdot (\psi(\eta) - \psi(\eta_0)) \right] \right\}.$$

In dieser Formel sind (im Gegensatz zu (41)) die Größen α_1 , α_2 , η , η_0 für die Kathodenseite zu berechnen.

Speziell bekommen wir, wenn wir ganz bis zur Kathode gehen, also $x = 2A$, $\eta = \eta_0$ setzen:

$$\int_0^{2A} \sqrt{z} \cdot dx = 2A \cdot \left(1 + \frac{J}{J_M} \cdot \frac{C_A + C_K}{2} \right).$$

Weil nun die Feldstärke $E = R \cdot J \cdot \sqrt{z} / 2A$, so bekommen wir aus den Formeln (41) bis (44) die Potentiale, von der Anode ab gerechnet, wenn wir einfach mit $R \cdot J / 2A$ multiplizieren.

Als die ganze elektrische Spannung zwischen den beiden Elektroden bekommen wir:

$$(45) \quad \psi = R \cdot J \cdot \left(1 + \frac{C_A + C_K}{2} \cdot \frac{J}{J_M} \right),$$

wo C_A und C_K nach (42) zu berechnen sind.

Diese Gleichung (45) stellt die Abhängigkeit zwischen Stromstärke und Spannung bei schwachen Strömen dar.

Für Luft liefert z. B. (42):

$$C_A = 0,68, \quad C_K = 1,40.$$

$$\psi = R \cdot J \cdot \left(1 + 1,04 \cdot \frac{J}{J_M} \right).$$

Wenn also der Strom J k Proz. des Sättigungsstromes ist, so beträgt die Abweichung vom Ohmschen Gesetz auch ungefähr k Proz., d. h. der Widerstand der Luftschicht wird um k Proz. größer gefunden, als bei unendlich schwachem Strom.

8. Wir wollen annehmen, die eine Platte sei auf $+\Psi/2$, die andere $-\Psi/2$ geladen, und wollen uns fragen, an welcher Stelle dann der Nullpunkt des Potentials liegen wird.

Wir wollen bei der Berechnung die beiden Exponentialausdrücke in (43), die jedenfalls äußerst klein sind gegen C_A , vernachlässigen, und nun den so abgekürzten Ausdruck gleichsetzen mit

$$A \cdot \left(1 + \frac{J}{J_M} \cdot \frac{C_A + C_K}{2} \right).$$

Wir haben damit eine einfache Gleichung für die x -Koordinate des gesuchten Punktes und erhalten, indem wir sie mit x_1 bezeichnen:

$$x_1 = A \cdot \left(1 + \frac{J}{J_M} \cdot \frac{C_K - C_A}{2} \right).$$

Jedenfalls liegt also der Punkt sehr nahe der Mitte zwischen beiden Platten. Wir wollen nun, wie wir es bei einem ähnlichen Problem (Formel (31)) taten, auch hier x von der Mitte abrechnen und setzen $\bar{x}_0 = x_1 - A$. Dann haben wir:

$$(46) \quad \frac{\bar{x}_0}{A} = \frac{J}{J_M} \cdot \frac{C_K - C_A}{2},$$

bei unendlich kleinem Strom liegt der Nullpunkt des Potentials genau in der Mitte.

Für Luft ist z. B.:

$$\frac{\bar{x}_0}{A} = 0,36 \cdot \frac{J}{J_M}.$$

Mit wachsender Stromstärke rückt der Punkt etwas nach der Kathode hin.

Fast gesättigte Ströme.

9. Die bisherigen Formeln (besonders die fundamentale Formel (17)) gelten nur unter der Voraussetzung, daß in der

mittleren Gegend, wo $dz/d\xi = 0$ ist, z den Wert 1 wenigstens sehr nahezu erreicht.

Physikalisch bedeutet dies, daß im mittleren Felde der Ionengehalt des Gases durch den Strom noch nicht geändert wird. Wir haben nun gesehen, daß die beiden Werte ξ_1 , wie sie aus (27) zu berechnen sind, ungefähr die Grenzen angeben, wo das fast homogene Mittelfeld an die stark variablen Randfelder angrenzt. Solange $\xi_{1A} + \xi_{1K} \leq 2J_M/J$, gelten deswegen die bisher entwickelten Formeln, denn solange ist noch Raum für das homogene Mittelfeld da.

Für Luft ist $\xi_{1A} + \xi_{1K} = 3,5$; also gelten die Formeln für schwachen Strom noch etwa bis zur Stromstärke $J = 0,57 J_M$.

Wollen wir nun auch für fast gesättigte Ströme eine Potenzreihe für z aufstellen, so erhebt sich nun genau dieselbe Schwierigkeit, die sich der Berechnung bei den schwachen Strömen entgegenstellte, aufs neue: nämlich das konstante Glied c_0 zu berechnen, und wir müssen einen Weg suchen, um ihrer Herr zu werden.

Eine Vereinfachung des Problems wäre es auch hier, wenn $\kappa = 0$ wäre. Dann müßte nämlich die z -Kurve symmetrisch zur Mittelebene des Kondensators verlaufen, z ließe sich als Potenzreihe der folgenden Variablen darstellen:

$$\eta = \xi_A \cdot \xi_K = \frac{J_M^2}{J^2} \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right).$$

Hier ist x von der Mittellinie ab zu rechnen.

Ist κ von Null verschieden, so muß noch eine ungerade Funktion von x hinzugefügt werden. Nun ist:

$$\xi_A - \xi_K = - \frac{2J_M}{J} \cdot \frac{x}{A}.$$

Wir können also ansetzen:

$$(47) \quad z = z_1 + (\xi_K - \xi_A) \cdot z_2.$$

$$(48) \quad \begin{cases} z_1 = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + \dots, \\ z_2 = b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^2 + \dots \end{cases}$$

Die Koeffizienten von z_2 enthalten alle den Faktor κ .

Ferner führen wir für eine Reihe oft vorkommender Ausdrücke Abkürzungen ein, wir setzen:

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{J_M - J}{J_M} = \varrho, & \frac{J_M}{J} = \frac{1}{1 - \varrho} = C. \\ 4 C^2 \cdot a_2 - a_1 = \alpha_1, & 2 C^2 \cdot b_1 - b_0 = \beta_0, \\ 12 C^2 \cdot a_3 - 6 a_2 = \alpha_2, & 4 C^2 \cdot b_2 - 3 b_1 = \beta_1, \\ 24 C^2 \cdot a_4 - 15 a_3 = \alpha_3, & 6 C^2 \cdot b_3 - 5 b_2 = \beta_2, \\ & 8 C^2 \cdot b_4 - 7 b_3 = \beta_3. \end{array} \right.$$

Weiter haben wir folgende Formeln zu gebrauchen:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\eta}{d\xi_A} = \xi_K - \xi_A; \quad \frac{d}{d\xi_A}(\xi_K - \xi_A) = -2; \quad \xi_K + \xi_A = 2C; \\ (\xi_K - \xi_A)^2 = 4 \cdot (C^2 - \eta). \end{array} \right.$$

Die Anfangsbedingungen (vgl. Formel 8):

$$\left(\frac{d\kappa}{d\xi_A} \right)_{\xi_A=0} = -\frac{2\lambda}{1+\kappa}, \quad \left(\frac{d\kappa}{d\xi_K} \right)_{\xi_K=0} = -\frac{2\lambda}{1-\kappa}$$

ergeben nun nach einer ganz einfachen Rechnung:

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} C \cdot a_1 = -\frac{\lambda}{1-\kappa^2}, \\ \beta_0 = +\frac{\lambda \cdot \kappa}{1-\kappa^2}. \end{array} \right.$$

Wenn wir einen dieser Anfangswerte in die Differentialgleichung (6) einsetzen, so bekommt man (wie in Formel 19) den entsprechenden Anfangswert von $d^2 z / d\xi^2$:

$$\left(\frac{d^2 \kappa}{d\xi_A^2} \right)_{\xi_A=0} = \left(\frac{d^2 \kappa}{d\xi_K^2} \right)_{\xi_K=0} = \frac{\lambda}{1-\kappa^2}.$$

Nach einer einfachen Rechnung gibt das:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{\lambda}{1-\kappa^2}, \\ \beta_1 = 0. \end{array} \right.$$

Wir wollen nun weiter (47) in die Differentialgleichung (6) einsetzen, wobei wir der Kurve wegen die Ableitungen von z_1 und z_2 nach η durch z_1', z_1'', z_2', z_2'' bezeichnen. Wir bekommen dann auf der linken Seite die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion von x , die natürlich beide einzeln gleich Null sein müssen. Wir haben also zwei Differential-

gleichungen für die beiden unbekannten Funktionen z_1 und z_2 und zwar:

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{1-x^2}{\lambda} \cdot (z_1 \cdot (2(C^2 - \eta) \cdot z_1'' - z_1') + 4 \cdot (C^2 - \eta) \cdot z_2 \cdot \zeta_2') \\ - \frac{1-x^2}{\lambda^2} \cdot ((C^2 - \eta) \cdot z_1'^2 + \zeta_2^2) + \frac{2x}{\lambda} \cdot \zeta_2 - z_1 + 1 = 0, \end{cases}$$

wo

$$\zeta_2 = 2 \cdot (C^2 - \eta) \cdot z_2' - z_2$$

und

$$(54) \quad \begin{cases} \frac{1-x^2}{\lambda} \cdot (z_2 \cdot (2(C^2 - \eta) \cdot z_1'' - z_1') + z_1 \cdot \zeta_2') \\ - \frac{1-x^2}{\lambda^2} \cdot z_1' \cdot \zeta_2 + \frac{x}{\lambda} \cdot z_1' - z_2 = 0, \end{cases}$$

wo, wie vorher:

$$\zeta_2 = 2 \cdot (C^2 - \eta) \cdot z_2' - z_2.$$

Setzt man in diese beiden Gleichungen die Reihenentwicklungen (48) mit unbestimmten Koeffizienten ein, und setzt nun die Faktoren der einzelnen Potenzen von η gleich Null, so gibt zunächst das konstante Glied, wenn man (51) und (52) beobachtet, eine Identität, was ja von vornherein zu erwarten war. Die Glieder mit der ersten und der zweiten Potenz von η liefern:

$$(55) \quad \begin{cases} a_0 \cdot \alpha_2 + 4 C^2 \cdot b_0 \cdot 2 \beta_2 - \frac{a_1}{1-x^2} = 0, \\ a_0 \cdot 2 \beta_2 + b_0 \cdot \alpha_2 = 0, \\ a_0 \cdot \alpha_3 + \frac{2\lambda-1}{2\lambda} \cdot a_1 \cdot \alpha_2 + 12 C^2 \cdot b_0 \cdot \beta_3 \\ \quad + 8 \cdot (C^2 \cdot b_1 - b_0) \cdot \beta_2 - \frac{a_2}{1-x^2} = 0, \\ 3 \cdot a_0 \cdot \beta_3 + \frac{2\lambda-1}{2\lambda} \cdot a_1 \cdot 2 \beta_2 + b_0 \cdot \alpha_3 + b_1 \cdot \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Die höheren Potenzen liefern ähnliche Gleichungen, die immer länger werden, je mehr der Grad der Potenz steigt. Je mehr solche Gleichungen man nimmt, um so genauer kann man auch die ersten Koeffizienten, vor allem a_0 und b_0 berechnen. Wir begnügen uns mit der Näherung, die wir aus den vier Gleichungen (55) gewinnen können. Um diese Näherung zu bekommen, bedenken wir, daß mit wachsender Feldstärke die Abweichungen von der Homogenität immer kleiner

werden. Um so mehr nähert sich nun aber gleichzeitig $\varrho = (J_M - J)/J_M$ der Null. Also muß a_0 niedrigere Potenzen von ϱ enthalten, als alle anderen Koeffizienten, und zwar sogar negative, weil die Feldstärke, und demnach auch z , schließlich über alle Grenzen wächst. Es läßt sich nun leicht sehen, daß der folgende Ansatz dieser Bedingung und zugleich den Bedingungen (51), (52) genügt:

$$(56) \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{x_0}{\varrho} + y_0 + z_0 \cdot \varrho + \dots, \\ a_1 = \frac{\lambda \cdot (1 - \varrho)}{1 - \kappa^2}, \\ a_2 = \frac{(1 - \varrho)^2}{4} \cdot \frac{\varrho \cdot \lambda}{1 - \kappa^2}, \\ a_3 = x_3 \cdot \varrho^2 + y_3 \cdot \varrho^3 + \dots, \\ a_4 = x_4 \cdot \varrho^3 + \dots \\ \\ b_0 = -\frac{\lambda \cdot \kappa}{1 - \kappa^2} + u_0 \cdot \varrho^2 + v_0 \cdot \varrho^3 + w_0 \cdot \varrho^4 + \dots, \\ b_1 = \frac{(1 - \varrho)^2}{2} \cdot u_0 \cdot \varrho^2 + \frac{(1 - \varrho)^2}{2} \cdot v_0 \cdot \varrho^3 + \frac{(1 - \varrho)^2}{2} \cdot w_0 \cdot \varrho^4 + \dots, \\ b_2 = \frac{3}{8} (1 - \varrho)^4 \cdot u_0 \cdot \varrho^2 + \frac{3}{8} (1 - \varrho)^4 \cdot v_0 \cdot \varrho^3 + \frac{3}{8} (1 - \varrho)^4 \cdot w_0 \cdot \varrho^4 + \dots, \\ b_3 = u_3 \cdot \varrho^3 + v_3 \cdot \varrho^4 + \dots, \\ b_4 = u_4 \cdot \varrho^4 + \dots \end{array} \right.$$

Die $x, y, z, \dots u, v, w, \dots$ sollen in diesen Formeln Zahlen bedeuten, deren Wert nur noch von λ und κ abhängt, ferner ist stets gesetzt: $C = 1/(1 - \varrho)$ (vgl. 49).

Setzt man weiter diese Ausdrücke (56) in die Gleichungen (55) ein, so sieht man, wenn man die einzelnen Potenzen von ϱ gleich Null setzt, daß sie gerade ausreichen, um in den a alle Glieder bis zum Grade ϱ^2 inklusive (außer in a_0 , wo man nur die beiden ersten Glieder gewinnt) in den b bis zu ϱ^3 inklusive zu berechnen, und daß man durch Hinzufügung der folgenden beiden Gleichungen (Faktoren von η^3 in (53), (54)) gerade die Glieder vom nächsthöheren Grade in ϱ gewinnen müßte, und so fort.

Um ganz exakt zu verfahren, müßte man nun auch noch beweisen, daß die so gewonnenen Reihenentwicklungen für die Koeffizienten a und b konvergent sind, dann wäre es außer

allem Zweifel, daß man so die richtige, und zwar die einzige Lösung gewonnen hätte. Ich habe mich hiermit nicht abgegeben, weil es mir gar zu weit zu führen schien, ich habe mich aber überzeugt, daß in dem Falle $\lambda = 2$, $\kappa = 0$, in welchem sich die Integration der Gleichung (6) durch Exponentialfunktionen ausführen läßt, der eben beschriebene Weg zur richtigen Lösung führt.

Man erhält nach dem geschilderten Verfahren durch ziemlich umständliche Rechnungen:

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(1-\varrho)(1-\kappa^2)}, & y_0 &= \frac{2}{15} \cdot \frac{3(2\lambda-1) \cdot (1-\varrho) - 1}{(1-\varrho)^2 \cdot (1-\kappa^2)}, \\x_3 &= \frac{(1-\varrho)^3}{40} \cdot \frac{\lambda}{1-\kappa^2} \cdot (3(2\lambda-1)(1-\varrho) - 1), \\u_0 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\lambda^2 \cdot \kappa}{(1-\varrho)(1-\kappa^2)}, \\v_0 &= -\frac{18}{350} \cdot \frac{\lambda^2 \cdot \kappa}{(1-\varrho)^2 \cdot (1-\kappa^2)} \cdot (4(2\lambda-1)(1-\varrho) - 3), \\u_3 &= \frac{3 \cdot (1-\varrho)^4}{112} \cdot \frac{\lambda^2 \cdot \kappa}{1-\kappa^2} \cdot (6 \cdot (2\lambda-1)(1-\varrho) - 1).\end{aligned}$$

Lassen wir die Glieder mit ϱ^3 , die wir ja doch nur teilweise gefunden haben, einfach weg, so bekommen wir:

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} z &= \frac{1}{(1-\kappa^2)(1-\varrho)} \cdot \left\{ \left(\frac{2}{3} \varrho^{-1} + \frac{4}{15} (3\lambda-2) \right) - \lambda \cdot \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right) \right. \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\varrho}{1-\varrho} \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right)^2 + \frac{3\lambda-2}{20} \cdot \frac{\lambda \varrho^2}{1-\varrho} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right)^3 \\ &\quad + 2\lambda \kappa \cdot \frac{x}{A} \cdot \left[1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{\lambda \cdot \varrho^2}{1-\varrho} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{8} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right)^2 \right) \right] \right\} \end{aligned} \right\},$$

x von der Mittelebene aus gerechnet, im Sinne des positiven Stromes.

Damit ist die Aufgabe auch für fast gesättigten Strom gelöst.

In diesem Ausdruck für z hat das konstante Glied einen geringeren Grad von Genauigkeit als die anderen, für die wir noch die Summanden mit ϱ und ϱ^2 gewonnen haben, während wir sie im konstanten Glied unbekannt lassen mußten.

Wenn wir also nur z selbst und nicht die Ableitungen berechnen wollen, dann nehmen wir besser folgende abgekürzte

Formel, in der alle Glieder denselben Grad von Genauigkeit haben:

$$(58) \quad z = \frac{1}{(1-x^2)(1-q)} \cdot \left(\frac{2}{3} q^{-1} - \frac{1}{5} \cdot (\lambda + \frac{8}{3}) + 2 \lambda x \cdot \frac{x}{A} + \lambda \cdot \frac{x^2}{A^2} \right).$$

10. Wollen wir die freien Ladungen berechnen, so haben wir zu bilden $1/\sqrt{z} \cdot dz/dx$, und wir werden zur Ausrechnung von dz/dx die Formel (57) nehmen. Wir wollen hier speziell nur die Stelle suchen, wo *das Feld sein Minimum hat und die freien Ladungen also verschwinden*. Wir nennen, wie oben (6.), die Koordinate des gesuchten Punktes x_0 , und finden aus $dz/dx = 0$ dafür die Gleichung:

$$(59) \quad x + \frac{x_0}{A} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{q}{1-q} \cdot \left(1 - \frac{x_0^2}{A^2} \right) - \frac{9\lambda - 6}{20} \cdot \frac{q^2}{1-q} \cdot \left(1 - \frac{x_0^2}{A^2} \right)^2 \right).$$

Daraus ergibt sich in erster Näherung:

$$\frac{x_0}{A} = -x.$$

Setzt man diesen Wert in die Korrektionsglieder ein, so bekommt man leicht eine zweite und dritte Näherung. Da x^2 gegen 1 sehr klein ist, so kann man einfach rechnen:

$$(60) \quad \frac{x_0}{A} = - \frac{20 \cdot (1-q)}{20 - 30q - (9\lambda - 6)q^2} \cdot x.$$

$-x_0/A$ geht also von größeren Werten her gegen x . Vergleicht man dies Resultat mit dem der Formel (31), so sieht man, daß $-x_0/A$ bei einer mittleren Stromstärke ein Maximum haben muß.

Für Luft ist:

$$\frac{x_0}{A} = -0,16 \cdot \frac{20 \cdot (1-q)}{20 - 30q - 26q^2}.$$

Um den Verlauf der Funktion z schneller zu übersehen, wird man gut tun *ihre Werte an den beiden Elektroden selbst: z_K , z_A und an der Stelle x_0 des Minimums: z_0 zu berechnen*. Die Formel (58) ergibt:

$$61) \quad \begin{cases} z_K = \frac{1}{(1-x^2)(1-q)} \cdot \left(\frac{2}{3} q^{-1} + \frac{4}{5} (\lambda - \frac{2}{3}) + 2 \lambda x \right), \\ z_A = \frac{1}{(1-x^2)(1-q)} \cdot \left(\frac{2}{3} q^{-1} + \frac{4}{5} (\lambda - \frac{2}{3}) - 2 \lambda x \right), \\ z_0 = \frac{1}{(1-x^2)(1-q)} \cdot \left(\frac{2}{3} q^{-1} + \frac{4}{5} \cdot (\lambda - \frac{2}{3}) - \lambda (1+x^2) \right). \end{cases}$$

Stellt man die Funktion z graphisch dar, so liegt die Kurve an ihrer tiefsten Stelle x_0 um $\lambda/(1-\varrho)$ unter der geraden Verbindungslinie ihrer Endpunkte.

In Luft haben wir:

$$z_K = \frac{1,026}{1-\varrho} \cdot \left(\frac{2}{3} \varrho^{-1} + 3,46\right), \quad z_A = \frac{1,026}{1-\varrho} \cdot \left(\frac{2}{3} \varrho^{-1} + 1,18\right),$$

$$z_0 = \frac{1,026}{1-\varrho} \cdot \left(\frac{2}{3} \varrho^{-1} - 1,33\right).$$

11. Um das Potential zu finden, stellen wir eine Formel für $\sqrt{z}$ auf, indem wir nach der gewöhnlichen Methode die Quadratwurzel aus der Reihe (58) ausziehen und gleich alle höheren Potenzen von ϱ streichen.

Wir erhalten so:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot (1-x^2)(1-\varrho) \cdot \varrho}} \cdot \left(1 + \varrho \cdot \left(-\frac{3\lambda + 8}{20} + \frac{3\lambda x}{2} \cdot \frac{x}{A} + \frac{3\lambda}{4} \cdot \frac{x^2}{A^2}\right)\right).$$

Wir bilden nun:

$$(62) \quad \left\{ \int_0^x \sqrt{z} \cdot dx = \sqrt{\frac{2}{3(1-x^2)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varrho(1-\varrho)}} \cdot x \cdot \left(1 + \varrho \cdot \left(-\frac{3\lambda + 8}{20} + \frac{3\lambda x}{4} \cdot \frac{x}{A} + \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{x^2}{A^2}\right)\right) \right\}.$$

Da $E = R \cdot J \cdot \sqrt{z} / 2A$, so haben wir den Ausdruck (62) einfach mit $R \cdot J / 2A$ zu multiplizieren, um das Potential an einer Stelle x , von der Mittelebene ab gerechnet, zu finden.

Setzt man speziell $x = +A$ und $x = -A$, und subtrahiert, so bekommt man die gesamte Spannung zwischen den beiden Elektroden. Wir wollen in den so gefundenen Wert gleich für ϱ einsetzen: $J_M - J/J_M$ und bekommen:

$$(63) \quad \Psi = R \cdot \sqrt{\frac{2}{3(1-x^2)}} \cdot \sqrt{\frac{J \cdot J_M}{1 - J/J_M}} \cdot \left(1 - \frac{4-\lambda}{10} \cdot \left(1 - \frac{J}{J_M}\right)\right).$$

Diese Gleichung (63) enthält die Abhängigkeit zwischen Spannung und Stromstärke für fast gesättigte Ströme.

J. J. Thomson hat unter der Annahme, daß das elektrische Feld und die Dichtigkeit der Ionen in dem ganzen

Raum zwischen den Kondensatorplatten konstant seien, eine Formel¹⁾ hergeleitet, die die Abhängigkeit zwischen Spannung und Stromstärke sowohl für schwache als auch für fast gesättigte Ströme wiedergeben soll. In den von mir benutzten Zeichen lautet diese Formel:

$$(64) \quad \psi = \frac{R \cdot J}{\sqrt{1 - J/J_M}}.$$

Bei genaueren Rechnungen muß diese Formel also durch (45) und (63) ersetzt werden.

Für Luft gibt (63), da $4 - \lambda/10$ sehr klein wird:

$$\psi = 0,828 \cdot R \cdot \sqrt{\frac{J \cdot J_M}{1 - J/J_M}}.$$

12. Wir können nun auch, wie bei den schwachen Strömen, berechnen, in welchem Abstände $\bar{x}_0$ von der Mittelebene das Potential Null wird, wenn man die Platten auf entgegengesetzt gleiche Potentiale lädt. Die Rechnung gibt:

$$\frac{\bar{x}_0}{A} \cdot \left\{ 1 - \varrho \cdot \left(\frac{4 - \lambda}{10} + \frac{\lambda}{4} \cdot \left(1 - \frac{\bar{x}_0^2}{A^2} \right) \right) \right\} = \frac{3\lambda \kappa \varrho}{4} \cdot \left(1 - \frac{\bar{x}_0^2}{A^2} \right).$$

In erster Annäherung ist also:

$$\frac{\bar{x}_0}{A} = \frac{3\lambda \kappa \varrho}{4}.$$

Da wir nun alle Glieder mit ϱ^2 gegen 1 streichen, so bekommen wir mit genügender Genauigkeit:

$$(65) \quad \frac{\bar{x}_0}{A} \cdot \left(1 - \left(\frac{3\lambda}{20} + \frac{\lambda}{6} \right) \cdot \frac{J_M - J}{J_M} \right) = \frac{3\lambda \kappa}{4} \cdot \frac{J_M - J}{J_M}.$$

Der Punkt liegt also auf der Kathodenseite, rückt aber mit wachsender Stromstärke in die Mitte (wo er nach (46) auch bei sehr schwachen Strömen liegt).

Für Luft ist:

$$\frac{\bar{x}_0}{A} \cdot \left(1 - 0,934 \cdot \frac{J_M - J}{J_M} \right) = 0,427 \cdot \frac{J_M - J}{J_M}.$$

1) J. J. Thomson, Die Entladung der Elektrizität durch Gase. (Deutsch von Dr. P. Ewers) p. 27. Leipzig 1900.

Vielleicht kann man durch Beobachtungen an fast gesättigten Strömen die beiden Größen λ , κ , von denen der Charakter des Feldes allein abhängt, direkt bestimmen, da sie in die Formeln für sie ziemlich einfach eintreten.

Zusammenfassung der Resultate.

13. Ich gebe nun noch eine kurze Übersicht über die gewonnenen Formeln, indem ich sie für den Spezialfall Luft zugleich durch Kurven anschaulich mache.

Fig. 3.

Fig. 4.

Die Stromstärken gebe ich dabei an als Bruchteile der maximalen Stromstärke, also $1/5$ heißt $1/5 J_M$.

1. Die Fig. 3 gibt für mehrere Stromstärken den Verlauf der Größe $\sqrt{z}$ zwischen den beiden Elektroden. Für die Strom-

stärken $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ habe ich z nach (29) berechnet für $\frac{4}{5}$ und $\frac{9}{10}$ nach (58), und nachträglich die Wurzeln ausgezogen. Aus diesen Kurven bekommt man ohne weiteres den Verlauf des elektrischen Feldes, da ja $E = R \cdot J \cdot \sqrt{z} / 2 A$.

Fig. 5.

Fig. 6.

2. Speziell die Endwerte $\sqrt{z_A}$ und $\sqrt{z_K}$ an den Elektroden und der Minimalwert $\sqrt{z_0}$ sind in Fig. 4 als Funktionen der Stromstärke dargestellt. Für schwache Ströme ist konstant:

$$\sqrt{z_A} = \sqrt{c_{0A}}, \quad \sqrt{z_K} = \sqrt{c_{0K}}, \quad \sqrt{z_0} = 1,$$

für starke ist (61) benutzt.

3. Der Abstand der beiden Punkte, wo das *Potential Null* ist ($\Psi = 0$) und wo die *freie Ladung Null* ist ($E = \text{Minimum}$), von der Mittelebene ist als Funktion der Stromstärke nach (31), (60) und nach (46), (65) berechnet und in Fig. 5 aufgezichnet.

4. Die *Abhängigkeit der Stromstärke von der Spannung* ist nach (45) und (63) berechnet und in Fig. 6 durch die ausgezogene Linie dargestellt. Zum Vergleich ist die Abhängigkeit, die die *Thomsonsche Formel* (64) ergeben würde, als schraffierte Kurve eingetragen. Die gerade Linie, die diese Kurven im Nullpunkt berührt, bezeichnet die Abhängigkeit, die sich ergeben würde, wenn das Ohmsche Gesetz gälte.

Greifswald, Januar 1904.

(Eingegangen 23. Januar 1904.)