6. *Zur Nernst-Planck'schen Theorie über die Potentialdifferenz zwischen verdünnten Lösungen;*
von K. R. Johnson.

Die Berechnung der Potentialdifferenz zwischen elektrolytischen Lösungen hat Hr. Planck auf den Fall beschränkt, wo sämtliche Ionen n -wertig sind, und fügt bezüglich des allgemeinen Falles nur die Bemerkung hinzu, daß dabei die Berechnung aus rein mathematischen Gründen erheblich schwieriger ist.¹⁾ Eine erweiterte Behandlung dieser Aufgabe scheint jetzt immer mehr nötig zu werden, und eine solche beabsichtigt auch die vorliegende Darstellung.

$$(I) \quad \begin{cases} R \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} + p \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(c' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0, \\ R \frac{\partial^2 c''}{\partial x^2} + m \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(c'' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0, \\ R \frac{\partial^2 \bar{c}'}{\partial x^2} - q \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{c}' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0, \\ R \frac{\partial^2 \bar{c}''}{\partial x^2} - n \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{c}'' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0, \\ p c' + m c'' = q \bar{c}' + n \bar{c}'', \end{cases}$$

deren Bedeutung aus der erwähnten Arbeit von Hrn. Planck hervorgeht.

R bezeichnet hier den osmotischen Druck, ε die elektrische Ladung eines einwertigen positiven Ions, p und q sind die Wertigkeiten bei den positiven und negativen Ionen des einen Elektrolyten, und m und n die Wertigkeiten bei den Ionen des anderen Elektrolyten; c' und $\bar{c}'$ bedeuten die Anzahl positiver und negativer Ionen per Volumeneinheit im Punkte x der Grenzschichte, und c'' und $\bar{c}''$ die entsprechenden Zahlen des anderen Elektrolyten. φ ist das Potential im Punkte x . Übrigens ist es nicht nötig, die Voraussetzungen

1) M. Planck, Wied. Ann. 40. p. 561. 1890.

hier zu wiederholen, sondern es genügt, auf die erwähnte Arbeit hinzuweisen.¹⁾

Der Kürze halber wird die Bezeichnung $k = \varepsilon/R$ eingeführt und die erste Integration der Gleichungen (I) ergibt

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d c'}{d x} + p k c' \frac{d \varphi}{d x} = A_1, \\ \frac{d c''}{d x} + m k c'' \frac{d \varphi}{d x} = A_2, \\ \frac{d \bar{c}'}{d x} - q k \bar{c}' \frac{d \varphi}{d x} = B_1, \\ \frac{d \bar{c}''}{d x} - n k \bar{c}'' \frac{d \varphi}{d x} = B_2, \end{cases}$$

welche Gleichung bei der zweiten Integration die folgenden Integrale liefern:

$$(2) \quad \begin{cases} c' = e^{-p k \varphi} \left[\alpha_1 + A_1 \int e^{p k \varphi} d x \right], \\ c'' = e^{-m k \varphi} \left[\alpha_2 + A_2 \int e^{m k \varphi} d x \right], \\ \bar{c}' = e^{q k \varphi} \left[\beta_1 + B_1 \int e^{-q k \varphi} d x \right], \\ \bar{c}'' = e^{n k \varphi} \left[\beta_2 + B_2 \int e^{-n k \varphi} d x \right]. \end{cases}$$

Weil die Gleichungen als unabhängig von der Zeit betrachtet werden, so können wir φ als die unabhängige Variabel betrachten und bezeichnen die Differentiation bezüglich φ mit D . Die Gleichungen (1) lassen sich mithin folgenderweise schreiben:

$$(3) \quad \begin{cases} (D + p k) c' = A_1 D x, \\ (D + m k) c'' = A_2 D x, \\ (D - q k) \bar{c}' = B_1 D x, \\ (D - n k) \bar{c}'' = B_2 D x. \end{cases}$$

Weiter verwenden wir auf die Gleichungen (3) einmal die Operatoren $D - p k$, $D - m k$, $D + q k$, $D + n k$, und ein anderes Mal die Operatoren $D^2 - p k D + p^2 k^2$, $D^2 - m k D + m^2 k^2$, $D^2 + q k D + q^2 k^2$, $D^2 + n k D + n^2 k^2$, und erhalten dabei

1) Vgl. l. c. p. 562—564.

$$(4) \quad \begin{cases} (D^2 - p^2 k^2) c' = A_1 (D^2 - p k D) x, \\ (D^2 - m^2 k^2) c'' = A_2 (D^2 - m k D) x, \\ (D^2 - q^2 k^2) \bar{c}' = B_1 (D^2 + q k D) x, \\ (D^2 - n^2 k^2) \bar{c}'' = B_2 (D^2 + n k D) x, \end{cases}$$

und

$$(5) \quad \begin{cases} (D^3 + p^3 k^3) c' = A_1 (D^3 - p k D^2 + p^3 k^2 D) x, \\ (D^3 + m^3 k^3) c'' = A_2 (D^3 - m k D^2 + m^3 k^2 D) x, \\ (D^3 - q^3 k^3) \bar{c}' = B_1 (D^3 + q k D^2 + q^3 k^2 D) x, \\ (D^3 - n^3 k^3) \bar{c}'' = B_2 (D^3 + n k D^2 + n^3 k^2 D) x, \end{cases}$$

Durch Summieren der Gleichungen (3) und nachfolgendes Integrieren der Summationsgleichung erhält man

$$(6) \quad c' + c'' + \bar{c}' + \bar{c}'' = (A_1 + A_2 + B_1 + B_2) x + K.$$

Weiter erhält man durch Summieren der Gleichungen (3) nach vormaligem Multiplizieren mit $p, m, -q, -n$ die Gleichung:

$$(7) \quad k(p^2 c' + m^2 c'' + q^2 \bar{c}' + n^2 \bar{c}'') = (A_1 p + A_2 m - B_1 q - B_2 n) D x,$$

und durch ähnliche Behandlung der Gleichungen (4) und (5) erhält man

$$(8) \quad \begin{cases} k^2(-p^3 c' - m^3 c'' + q^3 \bar{c}' - n^3 \bar{c}'') \\ = [A_1 p(D^2 - p k D) + A_2 m(D^2 - m k D) \\ - B_1 q(D^2 + q k D) - B_2 n(D^2 + n k D)] x \end{cases}$$

und

$$(9) \quad \begin{cases} k^3(p^4 c' + m^4 c'' + q^4 \bar{c}' + n^4 \bar{c}'') = [A_1 p(D^3 - p k D^2 + p^2 k^2 D) \\ + A_2 m(D^3 - m k D^2 + m^2 k^2 D) - B_1 q(D^3 + q k D^2 + q^2 k^2 D) \\ - B_2 n(D^3 + n k D^2 + n^2 k^2 D)] x. \end{cases}$$

Die Anfangsgleichung $p c' + m c'' - q \bar{c}' - n \bar{c}'' = 0$ mitgenommen, haben wir also zusammen fünf Gleichungen (I), (6), (7), (8), (9), welche die Konzentrationen nur im linken Gliede linear enthalten, und aus diesen fünf Gleichungen kann man folglich die Konzentrationen eliminieren, was z. B. in der Weise ausgeführt werden kann, daß die fraglichen Gleichungen mit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= k^3 [p m (q + n) - q n (p + m)], \\ \lambda_2 &= k^3 p q m n, \\ \lambda_3 &= k^2 [p m - p q - p n + n q - m n - m q], \\ \lambda_4 &= k [p + m - n - q], \\ \lambda_5 &= 1 \end{aligned}$$

multipliziert und nachdem addiert werden, wobei die Koeffizienten der Konzentrationen verschwinden und das rechte Glied die folgende Form erhält

$$(10) \quad 0 = (D^3 + P_1 D^2 + P_2 D + P_3)(x + x_0),$$

wo P_1 , P_2 und P_3 Konstanten sind, und ebenso

$$x_0 = \frac{K}{A_1 + A_2 + B_1 + B_2}.$$

Es ist durchaus nicht nötig, die Koeffizienten P_1 , P_2 und P_3 zu ermitteln; man braucht nur zu konstatieren, daß die Lösung der Differentialgleichung (10) lautet

$$(11) \quad x + x_0 = C_1 e^{r_1 \varphi} + C_2 e^{r_2 \varphi} + C_3 e^{r_3 \varphi},$$

wo r_1 , r_2 und r_3 die übrigens unbestimmten Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(12) \quad \varrho^3 + P_1 \varrho^2 + P_2 \varrho + P_3 = 0$$

bedeuten.

Aus der Gleichung (11) erhält man

$$dx = (C_1 r_1 e^{r_1 \varphi} + C_2 r_2 e^{r_2 \varphi} + C_3 r_3 e^{r_3 \varphi}) d\varphi$$

und beim Eintragen dieses Wertes von dx in die Integralgleichungen (2) werden die Konzentrationen folgenderweise ausgedrückt:

$$(13) \quad \begin{cases} c' = \alpha_1 e^{-p k \varphi} + A_1 \left\{ \frac{C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 + p k} + \frac{C_2 r_2 e^{r_2 \varphi}}{r_2 + p k} + \frac{C_3 r_3 e^{r_3 \varphi}}{r_3 + p k} \right\}, \\ c'' = \alpha_2 e^{-m k \varphi} + A_2 \left\{ \frac{C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 + m k} + \frac{C_2 r_2 e^{r_2 \varphi}}{r_2 + m k} + \frac{C_3 r_3 e^{r_3 \varphi}}{r_3 + m k} \right\}, \\ \bar{c}' = \beta_1 e^{q k \varphi} + B_1 \left\{ \frac{C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 - q k} + \frac{C_2 r_2 e^{r_2 \varphi}}{r_2 - q k} + \frac{C_3 r_3 e^{r_3 \varphi}}{r_3 - q k} \right\}, \\ \bar{c}'' = \beta_2 e^{n k \varphi} + B_2 \left\{ \frac{C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 - n k} + \frac{C_2 r_2 e^{r_2 \varphi}}{r_2 - n k} + \frac{C_3 r_3 e^{r_3 \varphi}}{r_3 - n k} \right\}. \end{cases}$$

Wenn der Wert von x in der Gleichung (11) in die Formel (6) eingesetzt wird, so ergibt sich

$$c' + c'' + \bar{c}' + \bar{c}'' = (A_1 + A_2 + B_1 + B_2)(C_1 e^{r_1 \varphi} + C_2 e^{r_2 \varphi} + C_3 e^{r_3 \varphi}),$$

und weil eine damit identische Gleichung sich durch Summieren der Gleichungen (13) ergeben muß, so findet man

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0$$

und übrigen drei Gleichungen von der Form

$$(14) \quad \frac{A_1 \varrho}{\varrho + p k} + \frac{A_2 \varrho}{\varrho + m k} + \frac{B_1 \varrho}{\varrho - q k} + \frac{B_2 \varrho}{\varrho - n k} = A_1 + A_2 + B_1 + B_2,$$

nämlich die drei Gleichungen, die man beim Ersetzen von ϱ mit r_1 , r_2 und r_3 erhält. Die Gleichung (14) ist mit der Gleichung (12) identisch und die Lösungen der Differentialgleichungen (I) sind demzufolge außer der Bedingungsgleichung (14) die folgenden:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + x_0 = C_1 e^{r_1 \varphi} + C_2 e^{r_2 \varphi} + C_3 e^{r_3 \varphi}, \\ c' = A_1 \left[\frac{C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 + p k} + \frac{C_2 r_2 e^{r_2 \varphi}}{r_2 + p k} + \frac{C_3 r_3 e^{r_3 \varphi}}{r_3 + p k} \right], \\ c'' = A_2 \left[\frac{C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 + m k} + \frac{C_2 r_2 e^{r_2 \varphi}}{r_2 + m k} + \frac{C_3 r_3 e^{r_3 \varphi}}{r_3 + m k} \right], \\ \bar{c}' = B_1 \left[\frac{C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 - q k} + \frac{C_2 r_2 e^{r_2 \varphi}}{r_2 - q k} + \frac{C_3 r_3 e^{r_3 \varphi}}{r_3 - q k} \right], \\ \bar{c}'' = B_2 \left[\frac{C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 - n k} + \frac{C_2 r_2 e^{r_2 \varphi}}{r_2 - n k} + \frac{C_3 r_3 e^{r_3 \varphi}}{r_3 - n k} \right]. \end{array} \right.$$

In dem von Hrn. Planck ausführlich behandelten Falle $p = q = m = n$ vereinfacht sich die Gleichung (14) zu einer Gleichung des ersten Grades und dabei fallen die r_2 und r_3 enthaltenden Glieder aus den Gleichungen (15) weg. Dasselbe trifft auch zu, wenn man nur $p = m$ und $q = n$ setzt, d. h. wenn einerseits die positiven Ionen miteinander gleichwertig sind und andererseits auch die negativen Ionen der beiden Lösungen miteinander gleichwertig sind. Wir setzen im folgenden voraus, daß die Lösung der oben angegebenen Art ist, d. h.

$$\underline{p = m \quad \text{und} \quad q = n.}$$

Daher ergibt sich aus der Gleichung (14)

$$\frac{(A_1 + A_2) \varrho}{\varrho + p k} + \frac{(B_1 + B_2) \varrho}{\varrho - q k} = A_1 + A_2 + B_1 + B_2$$

und man erhält mithin

$$(14a) \quad \varrho = r_1 = \frac{k p q (A_1 + A_2 + B_1 + B_2)}{(A_1 + A_2) p - (B_1 + B_2) q}$$

und die Gleichungen (15) gehen in die folgenden über

$$(15a) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + x_0 = C_1 e^{r_1 \varphi}, \\ c' = \frac{A_1 C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 + p k} = \frac{A_1 r_1 (x + x_0)}{r_1 + p k}, \\ c'' = \frac{A_2 C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 + p k} = \frac{A_2 r_1 (x + x_0)}{r_1 + p k}, \\ \bar{c}' = \frac{B_1 C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 - q k} = \frac{B_1 r_1 (x + x_0)}{r_1 - q k}, \\ \bar{c}'' = \frac{B_2 C_1 r_1 e^{r_1 \varphi}}{r_1 - q k} = \frac{B_2 r_1 (x + x_0)}{r_1 - q k}. \end{array} \right.$$

Wir bezeichnen die Konzentration der positiven Ionen bei der ersten Lösung mit c_1 und die Konzentration der positiven Ionen bei der zweiten Lösung mit c_2 , und $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ bedeuten die entsprechenden Konzentrationen der negativen Ionen. Die Grenzbedingungen sind demzufolge

$$c_1 = (c' + c'')_{x=0} \quad \text{und} \quad \bar{c}_1 = (\bar{c}' + \bar{c}'')_{x=0},$$

$$c_2 = (c' + c'')_{x=\delta} \quad \text{und} \quad \bar{c}_2 = (\bar{c}' + \bar{c}'')_{x=\delta},$$

oder zufolge der Gleichung (15a)

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{(A_1 + A_2) r_1 x_0}{r_1 + p k}, \quad \bar{c}_1 = \frac{(B_1 + B_2) r_1 x_0}{r_1 - q k}, \\ c_2 = \frac{(A_1 + A_2) r_1 (\delta + x_0)}{r_1 + p k}, \quad \bar{c}_2 = \frac{(B_1 + B_2) r_1 (\delta + x_0)}{r_1 - q k}, \end{array} \right.$$

oder

$$(16a) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 = \frac{(c_2 - c_1)(r_1 + p k)}{r_1 \delta}, \\ B_1 + B_2 = \frac{(\bar{c}_2 - \bar{c}_1)(r_1 - q k)}{r_1 \delta}, \\ x_0 = \frac{c_1 \delta}{c_2 - c_1} = \frac{\bar{c}_1 \delta}{\bar{c}_2 - \bar{c}_1}. \end{array} \right.$$

Weiter sind die Grenzbedingungen

$$x_0 = C_1 e^{r_1 \varphi_1} \quad \text{und} \quad \delta + x_0 = C_1 e^{r_1 \varphi_2}$$

zu erfüllen, die mit Hilfe der dritten Gleichung (16a)

$$(17) \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{r_1} \log \left(\frac{c_2}{c_1} \right) \quad \text{oder} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{r_1} \log \left(\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1} \right).$$

Wir setzen voraus, daß kein Strom durch die Lösung fließt und erhalten dafür die Bedingung

$$(18) \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{k} \cdot \frac{\frac{d}{dx}(pU - qV)}{p^2U + q^2V},$$

wo U und V die Summen $u'c' + u''c''$ und $v'\bar{c}' + v''\bar{c}''$ bedeuten.¹⁾

Die Gleichungen (I) ergeben

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dx} + pkU \frac{d\varphi}{dx} = A_1 u' + A_2 u'', \\ \frac{dV}{dx} - qkV \frac{d\varphi}{dx} = B_1 v' + B_2 v''. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (19) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(pU - qV) + k(p^2U + q^2V) \frac{d\varphi}{dx} \\ = pA_1(u' + A_2u'') - q(B_1v' + B_2v'') \end{aligned}$$

und zufolge der Gleichung (18) hat man mithin

$$p(A_1u' + A_2u'') = q(B_1v' + B_2v'') = C$$

und demgemäß erhält man aus (19)

$$(19a) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dx} + pkU \frac{d\varphi}{dx} = \frac{C}{p}, \\ \frac{dV}{dx} - qkV \frac{d\varphi}{dx} = \frac{C}{q}. \end{cases}$$

Weiter ergibt sich der ersten Gleichung (15a)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r_1(x+x_0)} = \frac{c_2 - c_1}{r_1[(c_2 - c_1)x + c_1\delta]},$$

wenn x_0 aus den Gleichungen (16a) entnommen, und daraus kommt

$$(19b) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dx} + U \cdot \frac{pk(c_2 - c_1)}{r_1[(c_2 - c_1)x + c_1\delta]} = \frac{C}{p}, \\ \frac{dV}{dx} - V \cdot \frac{qk(c_2 - c_1)}{r_1[(c_2 - c_1)x + c_1\delta]} = \frac{C}{q} \end{cases}$$

1) Vgl. l. c. p. 561.

und durch Integration

$$\left\{ \begin{aligned} U \cdot [(c_2 - c_1)x + c_1 \delta]^{\frac{p k}{r_1}} &= \frac{C}{p} \frac{[(c_2 - c_1)x + c_1 \delta]^{1 + \frac{p k}{r_1}}}{\left(1 + \frac{p k}{r_1}\right)(c_2 - c_1)} + K_1, \\ V \cdot [(c_2 - c_1)x + c_1 \delta]^{-\frac{q k}{r_1}} &= \frac{C}{q} \cdot \frac{[(c_2 - c_1)x + c_1 \delta]^{1 - \frac{q k}{r_1}}}{\left(1 - \frac{q k}{r_1}\right)(c_2 - c_1)} + K_2 \end{aligned} \right.$$

oder, wenn die Integrationskonstanten mittels der Grenzbedingungen $U = U_1$ und $V = V_1$ bei $x = 0$ und $U = U_2$ und $V = V_2$ bei $x = \delta$ eliminiert werden:

$$(20) \left\{ \begin{aligned} U_2 [c_2 \delta]^{\frac{p q}{r_1}} - U_1 [c_1 \delta]^{\frac{p k}{r_1}} &= \frac{C}{p} \frac{(c_2 \delta)^{1 + \frac{p k}{r_1}} - (c_1 \delta)^{1 + \frac{p k}{r_1}}}{\left(1 + \frac{p k}{r_1}\right)(c_2 - c_1)}, \\ V_2 [c_2 \delta]^{-\frac{q k}{r_1}} - V_1 [c_1 \delta]^{-\frac{q k}{r_1}} &= \frac{C}{q} \frac{(c_2 \delta)^{1 - \frac{q k}{r_1}} - (c_1 \delta)^{1 - \frac{q k}{r_1}}}{\left(1 - \frac{q k}{r_1}\right)(c_2 - c_1)} \end{aligned} \right.$$

Wird die Konstante C durch Division aus den beiden Gleichungen (20) eliminiert, so ergibt sich zuletzt die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{U_2 \cdot \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{p k}{r_1}} - U_1}{\frac{q k}{r_1}} \cdot (c_1 \delta)^{\frac{p k}{r_1}} \cdot (c_2 \delta)^{\frac{q k}{r_1}} \\ & \quad V_2 - V_1 \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{q k}{r_1}} \\ &= \frac{q}{p} \cdot \frac{1 - \frac{q k}{r_1}}{1 + \frac{p k}{r_1}} \cdot \frac{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1 + \frac{p k}{r_1}} - 1}{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1 - \frac{q k}{r_1}} - 1} \cdot \frac{(c_1 \delta)^{1 + \frac{p k}{r_1}}}{(c_1 \delta)^{1 - \frac{q k}{r_1}}} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{U_2 \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{p k}{r_1}} - U_1}{V_2 - V_1 \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{q k}{r_1}}} = \frac{q}{p} \cdot \frac{1 - \frac{q k}{r_1}}{1 + \frac{p k}{r_1}} \cdot \frac{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1 + \frac{p k}{r_1}} - 1}{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1 - \frac{q k}{r_1}} - 1} \cdot \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\frac{q k}{r_1}}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (17)

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{U_2 e^{p k (\varphi_2 - \varphi_1)} - U_1}{V_2 - V_1 e^{q k (\varphi_2 - \varphi_1)}} &= \frac{q}{p} \cdot \frac{\log \left(\frac{c_2}{c_1} \right) - q k (\varphi_2 - \varphi_1)}{\log \left(\frac{c_2}{c_1} \right) + p k (\varphi_2 - \varphi_1)} \\ &\quad \cdot \frac{\frac{c_2}{c_1} \cdot e^{p k (\varphi_2 - \varphi_1)} - 1}{\frac{c_2}{c_1} - e^{q k (\varphi_2 - \varphi_1)}}. \end{aligned} \right.$$

eine Formel, die in die Plancksche Berechnungsformel (13), l. c., p. 567 übergeht, wenn man nur $p = q = 1$ setzt.

Aus dem obigen sieht man, daß der behandelte Fall ebenso einfach wie der früher untersuchte sich darstellen läßt. Vielleicht lassen sich alle in Praxis vorkommenden Möglichkeiten in einzelnen Fällen zusammenfassen, die keine vollständige Lösung der Gleichungen erfordern.

(Eingegangen 1. Juli 1904.)