SUR QUELQUES FONCTIONS ENTIÈRES;

Par M. Émile Borel (Paris).

Adunanza del 14 aprile 1907.

J'ai déjà eu l'occasion de signaler *) les singularités qui peuvent se présenter dans la croissance des fonctions entières et les conséquences qui en résultent pour la distribution des zéros.

Ayant été conduit à reprendre la question dans mon cours de cet hiver à la Sorbonne, j'ai constaté que l'emploi de séries présentant des lacunes fournissait la méthode la plus simple pour mettre en évidence, d'une manière élémentaire, de telles singularités. Voici comment on peut procéder.

Prenons comme série type, la série e^x ; nous poserons

$$\varphi(n) = \frac{x^n}{n!},$$

de telle manière que la série-type se présente sous la forme :

$$e^x = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) + \varphi(n+1) + \dots.$$

Nous allons étudier la fonction entière $f(x)$ définie par la série à lacunes :

$$f(x) = \varphi(n_0) + \varphi(n_1) + \varphi(n_2) + \dots + \varphi(n_p) + \varphi(n_{p+1}) + \dots,$$

dans laquelle $n_0, n_1, n_2, \dots, n_p, n_{p+1}, \dots$ désignent des entiers croissants.

Étudions tout d'abord les variations de $\varphi(n)$ lorsque x varie au voisinage de n . On a, d'après un résultat bien connu,

$$\log \varphi(n) = n \log x - \log \Gamma(n+1) = n \log x - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n + A_n,$$

A_n tendant vers la limite $-\frac{1}{2} \log 2\pi$ lorsque n tend vers l'infini.

Si l'on pose $x = n^\alpha$, il vient

$$\log \varphi(n) = \left(\alpha n - n - \frac{1}{2}\right) \log n + n + A_n.$$

Donc si α est un nombre fixe inférieur à l'unité, $\varphi(n)$ tend vers zéro lorsque n

*) *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, Gauthier-Villars, 1900), Notes II et III.

augmente indéfiniment. Si α est supérieur à l'unité, la partie principale de $\log \varphi(n)$ est $n \log x$, c'est-à-dire $x^{\frac{1}{\alpha}} \log x$.

Ces résultats étant acquis, désignons par α un nombre supérieur à l'unité et supposons que l'on ait, quelque soit p ,

$$n_{p+1} > n_p^\alpha.$$

Si nous donnons à x la valeur n_p^β , β étant un nombre compris entre 1 et α , x sera compris entre n_p et n_{p+1} et il est visible que le terme de plus grand module dans la série $\varphi(x)$ sera le terme $\varphi(n_p)$. De plus, non seulement le module des autres termes sera inférieur au module de celui-là, mais *il sera complètement négligeable par rapport à celui-là*; il suffit de le vérifier pour le terme qui le précède et pour celui qui le suit immédiatement. On a, en effet, en posant $x = n_p^\beta$,

$$\log \varphi(n_p) = n_p \log x - \left(n_p + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\beta} \log x + n_p + A_{n_p},$$

$$\log \varphi(n_{p+1}) = \beta n_{p+1} \log n_p - \left(n_{p+1} + \frac{1}{2}\right) \log n_{p+1} + n_{p+1} + A_{n_{p+1}},$$

$$\log \varphi(n_{p-1}) = n_{p-1} \log x - \left(n_{p-1} + \frac{1}{2}\right) \log n_{p-1} + n_{p-1} + A_{n_{p-1}},$$

et comme $n_{p+1} > n_p^\alpha$ et $n_{p-1} < n_p^{\frac{1}{\alpha}}$, on voit que $\varphi(n_{p+1})$ est très voisin de zéro, tandis que $\varphi(n_p)$ est de l'ordre de x^{n_p} et $\varphi(n_{p-1})$ de l'ordre de $x^{n_{p-1}}$. Donc $f(x)$ est égal au produit de $\varphi(n_p)$ par $1 + \varepsilon$, ε étant d'autant plus voisin de zéro que n_p est plus grand (β et α restant fixes). On a par suite, en supposant pour un instant x positif et posant

$$f(x) = e^{x^\mu},$$

la relation

$$x^\mu = n_p \log x - \left(n_p + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\beta} \log x + n_p + A_{n_p};$$

d'où l'on conclut, n_p étant égal à $x^{\frac{1}{\beta}}$,

$$\mu = \frac{1}{\beta} + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro lorsque, α et β restant fixes, n_p augmente indéfiniment.

Supposons maintenant que l'argument de x soit quelconque; on obtiendra de même:

$$|f(x)| = e^{x^{|\mu|}},$$

μ étant toujours égal à $\frac{1}{\beta} + \varepsilon$.

Si donc on fait varier x d'une manière continue de 0 à l'infini par un chemin quelconque, le module de $f(x)$ pourra être déterminé d'une manière précise pour les valeurs de x comprises entre $n_p^{\beta'}$ et $n_p^{\beta''}$, β' et β'' étant deux nombres quelconques assujettis à la seule condition d'être positifs et compris entre 1 et α , la limite supérieure α exclue. Si l'on pose

$$\mu' = \frac{1}{\beta'}, \quad \mu'' = \frac{1}{\beta''},$$

le module de $f(x)$ prend ainsi des valeurs comprises entre $e^{|x|^{\mu'}+\varepsilon}$ et $e^{|x|^{\mu''}+\varepsilon}$. On peut d'ailleurs prendre $\beta' = 1$, d'où $\mu' = 1$ et β'' aussi voisin que l'on veut de α , de sorte que μ'' est aussi voisin que l'on veut de $\frac{1}{\alpha} = \lambda$. Dès lors on voit que $|f(x)|$ est égal tantôt à $e^{|x|}$ et tantôt à $e^{|x|^\lambda}$.

Il n'est pas superflu d'observer que la fonction $f(x)$, pour des valeurs positives de x , est positive *ainsi que toutes ses dérivées*; cette propriété n'est nullement incompatible avec celle que nous venons d'énoncer: pour certaines valeurs de x , le rapport de $f(x)$ à e^x est très voisin de un, et, pour d'autres valeurs de x , le rapport de $f(x)$ à e^{x^λ} est très voisin de un.

Étudions maintenant la distribution des zéros de la fonction entière $f(x)$. Au lieu d'employer les méthodes générales, il est plus court d'utiliser un théorème bien connu *) :

Si l'on a, sur un contour C , à l'intérieur duquel $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont holomorphes :

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \right| < 1,$$

les deux fonctions $\psi(x)$ et $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C .

Il suffit de prendre, en conservant les notations précédentes,

$$\psi(x) = \varphi(n_p),$$

$$\varphi(x) = f(x) - \varphi(n_p),$$

le contour C étant le cercle

$$|x| = n_p^\beta.$$

On en conclut que le nombre des zéros de $f(x)$ à l'intérieur du cercle C est égal au nombre de zéros de $\psi(x)$, c'est-à-dire à n_p . Ce résultat est le même, quelle que soit la valeur de β entre β' et β'' ; on en conclut que la fonction $f(x)$ n'a pas de zéros dans la couronne comprise entre les cercles C_p' et C_p'' :

$$(C_p') \quad |x| = n_p^{\beta'},$$

$$(C_p'') \quad |x| = n_p^{\beta''}.$$

Dans la couronne circulaire comprise entre le cercle C_p'' et le cercle C_{p+1}' la fonction $f(x)$ a $n_{p+1} - n_p$ zéros.

On voit que la distribution des zéros est lacunaire, de la même manière que la distribution des termes de la série. Les surfaces des couronnes circulaires successives comprises entre les cercles C_p' , C_p'' , C_{p+1}' , C_{p+1}'' , C_{p+2}' , ... vont en augmentant indéfiniment; mais les couronnes renfermant des zéros sont *relativement* plus étroites que les autres, si l'on choisit convenablement β' et β'' ; d'une manière précise, en désignant par R_p' , R_p'' , R_{p+1}' , ... les rayons des cercles C_p' , C_p'' , C_{p+1}' , ..., on peut s'arranger

*) Voir HERMITE, *Cours d'analyse: Leçon sur la série de LAGRANGE*.

de manière que, lorsque p augmente indéfiniment, le rapport

$$\frac{\log R''_p}{\log R'_p}$$

diffère aussi peu que l'on veut de α , tandis que le rapport

$$\frac{\log R'_{p+1}}{\log R''_p}$$

diffère aussi peu que l'on veut de l'unité.

Il est clair que l'exemple précis que nous avons choisi peut être modifié d'une infinité de manières.

Paris, mars 1907.

ÉMILE BOREL.