Sul problema della temperatura nell'ellissoide.

(Di CARLO SOMIGLIANA, a Pavia.)

Nella introduzione alla classica Memoria: *Sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux* (*) il LAMÉ, a proposito del problema da lui risolto, così scrive: « ... il s'agissait de traiter un corps « pour lequel les procédés d'analyse, employés jusqu'ici, étaient totalement « impuissants: car ni les coordonnées du prisme rectangle, ni celle de la « sphère, les seules dont les géomètres aient encore fait usage en physique « mathématique, ne pouvaient aborder l'ellipsoïde ».

Ma quest'asserzione dell'illustre analista non è completamente esatta; poichè, se è vero che mediante le coordinate e le trascendenti ellittiche si arriva alla nota elegante rappresentazione delle soluzioni semplici del problema come prodotti di tre funzioni di una sola variabile, d'altra parte non si può dire che l'uso di queste coordinate sia indispensabile per risolvere il problema dell'ellissoide.

E difatti i prodotti di LAMÉ esprimono in ultima analisi funzioni razionali intere delle coordinate rettangolari (che noi chiameremo *polinomi di Lamé*) ed è quindi lecito domandare se sia possibile definire e costruire questi polinomi per via puramente algebrica, come nel caso della sfera è possibile definire e costruire le cosiddette *funzioni armoniche* senza ricorrere alle formole trascendenti che s'incontrano facendo uso delle coordinate sferiche.

Ora una via che può effettivamente condurre ad un tale risultato si ha applicando un metodo d'integrazione, da me già esposto sommariamente in una Nota (**) dei Rendiconti del R. Istituto Lombardo (serie 2.^a, vol. 25, 1891).

(*) Journal de Mathématiques, tome 4, 1839.

(**) *Intorno alla integrazione per mezzo di soluzioni semplici.*

L'applicazione di questo metodo al problema della temperatura stazionaria nell'ellissoide forma l'oggetto di questo lavoro; ma il principio sul quale tal metodo è fondato gode di una generalità che sorpassa assai il problema di LAMÉ, e può quindi condurre alla integrazione di equazioni per le quali gli artifici speciali, che hanno servito in questo caso, non hanno più alcun valore. In particolare le formole, che io trovo, sono immediatamente estendibili al caso di un ellissoide in uno spazio di un numero qualunque di dimensioni, problema pel quale non basterebbero le trascendenti ellittiche, qualora si volesse seguire la via di LAMÉ. L'estensione poi è così semplice che io mi limito ad accennarla qui, e nel seguito mi atterrò sempre al caso del problema fisico con tre variabili indipendenti.

Questo caso si presenta come il più interessante a studiarsi col nuovo metodo, poichè il confronto coi risultati già noti può portare a stabilire leggi generali applicabili anche in altri casi, e servire quindi come utile esercizio per passare poi a problemi più complicati. D'altra parte i risultati particolari a cui si arriva, hanno anche in sè qualche valore, in quanto presentano sotto un nuovo punto di vista la soluzione di LAMÉ.

L'osservazione che nel problema della temperatura dell'ellissoide si possa far a meno delle funzioni di LAMÉ si trova anche in una Nota di LIOUVILLE (*). Però col procedimento, ivi indicato dall'Autore, più che altro si ottiene una trasformazione della serie di LAMÉ, atta a dimostrarne la convergenza, e vengono messe in luce le relazioni fra le funzioni di LAMÉ e le funzioni sferiche; invece non si vede molto chiaramente come egli intenda evitare l'uso delle funzioni o dei polinomi di LAMÉ, anzi la via più naturale per giungere ai risultati, cui egli accenna, è appunto quella di servirsi di questi polinomi.

Nello studio che segue vengono stabilite e specialmente studiate queste due proprietà: 1.º la determinazione dei polinomi di LAMÉ si riduce ad un problema ben noto, quello di ridurre a forma canonica il sistema di due forme bilineari; 2.º se si chiama *genere* dei polinomi di LAMÉ, il grado dell'equazione algebrica, da cui essi dipendono, si trova che tutti quelli dello stesso genere sono suscettibili di una rappresentazione uniforme.

Del resto questo lavoro non ha la pretesa di essere una esposizione completa della teoria algebrica dei polinomi di LAMÉ, ma solo ha per scopo di mettere in luce la possibilità di questa teoria e segnarne alcune linee principali.

(*) *Sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique*. Journal de Mathématiques, tomo 10. 1845.

§ 1. Definizione algebrica delle funzioni armoniche ellissoidiche.

La funzione u che rappresenta la temperatura nell'interno di un corpo S omogeneo, isotropo, supposto che in esso si sia stabilita una distribuzione stazionaria, deve soddisfare alle seguenti condizioni:

1.° Nello spazio S deve essere regolare insieme alle sue derivate prime, ed avere le derivate seconde finite ed integrabili.

2.° Soddisfare in tutto lo spazio S all'equazione di LAPLACE.

3.° Sulla superficie s , che limita lo spazio S , assumere i valori di una funzione arbitrariamente data sulla superficie stessa e che rappresenta la temperatura dell'ambiente nell'immediata vicinanza della superficie.

Sono, come si sa, le condizioni del problema di DIRICHLET per lo spazio S .

Supponiamo ora di aver costruito una serie di funzioni $u_1, u_2, \dots$ le quali soddisfacciano alle condizioni 1.^a e 2.^a, ed inoltre sulla superficie verifichino le seguenti relazioni:

$$h_i \frac{\partial u_i}{\partial n} = H u_i \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

dove n rappresenta la normale, che supporremo diretta verso l'interno, le h_i sono costanti finite, non nulle ed inoltre tutte differenti fra loro, e H è una funzione dei punti della superficie, indipendente dalle u_i .

Applicando il lemma di GREEN ad una coppia qualunque u_p, u_q di queste funzioni si ha:

$$\int_s \left(u_p \frac{\partial u_q}{\partial n} - u_q \frac{\partial u_p}{\partial n} \right) ds = 0,$$

da cui, mediante le (1), si ricavano subito le relazioni:

$$\int_s u_p u_q H ds = 0 \quad \int_s \frac{\partial u_p}{\partial n} \frac{\partial u_q}{\partial n} \frac{ds}{H} = 0 \quad p \neq q, \quad (2)$$

le quali, come nel metodo classico così detto delle *soluzioni semplici*, possono servire ad isolare i coefficienti in uno sviluppo della forma:

$$u = \sum_i c_i u_i, \quad (3)$$

oppure:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_i c_i \frac{\partial u_i}{\partial n}. \quad (4)$$

Difatti, se ammettiamo *a priori* per la u uno sviluppo della forma (3), e consideriamo lecita l'integrazione termine a termine, applicando la prima delle (2), troviamo:

$$c_i = \frac{\int_S f \cdot u_i H ds}{\int_S u_i^2 H ds},$$

dove f rappresenta i valori della u sulla superficie.

Analogamente la seconda delle (2) può servire a determinare i coefficienti c_i applicandola allo sviluppo (4), quando sulla superficie siano dati i valori della derivata $\frac{\partial u}{\partial n}$ invece di quelli della u . La stessa serie di funzioni $u_1, u_2, \dots$ può quindi servire a risolvere i due problemi.

Possiamo subito osservare che fra le funzioni u_i si può sempre includere la funzione $u_0 = \text{cost.}$, senza che le (2) cessino di sussistere, quantunque per questa funzione, affinchè sia soddisfatta la (1), debbasi supporre $\frac{1}{h_0} = 0$. Difatti, supponendo $u_p = u_0$, la seconda delle (2) è soddisfatta, poichè $\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0$, e perchè lo sia anche la prima dovrà essere:

$$\int_S u_p H ds = 0,$$

per $p = 1, 2, \dots$. Ora essendo $\Delta_2 u_p = 0$ si ha:

$$0 = \int_S \Delta_2 u_p dS = - \int_S \frac{\partial u_p}{\partial n} ds = - \frac{1}{h_p} \int_S u_p H ds,$$

e le equazioni precedenti sono quindi soddisfatte, poichè, per ipotesi, le costanti $\frac{1}{h_p}$ sono finite e differenti da zero.

È assai facile verificare che, se lo spazio S è una sfera, le funzioni cosiddette *armoniche sferiche*, rientrano nella definizione delle funzioni $u_1, u_2, \dots$ da noi stabilita. Questo fatto basta a giustificare la nostra ipotesi della esistenza di una serie di funzioni $u_1, u_2, \dots$, mostrando che in essa non vi è nulla di contraddittorio.

Supponiamo ora che lo spazio S sia quello racchiuso da un'ellissoide a tre assi.

Le armoniche sferiche sono, come è noto, funzioni razionali, intere, omogenee delle coordinate rettangolari. Si può quindi cercare se sia possibile costruire delle funzioni più generali, razionali ed intere, le quali nello spazio interno ad un'ellissoide soddisfacciano alle condizioni imposte alle $u_1, u_2, \dots$. Queste funzioni si potranno allora chiamare *armoniche ellissoidiche*.

L'equazione dell'ellissoide sia:

$$\Omega = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

e perciò sulla superficie si avrà:

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{x}{a^2 R} \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{y}{b^2 R} \quad \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{z}{c^2 R},$$

dove:

$$R = -\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

per cui se poniamo:

$$H = -\frac{1}{R},$$

la (1) in questo caso si potrà scrivere:

$$h_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{x}{a^2} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{y}{b^2} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{z}{c^2} \right) = u_i. \quad (5)$$

Noi supporremo che u_i sia razionale, intera e di grado i ; inoltre, se i è pari, non contenga che termini di grado pari, se è dispari, non contenga che termini di grado dispari. Per cui indicando in generale con φ_r una funzione razionale, intera, omogenea, di grado r , si avrà:

$$u_i = \varphi_i + \varphi_{i-2} + \dots \quad \dots + \begin{cases} \dots + \varphi_2 + \varphi_0 & \text{se } i \text{ è pari} \\ \dots + \varphi_3 + \varphi_1 & \text{se } i \text{ è dispari.} \end{cases}$$

È chiaro ora che l'operazione che nel primo membro della (5) si fa sulla u_i , non altera la legge di formazione della u_i ; per cui indicando con D questa operazione (all'infuori della moltiplicazione per h_i) si avrà:

$$Du_i = \psi_i + \psi_{i-2} + \dots \quad \dots + \begin{cases} \dots + \psi_2 + \psi_0 & \text{se } i \text{ è pari} \\ \dots + \psi_3 + \psi_1 & \text{se } i \text{ è dispari,} \end{cases}$$

ove le ψ_r sono ancora funzioni omogenee, intere di grado r . Perciò noi potremo rendere la (5) omogenea, moltiplicando rispettivamente le espressioni

φ_{i-k} , ψ_{i-k} , che compaiono in u_i e Du_i , per Ω^k ; ed inoltre potremo supporre che la (5), così modificata, debba essere soddisfatta in tutto il campo, cioè debbano nei due membri essere identici i coefficienti dei termini simili rispetto alle variabili x, y, z . Difatti, essendo sulla superficie $\Omega = 1$, la (5) sarà in tale ipotesi certamente verificata.

Le u_i inoltre debbono soddisfare l'equazione di LAPLACE $\Delta_2 u_i = 0$. Ora anche l'operazione Δ_2 non altera la legge di formazione delle u_i ; quindi ciascuna delle φ_r separatamente dovrà soddisfare a questa equazione, cioè essere una funzione armonica sferica.

L'enumerazione delle equazioni, a cui tutte queste condizioni conducono, mostra che esse non superano il numero dei coefficienti disponibili nelle u_i . Difatti per i pari, $= 2n$, il numero N_{2n} dei coefficienti di u_i è:

$$N_{2n} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k+1)(2k+2)}{2},$$

mentre l'equazione (5) dà luogo ad

$$M_{2n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2},$$

condizioni, e l'equazione di LAPLACE ad altre

$$M'_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)(2k+2)}{2}.$$

Dunque:

$$N_{2n} = M_{2n} + M'_{2n}.$$

Analogamente per i dispari, $= 2n+1$, si trova:

$$N_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k+2)(2k+3)}{2} \quad M_{2n+1} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{2}$$

$$M'_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+2)(2k+3)}{2}.$$

Quindi anche in questo caso:

$$N_{2n+1} = M_{2n+1} + M'_{2n+1},$$

cioè il numero dei coefficienti indeterminati uguaglia quello delle equazioni da soddisfare. Queste sono tutte lineari, omogenee rispetto ai coefficienti incogniti; di più quelle che provengono dalla (5), contengono un'altra incognita, la h_i . Perchè il sistema sia possibile, questa h_i dovrà quindi scegliersi in modo da annullare il determinante del sistema stesso; allora i coefficienti

della u_i risulteranno determinati linearmente all'infuori di un fattore arbitrario comune, che è implicito nella definizione.

La possibilità di costruire le armoniche ellissoidiche per la via indicata, resta così dimostrata, almeno in generale. Vedremo poi che queste funzioni coincidono con quelle che abbiamo chiamato *polinomi di Lamè* (§ 6).

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ i coefficienti di una u_i ; la forma generale delle equazioni, a cui essi devono soddisfare è la seguente:

$$h \sum_{k=1}^N a_{ks} \alpha_k = \sum_{k=1}^N b_{ks} \alpha_k \quad (6)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N),$$

ove le $a_{k,s}, b_{k,s}$ sono costanti, di cui le prime, in una stessa equazione, possono anche essere tutte nulle, poichè nelle equazioni provenienti dalla $\Delta_2 u_i = 0$ non compare la h . L'equazione che determina h si può quindi scrivere:

$$\begin{vmatrix} ha_{11} - b_{11} & \dots & ha_{N1} - b_{N1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ ha_{N1} - b_{N1} & \dots & ha_{NN} - b_{NN} \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

ed ha la forma dell'equazione fondamentale nella teoria dei sistemi di due forme bilineari:

$$\varphi = \sum a_{ks} \alpha_k \beta_s \quad \psi = \sum b_{ks} \alpha_k \beta_s,$$

la quale è stata oggetto di tante ricerche per parte di JACOBI, BORCHARDT, WEIERSTRASS, ecc.

Noi non discuteremo qui la questione della possibilità che la (7) abbia radici multiple; dalla identità delle nostre funzioni coi polinomi di LAMÉ risulterà che essa ha tutte le radici distinte, almeno finchè l'ellissoide è a tre assi. Ricorderemo invece un ragionamento conosciuto, che mostra che le radici devono essere tutte reali.

Difatti se esistesse una coppia di radici complesse coniugate h', h'' i coefficienti delle due funzioni u', u'' corrispondenti, che sono funzioni reali e razionali di h', h'' rispettivamente, sarebbero parimenti complessi e coniugati; perciò sarebbe impossibile l'equazione:

$$\int_s u' u'' \frac{ds}{R} = 0,$$

poichè il prodotto $u' u''$ risulterebbe la somma di due quadrati.

Ammissa la semplicità delle radici della (7) è noto che esistono in generale due sostituzioni lineari per le variabili α , β rispettivamente:

$$\alpha_k = \sum_p c_{kp} \xi_p \quad \beta_s = \sum_q e_{sq} \eta_q, \quad (8)$$

che riducono le forme φ , ψ a contenere solamente i prodotti delle variabili ξ , η di indice uguale, cioè:

$$\varphi = \sum_p A_p \xi_p \eta_p \quad \psi = \sum_p h_p A_p \xi_p \eta_p,$$

dove inoltre $h_1, h_2, \dots, h_N$ sono le radici della (7).

Ora osserviamo che le equazioni (6) si possono ottenere uguagliando a zero la variazione, rispetto alle variabili β , della forma $h\varphi - \psi$; poichè infatti si ha per tale variazione:

$$\delta(h\varphi - \psi) = \sum_{k,s} (h a_{ks} - b_{ks}) \alpha_k \delta \beta_s.$$

Ora colle nuove variabili questa variazione diviene:

$$\delta(h\varphi - \psi) = \sum_p (h - h_p) A_p \xi_p \delta \eta_p,$$

e quindi le equazioni (6) divengono:

$$(h - h_1) \xi_1 = 0, \quad (h - h_2) \xi_2 = 0, \dots, \quad (h - h_N) \xi_N = 0,$$

le cui N soluzioni si determinano immediatamente. Esse sono:

$$\begin{array}{lll} h = h_1 & \xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_N = 0 & \xi_1 = \text{cost.} \\ h = h_2 & \xi_1 = \xi_3 = \dots = \xi_N = 0 & \xi_2 = \text{cost.} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h = h_N & \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{N-1} = 0 & \xi_N = \text{cost.} \end{array}$$

I valori corrispondenti per le α si ricavano dalle equazioni (8) e sono i seguenti:

$$\begin{array}{llll} \text{per } h = h_1 & \alpha_1 = c_{11}, & \alpha_2 = c_{21}, \dots & \alpha_N = c_{N1} \\ \text{per } h = h_2 & \alpha_1 = c_{12}, & \alpha_2 = c_{22}, \dots & \alpha_N = c_{N2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{per } h = h_N & \alpha_1 = c_{1N}, & \alpha_2 = c_{2N}, \dots & \alpha_N = c_{NN}, \end{array}$$

ove a ciascuna serie di valori può aggiungersi un fattore di proporzionalità.

Possiamo quindi concludere che in generale:

La determinazione delle funzioni armoniche ellissoidiche può ricondursi alla riduzione di due forme bilineari a forma canonica; i coefficienti di queste funzioni coincidono coi coefficienti di una delle due sostituzioni lineari che effettuano la riduzione.

Studieremo in seguito più particolarmente la forma dell'equazione (7).

§ 2. Classificazione.

Abbiamo già osservato che le operazioni D e Δ_2 non alterano la legge di formazione delle u_i ; ora possiamo aggiungere che se una u_i si comporta in un determinato modo rispetto al segno quando si mutano le variabili x, y, z nelle loro contrarie, cioè è pari o dispari rispetto a ciascuna di esse, questa proprietà si conserva anche dopo eseguite sopra di essa le operazioni D e Δ_2 . Difatti considerando un termine qualunque $Ax^r y^s z^t$, si ha:

$$D(Ax^r y^s z^t) = A \left(\frac{r}{a^2} + \frac{s}{b^2} + \frac{t}{c^2} \right) x^r y^s z^t$$

$$\Delta_2(Ax^r y^s z^t) = A \{ r(r-1)y^2 z^2 + s(s-1)z^2 x^2 + t(t-1)x^2 y^2 \} x^{r-2} y^{s-2} z^{t-2},$$

e quindi il grado delle x, y, z conserva la stessa parità che aveva nel prodotto $x^r y^s z^t$.

Da ciò segue che, se nelle espressioni delle u_i raccogliamo insieme tutti i termini che si comportano nello stesso modo rispetto alla parità delle variabili, e scriviamo le equazioni che determinano i coefficienti di questa funzione, i coefficienti di un gruppo non compariranno mai in una stessa equazione coi coefficienti di un altro e quindi ciascun gruppo potrà essere determinato isolatamente.

Ora un polinomio, come le u_i , composto con termini tutti di grado pari, o tutti di grado dispari, può comportarsi in quattro modi differenti rispetto alla parità delle variabili.

Se è di grado pari può essere:

	1. ^o	2. ^o	3. ^o	4. ^o
rispetto ad x :	pari	pari	dispari	dispari
rispetto ad y :	pari	dispari	pari	dispari
rispetto a z :	pari	dispari	dispari	pari.

Se è di grado dispari può essere:

	1. ^a	2. ^a	3. ^a	4. ^a
rispetto ad x :	dispari	dispari	pari	pari
rispetto ad y :	dispari	pari	dispari	pari
rispetto a z :	dispari	pari	pari	dispari.

Dunque possiamo concludere che la determinazione delle funzioni armoniche ellissoidiche di qualunque grado si ridurrà sempre alla determinazione *indipendente* di *quattro* funzioni distinte; diremo perciò che una funzione armonica è di 1.^a, 2.^a, 3.^a o 4.^a classe secondo quella cui appartiene delle classi sopra indicate con questi numeri, in corrispondenza colla parità del suo grado. Rappresenteremo inoltre, d'ora innanzi, con $\omega_m, \varphi_m, \psi_m, \chi_m$ i polinomi omogenei di grado m e di classe 1.^a, 2.^a, 3.^a, 4.^a rispettivamente, quando i loro coefficienti si considerano come indeterminati. È facile assegnarne la forma generale.

I polinomi ω_{2n} , dovendo essere pari rispetto a tutte tre le variabili, saranno funzioni di x^2, y^2, z^2 ed avranno quindi la forma del polinomio omogeneo generale di grado n di queste variabili; conterranno quindi $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

coefficienti. Inoltre $\Delta_2 \omega_{2n}$, per la legge sopraindicata, conterrà $\frac{n(n+1)}{2}$ termini; quindi se ω_{2n} soddisfa all'equazione di LAPLACE conterrà solo $n+1$ coefficienti arbitrari. Potremo dire anche: esistono solamente $n+1$ funzioni ω_{2n} indipendenti che soddisfanno all'equazione di LAPLACE.

Indicheremo con $M_n^{(i)}$ il numero dei coefficienti di una funzione di classe i e di grado n ; con $m_n^{(i)}$ il numero dei suoi coefficienti indipendenti quando è soggetta alla condizione di soddisfare all'equazione di LAPLACE. Avremo allora:

$$M_{2n}^{(1)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad m_{2n} = n+1.$$

Dalla forma generale delle ω_{2n} si passa facilmente a quella delle rimanenti. Le $\varphi_{2n}, \psi_{2n}, \chi_{2n}$ dovendo essere pari rispetto ad una delle variabili e dispari rispetto alle rimanenti saranno composte del prodotto di una ω_{2n-2} per yz, zx, xy rispettivamente. Avremo quindi:

$$\varphi_{2n} = yz \omega_{2n-2} \quad \psi_{2n} = zx \omega_{2n-2} \quad \chi_{2n} = xy \omega_{2n-2},$$

e inoltre:

$$M_{2n}^{(2)} = M_{2n}^{(3)} = M_{2n}^{(4)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$m_{2n}^{(2)} = m_{2n}^{(3)} = m_{2n}^{(4)} = n.$$

Passando alle forme di grado dispari si trova subito che la forma generale delle ω_{2n+1} è la seguente:

$$\omega_{2n+1} = x y z \omega_{2n-2},$$

e quindi si ha:

$$M_{2n+1}^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2} \quad m_{2n+1}^{(1)} = n.$$

Finalmente si trova:

$$\varphi_{2n+1} = x \omega_{2n} \quad \psi_{2n+1} = y \omega_{2n} \quad \chi_{2n+1} = z \omega_{2n},$$

e perciò:

$$M_{2n+1}^{(1)} = M_{2n+1}^{(3)} = M_{2n+1}^{(4)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$m_{2n+1}^{(2)} = m_{2n+1}^{(3)} = m_{2n+1}^{(4)} = n+1.$$

A conferma di questi numeri osserviamo che indicando con r un intero qualunque pari o dispari, si ha:

$$M_r^{(1)} + M_r^{(3)} + M_r^{(3)} + M_r^{(4)} = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

$$m_r^{(1)} + m_r^{(2)} + m_r^{(3)} + m_r^{(4)} = 2r+1,$$

e questi numeri coincidono con quelli che danno rispettivamente il numero dei termini di una forma generale di grado r , e quello coefficienti indipendenti della stessa, quando deve soddisfare all'equazione di LAPLACE.

Da ciò che precede dunque risulta che le armoniche ellissoidiche, sia di grado pari che di grado dispari, possono essere divise in quattro classi; noi le indicheremo rispettivamente colle lettere T , U , V , W e avremo:

$$T_r = \omega_r + \omega_{r-2} + \dots$$

$$U_r = \varphi_r + \varphi_{r-2} + \dots$$

$$V_r = \psi_r + \psi_{r-2} + \dots$$

$$W_r = \chi_r + \chi_{r-2} + \dots,$$

ove r può essere pari o dispari. Inoltre approfittando delle relazioni trovate fra le forme generali delle ω , φ , ψ , χ e ponendo:

$$\Phi_n = \omega_{2n} + \omega_{2n-2} + \dots + \omega_2 + \omega_0,$$

avremo per r pari, $= 2n$,

$$\begin{aligned} T_{2n} &= \Phi_n \\ U_{2n} &= y z \Phi_{n-1} & V_{2n} &= z x \Phi_{n-1} & W_{2n} &= x y \Phi_{n-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

e per r dispari, $= 2n + 1$,

$$\begin{aligned} T_{2n+1} &= xyz\Phi_{n-1} \\ U_{2n+1} &= x\Phi_n \quad V_{2n+1} = y\Phi_n \quad W_{2n+1} = z\Phi_n. \end{aligned} \quad (9')$$

Le quattro forme trovate pei polinomi di grado pari e dispari corrispondono agli otto modi differenti secondo cui può comportarsi una funzione che sia pari o dispari secondo ciascuna delle variabili x, y, z . Come una funzione qualsiasi di una variabile può sempre decomorsi nella somma di due funzioni, l'una pari e l'altra dispari, colla formola:

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)],$$

così una funzione di tre variabili può decomorsi nella somma di otto, le quali si comportano negli otto modi sopraindicati rispetto alla parità. Una funzione che sia composta con una somma di armoniche ellissoidiche, come noi abbiamo supposto per la funzione che rappresenta la temperatura, risulta così già per sè decomposta nelle otto funzioni, ed il problema della temperatura viene diviso in otto problemi distinti, ciascuno dei quali corrisponde ad un caso di simmetria speciale, rispetto ai piani principali diametrali, pei valori della temperatura sulla superficie. Ciò del resto è già stato osservato anche da LAMÉ.

Mediante le formole (9), (9') si può semplificare notevolmente il problema della determinazione dei polinomi u_r .

Le equazioni che determinano i coefficienti di u_n si possono dividere in due gruppi; quelle che provengono dall'equazione $\Delta_2 u_r = 0$, che chiameremo sistema (I) e quelle che provengono dall'equazione (5), che chiameremo sistema (II).

Per determinare T_{2n} dobbiamo (9) considerare i due sistemi di equazioni che risultano da:

$$\Delta_2 \Phi_n = 0 \quad h D \Phi_n = \Phi_n.$$

Ora per la funzione U_{2n+1} dalle (9') si ha:

$$\begin{aligned} \Delta_2 U_{2n+1} &= x \left(\Delta_2 \Phi_n + 4 \frac{\partial \Phi_n}{\partial (x^2)} \right) \\ D U_{2n+1} &= x \left(D \Phi_n + \frac{1}{a^2} \Phi_n \right), \end{aligned}$$

e la forma generale di Φ_n è la seguente:

$$\Phi_n = \sum A_{rst} x^{ir} y^{js} z^{kt},$$

dove r, s, t sono numeri interi o nulli. Di qui appare che le equazioni che si deducono da $\Delta_2 T_{2n} = 0$ contengono gli stessi coefficienti che quelle risultanti dall'equazione $\Delta_2 U_{2n+1} = 0$, soltanto moltiplicati per coefficienti numerici diversi; ossia:

Le equazioni del sistema (I) per T_{2n} ed U_{2n+1} coincidono, all'infuori dei coefficienti numerici delle incognite.

Indicando con λ la costante di proporzionalità h relativa alla funzione U_{2n+1} , l'equazione (5) per questa funzione si può scrivere:

$$\lambda D \Phi_n = \left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right) \Phi_n,$$

e quindi se poniamo:

$$\frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{a^2}} = h,$$

quest'equazione diventa identica all'equazione analoga per T_{2n} . Dunque:

Il sistema (II) per U_{2n+1} coincide col sistema (II) per T_{2n} quando fra le due rispettive costanti di proporzionalità λ ed h si ponga la relazione lineare:

$$\lambda h + a^2(\lambda - h) = 0.$$

Possiamo riassumere queste due proprietà dicendo che i due problemi della determinazione di T_{2n} e U_{2n+1} sono algebricamente equivalenti.

Relazioni analoghe si trovano fra i sistemi di equazioni che determinano T_{2n} e quelli che determinano tutti gli altri polinomi parimenti formati con Φ_n .

Difatti troviamo:

$$\begin{aligned} \Delta_2 U_{2n+2} &= yz \left(\Delta_2 \Phi_n + 4 \frac{\partial \Phi_n}{\partial (y^2)} + 4 \frac{\partial \Phi_n}{\partial (z^2)} \right) \\ D U_{2n+2} &= yz \left(D \Phi_n + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \Phi_n \right). \end{aligned}$$

Quindi il primo dei due teoremi precedenti sta ancora e l'equazione (5) si può scrivere, chiamando λ' la costante di proporzionalità,

$$\lambda' D \Phi_n = \left[1 - \lambda' \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right] \Phi_n.$$

Perciò può essere ridotta a coincidere colla corrispondente di T_{2n} ponendo fra le costanti λ' ed h la relazione:

$$\lambda' h \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \lambda' - h = 0.$$

Sussiste quindi anche il secondo teorema.

Finalmente abbiamo:

$$\Delta_2 T_{2n+3} = x y z \left[\Delta_2 \Phi_n + 4 \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial (x^2)} + \frac{c \Phi_n}{\partial (y^2)} + \frac{c \Phi_n}{\partial (z^2)} \right) \right]$$

$$D T_{2n+3} = x y z \left[D \Phi_n + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \Phi_n \right].$$

Di qui appare che il primo teorema sussiste ancora, e che la coincidenza fra i due sistemi (II) per T_{2n} e T_{2n+3} si può stabilire ponendo fra le corrispondenti costanti h ed h' la relazione lineare:

$$h' h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + h' - h = 0.$$

I casi rimanenti, cioè quelli riguardanti le funzioni V_{2n+1} , W_{2n+1} , V_{2n+2} , W_{2n+2} , non hanno bisogno di essere considerati potendo essere dedotti dai precedenti con permutazioni circolari sopra x , y , z e a , b , c .

Concludendo dunque vediamo che, una volta determinata T_{2n} , gli stessi procedimenti algebrici conducono a determinare altre sette funzioni, cioè U_{2n+1} , V_{2n+1} , W_{2n+1} e T_{2n+3} , U_{2n+2} , V_{2n+2} , W_{2n+2} , le quali, come si è visto, sono formate mediante Φ_n . Noi esprimeremo l'affinità che esiste fra queste otto funzioni dicendo che esse sono *dello stesso genere*. Vedremo (§ 4) che la determinazione di T_{2n} dipende da un'equazione algebrica di grado $n+1$; perciò diremo che quelle otto funzioni sono *di genere $n+1$* .

Le armoniche ellissoidiche si possono così riunire in gruppi di $8(n+1)$, la cui legge di formazione è la stessa; di più, introducendo un tale criterio di classificazione, si viene a mettere in evidenza il grado di difficoltà che presenta la loro determinazione.

§ 3. Le funzioni armoniche ellissoidiche di genere 1 e 2.

Come applicazione delle considerazioni precedenti studieremo le funzioni di genere più semplice.

T_0 è, come sappiamo, una costante, e possiamo assumere:

$$T_0 = 1.$$

Conformemente alle (9), (9') avremo allora per le altre sette funzioni di genere 1:

$$\begin{aligned} U_1 &= x & V_1 &= y & W_1 &= z \\ T_3 &= x y z & U_2 &= y z & V_2 &= z x & W_2 &= x y, \end{aligned}$$

Queste, come si vede, sono indipendenti dagli assi dell'ellissoide e sono anche armoniche sferiche. Per le corrispondenti costanti di proporzionalità abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1} &= \frac{1}{a^2} & \frac{1}{\mu_1} &= \frac{1}{b^2} & \frac{1}{\nu_1} &= \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{h_3} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} & \frac{1}{\lambda_2} &= \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} & \frac{1}{\mu_2} &= \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} & \frac{1}{\nu_2} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \end{aligned}$$

Passando ora alle armoniche di genere 2, abbiamo come forma generale di Φ_1

$$\Phi_1 = A x^2 + B y^2 + C z^2 + E,$$

ove A, B, C, E sono i coefficienti da determinare. Di qui si ricava:

$$\frac{1}{2} D \Phi_1 = A \frac{x^2}{a^2} + B \frac{y^2}{b^2} + C \frac{z^2}{c^2}.$$

Scriveremo la costante di proporzionalità relativa a T_2 sotto la forma $\frac{1}{2} h$, e allora dall'equazione:

$$\frac{1}{2} h D \Phi_1 = \Phi_1,$$

ridotta omogenea moltiplicando E per

$$\Omega = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

si ricavano le seguenti equazioni per determinare A , B , C , E :

$$A(h - a^2) = B(h - b^2) = C(h - c^2) = E.$$

Quindi prendendo, come è lecito, $E = 1$, possiamo scrivere:

$$T_2 = \frac{x^2}{h - a^2} + \frac{y^2}{h - b^2} + \frac{z^2}{h - c^2} + 1. \quad (10)$$

Ora per determinare h basta osservare che, affinchè sia $\Delta_2 \Phi_1 = 0$, deve essere $A + B + C = 0$; quindi avremo:

$$\frac{1}{h - a^2} + \frac{1}{h - b^2} + \frac{1}{h - c^2} = 0. \quad (10')$$

Quest'equazione è di 2.° grado in h e si può verificare che le sue radici sono reali e distinte, perchè il suo discriminante Δ si può porre sotto la forma:

$$\Delta = \frac{1}{2} (b^2 - c^2)^2 + \frac{1}{2} (c^2 - a^2)^2 + \frac{1}{2} (a^2 - b^2)^2,$$

ed è quindi sempre positivo e solo si annulla quando $a = b = c$. Risolvendo poi si trova:

$$h = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \pm \frac{1}{3} \sqrt{\Delta}.$$

Noi possiamo così assumere il sistema delle due equazioni (10), (10') per rappresentare in modo semplice i due polinomi T_2 . Del resto nell'espressione esplicita di T_2 i coefficienti hanno i seguenti valori:

$$A = \frac{3}{b^2 + c^2 - 2a^2 \pm \sqrt{\Delta}}$$

$$B = \frac{3}{c^2 + a^2 - 2b^2 \pm \sqrt{\Delta}}$$

$$C = \frac{3}{a^2 + b^2 - 2c^2 \pm \sqrt{\Delta}},$$

e sono quindi funzioni delle tre differenze $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, $a^2 - b^2$. Perciò i polinomi T_2 sono invariabili per tutte le ellissoidi omofocali a quella che consideriamo.

Le osservazioni fatte circa le relazioni fra T_2 ed U_3 ci portano subito ad assumere per questa funzione l'espressione:

$$U_3 = x \left(\frac{x^2}{\lambda - a^2} + \frac{y^2}{\lambda - b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2} + 1 \right), \quad (11)$$

e l'equazione a cui deve soddisfare λ si avrà osservando che, affinchè sia soddisfatta l'equazione $\Delta_2 U_3 = 0$, deve essere:

$$\frac{3}{\lambda - a^2} + \frac{1}{\lambda - b^2} + \frac{1}{\lambda - c^2} = 0. \quad (11')$$

Noi possiamo così assumere il sistema delle due equazioni (11), (11') per rappresentare i due polinomi U_3 . Il discriminante Δ_1 della (11') si può scrivere:

$$\Delta_1 = \Delta + 3(b^2 - c^2),$$

e si comporta quindi come il discriminante Δ della (10'). Si ha poi:

$$\lambda = \frac{1}{5} \left(a^2 + 2(b^2 + c^2) \right) \pm \frac{1}{5} \sqrt{\Delta_1}.$$

Similmente si trova:

$$U_4 = yz \left(\frac{x^2}{\lambda' - a^2} + \frac{y^2}{\lambda' - b^2} + \frac{z^2}{\lambda' - c^2} + 1 \right),$$

e per determinare λ' :

$$\frac{1}{\lambda' - a^2} + \frac{3}{\lambda' - b^2} + \frac{3}{\lambda' - c^2} = 0.$$

Le espressioni di V_3, W_3, V_4, W_4 si deducono dalle precedenti con permutazioni circolari; in quanto a quella di T_5 si trova subito che dipende da un'equazione identica a quella di T_2 . Per cui volendo riassumere i risultati così trovati per le armoniche ellissoidiche di genere 2 possiamo dire:

Le sedici funzioni armoniche ellissoidiche di genere 2 si possono rappresentare mediante un'unica espressione:

$$\Phi(h) = \frac{x^2}{h - a^2} + \frac{y^2}{h - b^2} + \frac{z^2}{h - c^2} + 1,$$

nel modo seguente: si ha per le funzioni di 1.^a classe:

$$T_2 = \Phi(h) \quad T_5 = xyz\Phi(h),$$

dove h deve soddisfare all'equazione di 2.^o grado:

$$\frac{1}{h - a^2} + \frac{1}{h - b^2} + \frac{1}{h - c^2} = 0;$$

per le funzioni di 3.^o grado, di classe 2.^a, 3.^a, 4.^a:

$$U_3 = x\Phi(\lambda) \quad V_3 = y\Phi(\mu) \quad W_3 = z\Phi(\nu),$$

dove λ, μ, ν devono rispettivamente essere radici delle equazioni di 2.^o grado:

$$\begin{aligned} \frac{3}{\lambda - a^2} + \frac{1}{\lambda - b^2} + \frac{1}{\lambda - c^2} &= 0 \\ \frac{1}{\mu - a^2} + \frac{3}{\mu - b^2} + \frac{1}{\mu - c^2} &= 0 \\ \frac{1}{\nu - a^2} + \frac{1}{\nu - b^2} + \frac{3}{\nu - c^2} &= 0, \end{aligned}$$

e finalmente per le funzioni di 4.^o grado, di classe 2.^a, 3.^a, 4.^a si ha:

$$U_4 = yz\Phi(\lambda') \quad V_4 = zx\Phi(\mu') \quad W_4 = xy\Phi(\nu'),$$

dove λ', μ', ν' devono rispettivamente soddisfare le equazioni di 2.^o grado:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda' - a^2} + \frac{3}{\lambda' - b^2} + \frac{3}{\lambda' - c^2} &= 0 \\ \frac{3}{\mu' - a^2} + \frac{1}{\mu' - b^2} + \frac{3}{\mu' - c^2} &= 0 \\ \frac{3}{\nu' - a^2} + \frac{3}{\nu' - b^2} + \frac{1}{\nu' - c^2} &= 0. \end{aligned}$$

Se indichiamo con h_2, h_5 le costanti di proporzionalità relative a T_2 e T_5 , per le quali cioè sono verificate sulla superficie dell'ellissoide le relazioni:

$$h_2 D T_2 = T_2 \quad h_5 D T_5 = T_5,$$

esse risultano determinate linearmente, in funzione della quantità h dell'equazione quadratica precedente, mediante le relazioni:

$$\frac{1}{h_2} = \frac{2}{h} \quad \frac{1}{h_5} = \frac{2}{h} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Analogamente indicando con λ_3, μ_3, ν_3 le costanti di proporzionalità relative ad U_3, V_3, W_3 fra esse e le quantità λ, μ, ν abbiamo le relazioni:

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{a^2} \quad \frac{1}{\mu_3} = \frac{2}{\mu} + \frac{1}{b^2} \quad \frac{1}{\nu_3} = \frac{2}{\nu} + \frac{1}{c^2},$$

e finalmente per le costanti $\lambda'_4, \mu'_4, \nu'_4$ delle U_4, V_4, W_4 abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda'_4} &= \frac{2}{\lambda'^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{\mu'_4} &= \frac{2}{\mu'^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{\nu'_4} &= \frac{2}{\nu'^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.\end{aligned}$$

La precedente rappresentazione delle armoniche ellissoidiche di genere 2 permette di verificare immediatamente la loro invariabilità rispetto a tutte le ellissoidi omofocali alla data. Difatti tutte le equazioni quadratiche che determinano i valori di $h, \lambda, \dots$ sono della forma:

$$\frac{\alpha}{h-a^2} + \frac{\beta}{h-b^2} + \frac{\gamma}{h-c^2} = 0, \quad (12)$$

dove α, β, γ sono costanti positive; quindi se poniamo:

$$a^2 = a'^2 + \delta \quad b^2 = b'^2 + \delta \quad c^2 = c'^2 + \delta,$$

ove δ è una costante qualsiasi, le nuove radici h' si dedurranno dalle precedenti colla formola:

$$h' = h - \delta,$$

e si avrà quindi:

$$h - a^2 = h' - a'^2 \quad h - b^2 = h' - b'^2 \quad h - c^2 = h' - c'^2.$$

Perciò l'espressione di $\Phi(h)$ non muta.

Dalla (12) poi risulta subito che, se b è il semi asse medio dell'ellissoide, le due radici di ognuna delle equazioni quadratiche precedenti sono rispettivamente compresi fra a^2 e b^2 e fra b^2 e c^2 .

§ 4. Caso generale.

Per quanto abbiamo visto al § 2 volendo studiare in generale il sistema delle equazioni che determinano i coefficienti di un'armonica ellissoidica, basterà occuparci dei polinomi T_{2n} , cioè di quelli di 1.^a classe e di ordine pari. I procedimenti algebrici applicabili ad uno di questi lo sono anche agli altri sette delle rimanenti classi e che abbiamo chiamato dello stesso genere.

Indicheremo ora con x_1, x_2, x_3 le variabili indipendenti e quindi potremo rappresentare la forma ω_{2k} coll'espressione:

$$\omega_{2k} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \dots \sum_{h_k} a_{h_1 h_2 \dots h_k} x_{h_1}^2 x_{h_2}^2 \dots x_{h_k}^2, \quad (13)$$

dove gli indici $h_1, h_2, \dots, h_k$ variano da 1 a 3 e le $a_{h_1 h_2 \dots h_k}$ sono coefficienti indeterminati, il cui valore supporremo indipendente dall'ordine degli indici $h_1, h_2, \dots, h_k$.

Nella ω_{2k} il coefficiente di $x_{h_1}^2, x_{h_2}^2, \dots, x_{h_k}^2$ sarà quindi rappresentato da $a_{h_1 h_2 \dots h_k}$ moltiplicato per un coefficiente numerico che è lo stesso che compare nel termine simile, quando si sviluppa la potenza $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k$.

Siccome però in seguito dovremo considerare espressioni non indipendenti dall'ordine degli indici, noi rappresenteremo, anche in questo caso, il coefficiente di $x_{h_1}^2 x_{h_2}^2 \dots x_{h_k}^2$ colla notazione:

$$S \cdot a_{h_1 h_2 \dots h_k},$$

intendendo che la somma, indicata con S , debba essere estesa a tutte le permutazioni possibili, e fra loro distinte, degli indici $h_1, h_2, \dots, h_k$.

Avremo ora dalla (13):

$$\frac{\partial \omega_{2k}}{\partial x_{h_1}} = \frac{\partial \omega_{2k}}{\partial (x_{h_1}^2)} 2x_{h_1}, \quad \frac{\partial^2 \omega_{2k}}{\partial x_{h_1}^2} = \frac{\partial^2 \omega_{2k}}{\partial (x_{h_1}^2)^2} 4x_{h_1}^2 + 2 \frac{\partial \omega_{2k}}{\partial (x_{h_1}^2)},$$

e inoltre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{2k}}{\partial (x_{h_1}^2)} &= k \sum_{h_2} \sum_{h_3} \dots \sum_{h_k} a_{h_1 h_2 \dots h_k} x_{h_2}^2 x_{h_3}^2 \dots x_{h_k}^2 \\ \frac{\partial^2 \omega_{2k}}{\partial (x_{h_1}^2)^2} &= k(k-1) \sum_{h_3} \sum_{h_4} \dots \sum_{h_k} a_{h_1 h_2 h_3 \dots h_k} x_{h_3}^2 x_{h_4}^2 \dots x_{h_k}^2. \end{aligned}$$

Quindi, indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i semi assi dell'ellissoide, finora rappresentati con a, b, c , sarà:

$$D \omega_{2k} = 2k \sum_{h_1} \dots \sum_{h_k} \frac{1}{\alpha_{h_1}^2} a_{h_1 \dots h_k} x_{h_1}^2 \dots x_{h_k}^2 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 \omega_{2k} &= 4k(k-1) \sum_{h_2} \dots \sum_{h_k} a_{h_1 h_2 \dots h_k} x_{h_2}^2 \dots x_{h_k}^2 + \\ &+ 2k \sum_{h_1} \dots \sum_{h_k} a_{h_1 h_2 \dots h_k} x_{h_2}^2 \dots x_{h_k}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Di qui possiamo ricavare subito le equazioni che devono essere verificate affinché sia soddisfatta l'equazione di LAPLACE dalla ω_{2k} . Noi indicheremo con $i_1, i_2, \dots, i_k$ un sistema di indici che, come gli indici $h_1, h_2, \dots, h_k$ possono assumere tutti i valori da 1 a 3, ma che nella formola nella quale compaiono hanno valori fissi, e possono variare solo da una formola all'altra. Queste equazioni saranno allora:

$$2(k-1)S \cdot a_{i_1 i_2 \dots i_k} + S \cdot \sum_{h_1} a_{h_1 i_2 \dots i_k} = 0, \quad (16)$$

dove $i_2, i_3, \dots, i_k$ è una combinazione qualunque dei numeri 1, 2, 3 presi a k a k . Queste equazioni sono quindi in numero di $\frac{k(k+1)}{2}$ e, come è facile vedere, sono relazioni che legano a tre a tre i coefficienti di φ_{2k} , cioè sono della forma:

$$N_1 a_{i_1 i_2 \dots i_k} + N_2 a_{i_2 i_3 \dots i_k} + N_3 a_{i_3 i_4 \dots i_k} = 0,$$

ove N_1, N_2, N_3 sono coefficienti numerici che dipendono dalla combinazione $i_2, i_3, \dots, i_k$.

La espressione generale della T_{2n} si avrà da quella delle ω_{2k} ponendo:

$$T_{2n} = \sum_{k=0}^n \omega_{2k},$$

e siccome, colle nuove notazioni, si ha:

$$\Omega = \sum_h \frac{x_h^2}{\alpha_h^2},$$

sulla superficie dell'ellissoide, potremo scrivere:

$$T_{2n} = \sum_{k=0}^n \omega_{2k} \Omega^{n-k}.$$

Ora si ha:

$$\Omega^{n-k} = \sum_{h_{k+1}} \sum_{h_{k+2}} \dots \sum_{h_n} \frac{x_{h_{k+1}}^2 x_{h_{k+2}}^2 \dots x_{h_n}^2}{\alpha_{h_{k+1}}^2 \alpha_{h_{k+2}}^2 \dots \alpha_{h_n}^2}, \quad (17)$$

quindi per l'espressione omogenea di T_{2n} sulla superficie dell'ellissoide avremo:

$$T_{2n} = \sum_{k=0}^n \sum_{h_1} \sum_{h_2} \dots \sum_{h_n} \frac{a_{h_1 h_2 \dots h_k}}{\alpha_{h_{k+1}}^2 \alpha_{h_{k+2}}^2 \dots \alpha_{h_n}^2} x_{h_1}^2 x_{h_2}^2 \dots x_{h_n}^2.$$

Analogamente avremo:

$$D T_{2n} = \sum_{k=0}^n \Omega^{n-k} D \omega_{2k},$$

e per le (14), (17):

$$DT_{2n} = 2 \sum_{k=0}^n \sum_{h_1} \sum_{h_2} \dots \sum_{h_n} \frac{k}{x_{h_1}^2} \frac{a_{h_1 h_2 \dots h_n}}{x_{h_{k+1}}^2 x_{h_{k+2}}^2 \dots x_{h_n}^2} x_{h_1}^2 x_{h_2}^2 \dots x_{h_n}^2.$$

Stabilite così le espressioni generali di T_{2n} , DT_{2n} , ridotte omogenee, potremo ottenere il sistema di equazioni che abbiamo chiamato (II) nel § 2, uguagliando i coefficienti dei termini simili nei due membri dell'equazione:

$$\frac{1}{2} h_{2n} DT_{2n} = T_{2n},$$

ove si è scritto $\frac{1}{2} h_{2n}$ invece di h_n .

Troviamo così:

$$h_{2n} S \cdot \sum_{k=0}^n \frac{k}{x_{i_1}^2} \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{x_{i_{k+1}}^2 x_{i_{k+2}}^2 \dots x_{i_n}^2} = S \cdot \sum_{k=0}^n \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{x_{i_{k+1}}^2 x_{i_{k+2}}^2 \dots x_{i_n}^2}. \quad (II)$$

Le equazioni del sistema (I) poi si avranno subito dalle (16) facendo $k = 1, 2, \dots, n$.

Le espressioni del primo e secondo membro della (II) sono formate secondo una legge abbastanza semplice e importante per studiare l'equazione che determina h_{2n} . Difatti si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{x_{i_{k+1}}^2 x_{i_{k+2}}^2 \dots x_{i_n}^2} &= \frac{a_0}{x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_n}^2} + \frac{a_1}{x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 \dots x_{i_n}^2} + \dots \\ &\dots + \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}}{x_{i_n}^2} + a_{i_1 i_2 \dots i_n} \\ \sum_{k=0}^n \frac{k}{x_{i_1}^2} \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_k}}{x_{i_{k+1}}^2 x_{i_{k+2}}^2 \dots x_{i_n}^2} &= \frac{a_{i_1}}{x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_n}^2} + \frac{2}{x_{i_1}^2} \frac{a_{i_1 i_2}}{x_{i_3}^2 x_{i_4}^2 \dots x_{i_n}^2} + \dots \\ &\dots + \frac{n-1}{x_{i_1}^2} \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}}{x_{i_n}^2} + \frac{n}{x_{i_1}^2} a_{i_1 i_2 \dots i_n}, \end{aligned}$$

per cui, se indichiamo con $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $B_{i_1 i_2 \dots i_n}$ rispettivamente i due primi membri delle due equazioni precedenti, avremo, per costruirli, le seguenti formole ricorrenti:

$$\begin{aligned} A_{i_1 i_2 \dots i_n} &= a_{i_1 i_2 \dots i_n} + \frac{1}{x_{i_n}^2} A_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \\ B_{i_1 i_2 \dots i_n} &= \frac{n}{x_{i_1}^2} a_{i_1 i_2 \dots i_n} + \frac{1}{x_{i_n}^2} B_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}. \end{aligned} \quad (18)$$

cui conviene aggiungere:

$$A_0 = a_0 \quad B_0 = 0 \quad i_0 = 0.$$

Potremo quindi, servendoci delle espressioni ora introdotte, scrivere le (II) nella forma più semplice:

$$h_{2n} S \cdot B_{i_1 i_2 \dots i_n} = S \cdot A_{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad (\text{II}')$$

ove l'operazione S si eseguirà facendo la somma di tutte le espressioni differenti che si ottengono dalle precedenti di $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $B_{i_1 i_2 \dots i_n}$, quando si permutano in tutti i modi possibili gli indici $i_1, i_2, \dots, i_n$; quindi il segno S potrà essere soppresso quando si ha $i_1 = i_2 = \dots = i_n$.

Il numero totale dei coefficienti che compaiono in T_{2n} è:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

e le equazioni del sistema (I) sono in numero di

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Altrettanti coefficienti si potranno quindi eliminare dalle equazioni (II), le quali si ridurranno così ad essere omogenee e lineari rispetto ad $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficienti, mantenendo sempre la forma delle equazioni che compaiono nella teoria dei sistemi di due forme bilineari. Il numero di queste equazioni è di $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, quindi l'eliminazione dei coefficienti condurrà ad un'equazione della forma (7) per determinare h_{2n} , come si è visto al § 1, la quale in generale è di grado $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Però è facile vedere che la determinazione di h_{2n} si può far dipendere da un'equazione di grado minore. Difatti il problema della determinazione di T_{2n} , come è stato posto da noi, ammette come soluzioni speciali le funzioni $T_{2n-2}, T_{2n-4}, \dots, T_2, T_0$; poichè se si suppongono successivamente nulli i coefficienti di $\omega_{2n}, \omega_{2n-2}, \dots$ le nostre equazioni si riducono a quelle che determinano i coefficienti di $\omega_{2n-2}, \omega_{2n-4}, \dots$. Da ciò segue che l'equazione generale per h_{2n} ammetterà per radici anche i valori di $h_{2n-2}, h_{2n-4}, \dots$. Ora siccome queste quantità possono essere definite da equazioni algebriche di

grado inferiore, dalla equazione generale di h_{2n} , si dovranno poter separare i fattori che corrispondono a tali radici. Ora h_0 dipende da un'equazione di 1.° grado, h_2 da una di 2.°; quindi dall'equazione di 6.° grado per h_4 si potrà separare un fattore di 3.° grado che darà i valori speciali di h_4 che determinano T_4 . In generale si vede che i valori di h_{2n} che determinano i coefficienti di T_{2n} sono dati da un'equazione di grado $n+1$.

Quest'equazione, di grado $n+1$, si può effettivamente costruire col procedimento seguente.

A cagione delle relazioni (18) le equazioni (II') si possono scrivere:

$$h_{2n} S \cdot \left(\frac{n}{\alpha_{i_1}^2} a_{i_1 i_2 \dots i_n} + \frac{1}{\alpha_{i_n}^2} B_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \right) = S \cdot \left(a_{i_1 i_2 \dots i_n} + \frac{1}{\alpha_{i_n}^2} A_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \right),$$

od anche:

$$S \cdot \left(a_{i_1 i_2 \dots i_n} - n \frac{h_{2n}}{\alpha_{i_1}^2} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \right) + S \cdot \frac{1}{\alpha_{i_n}^2} (A_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} - h_{2n} B_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}) = 0.$$

Queste $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ equazioni contengono linearmente le $\frac{n(n+1)}{2}$ quantità:

$$S \cdot (A_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} - h_{2n} B_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}),$$

e potremo quindi in generale, eliminando queste quantità, ottenere un sistema di $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$, ossia $n+1$, equazioni lineari nei coefficienti di ω_{2n} , che non conterranno più alcuno dei coefficienti di $\omega_{2n-2}, \omega_{2n-4}, \dots, \omega_2, \omega_0$ e che manterranno ancora la forma solita delle equazioni che servono per la riduzione a forma canonica di due forme bilineari. Se a questo sistema aggiungiamo il sistema delle $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni (I) a cui devono soddisfare i coefficienti di ω_{2n} , otterremo un sistema di $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ equazioni lineari ed omogenee negli altrettanti coefficienti di ω_{2n} . Di queste, come si è visto solo $n+1$ contengono linearmente la h_{2n} ; per cui uguagliando a zero il determinante di un tale sistema otterremo l'equazione cercata di grado $n+1$ che determina h_{2n} . Concludiamo quindi:

La funzione armonica ellissoidica T_{2n} , e le rimanenti dello stesso genere $U_{2n+1}, V_{2n+1}, W_{2n+1}$ e $T_{2n+3}, U_{2n+2}, V_{2n+2}, W_{2n+2}$, possono essere costruite risolvendo un'equazione di grado $n+1$.

Vediamo ora, per concludere, come si possa procedere per determinare effettivamente tutti i coefficienti di T_{2n} , o di una delle funzioni dello stesso genere.

Nel sistema primitivo, con opportune combinazioni lineari, come si è visto, è possibile ottenere un sistema di $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ equazioni che contengono i soli coefficienti di ω_{2n} , che chiameremo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ (posto $p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$). Indichiamo poi con $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ i rimanenti coefficienti di T_{2n} che entrano in $\omega_{2n-2}, \omega_{2n-4}, \dots, \omega_2, \omega_0$, i quali compariranno nelle rimanenti $q = N - p$ equazioni che completano il sistema, e che potranno scegliersi in modo che, annullando tutti i coefficienti di ω_{2n} , esse costituiscono il sistema delle equazioni che determinano T_{2n-2} . Con N indichiamo il numero totale dei coefficienti di T_{2n} . Il complesso di questi coefficienti può allora considerarsi come definito da un sistema di equazioni della forma seguente:

$$\left. \begin{aligned} (ha_{11} - b_{11})\alpha_1 + \dots + (ha_{1p} - b_{1p})\alpha_p &= 0 \\ \dots & \\ (ha_{p1} - b_{p1})\alpha_1 + \dots + (ha_{pp} - b_{pp})\alpha_p &= 0 \\ (ha_{p+1,1} - b_{p+1,1})\alpha_1 + \dots + (ha_{p+1,p} - b_{p+1,p})\alpha_p + (ha_{p+1,p+1} - b_{p+1,p+1})\beta_1 + \dots \\ &\dots + (ha_{p+1,N} - b_{p+1,N})\beta_q = 0 \\ \dots & \\ (ha_{N1} - b_{N1})\alpha_1 + \dots + (ha_{Np} - b_{Np})\alpha_p + (ha_{N,p+1} - b_{N,p+1})\beta_1 + \dots \\ &\dots + (ha_{NN} - b_{NN})\beta_q = 0 \\ \dots & \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Il determinante $\Delta_N(h)$ di questo sistema risulta così il prodotto dei due determinanti:

$$\begin{aligned} D_p(h) &= \begin{vmatrix} ha_{11} - b_{11} & \dots & ha_{1p} - b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ ha_{p1} - b_{p1} & \dots & ha_{pp} - b_{pp} \end{vmatrix} \\ D_q(h) &= \begin{vmatrix} ha_{p+1,p+1} - b_{p+1,p+1} & \dots & ha_{p+1,N} - b_{p+1,N} \\ \dots & \dots & \dots \\ ha_{N,p+1} - b_{N,p+1} & \dots & ha_{NN} - b_{NN} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

L'equazione:

$$D_p(h) = 0,$$

è, come si è visto, di grado $n+1$ in h ; per ciascuna delle sue radici si potranno allora dalle prime p equazioni (19) ricavare delle espressioni proporzionali ai coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, che indicheremo con $A_1, A_2, \dots, A_p$. Per cui potremo porre:

$$\alpha_1 = s A_1, \quad \alpha_2 = s A_2, \dots \quad \alpha_p = s A_p.$$

Sostituendo questi valori nelle rimanenti equazioni (19) otterremo un sistema di q equazioni lineari, non omogenee, nei q rapporti:

$$\frac{\varrho_1}{s}, \quad \frac{\varrho_2}{s}, \dots \quad \frac{\varrho_q}{s},$$

il cui determinante è $D_q(h)$, e sarà quindi differente da zero, se h non è radice comune di $D_p(h)=0$ e $D_q(h)=0$. Avremo quindi risolvendo:

$$\beta_1 = s B_1, \quad \beta_2 = s B_2, \dots \quad \beta_q = s B_q.$$

Tutti i coefficienti di T_{2n} risultano così determinati all'infuori del fattore comune arbitrario s , che effettivamente devono contenere.

Le considerazioni precedenti mostrano anche come si possano separare nell'equazione generale di grado N per h i diversi fattori che corrispondono alle radici che determinano $T_{2n}, T_{2n-2}, \dots$. Difatti collo stesso procedimento che ci ha condotti alla formola:

$$\Delta_N = D_p \cdot D_q,$$

si potrebbe in D_q separare il fattore che dà le radici per T_{2n-2} , e così di seguito.

§ 5. Le funzioni armoniche ellissoidiche di genere 3.

Le considerazioni del paragrafo precedente risulteranno assai chiarite da un esempio. Proponiamoci di determinare T_4 ; avremo:

$$T_4 = \omega_4 + \omega_2 + \omega_0,$$

e potremo porre:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= a_{11}x^4 + a_{22}y^4 + a_{33}z^4 + 2a_{23}y^2z^2 + 2a_{31}z^2x^2 + 2a_{12}x^2y^2 \\ \omega_2 &= a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 \\ \omega_0 &= u_0.\end{aligned}$$

Le equazioni del sistema (I) sono quattro:

$$\begin{cases} 3a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \\ a_{12} + 3a_{22} + a_{23} = 0 \\ a_{13} + a_{23} + 3a_{33} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Quelle del sistema (II) sono sei, e si possono scrivere nel modo seguente:

$$hB_{is} = A_{is} \quad i, s = 1, 2, 3,$$

dove si ha:

$$\begin{aligned}A_{ss} &= a_{ss} + \frac{1}{\alpha_s^2} A_s & A_{is} &= 2a_{is} + \frac{A_i}{\alpha_s^2} + \frac{A_s}{\alpha_i^2} \\ B_{ss} &= \frac{2}{\alpha_s^2} a_{ss} + \frac{1}{\alpha_s^2} B_s & B_{is} &= \left(\frac{2}{\alpha_s^2} + \frac{2}{\alpha_i^2} \right) a_{is} + \frac{B_s}{\alpha_i^2} + \frac{B_i}{\alpha_s^2} \\ A_s &= a_s + \frac{a_0}{\alpha_s^2} & B_s &= \frac{a_s}{\alpha_s^2} \\ i, s &= 1, 2, 3 & i &= s\end{aligned}$$

(colle notazioni del paragrafo precedente, invece di A_{is} , B_{is} , avremmo dovuto scrivere $S \cdot A_{is}$, $S \cdot B_{is}$).

Avremo così due terne di equazioni delle seguenti due forme:

$$\begin{aligned}a_{ss} \left(1 - \frac{2h}{\alpha_s^2} \right) &= \frac{1}{\alpha_s^2} (hB_s - A_s) \\ 2a_{is} \left(1 - h \left(\frac{1}{\alpha_s^2} + \frac{1}{\alpha_i^2} \right) \right) &= \frac{1}{\alpha_s^2} (hB_i - A_i) + \frac{1}{\alpha_i^2} (hB_s - A_s)\end{aligned}$$

L'eliminazione delle tre espressioni $hB_s - A_s$ si ottiene immediatamente osservando che dalle prime tre equazioni si ricava.

$$a_{ss} \left(1 - \frac{2h}{\alpha_s^2} \right) \frac{\alpha_s^2}{\alpha_i^2} + a_{is} \left(1 - \frac{2h}{\alpha_i^2} \right) \frac{\alpha_i^2}{\alpha_s^2} = \frac{1}{\alpha_s^2} (hB_i - A_i) + \frac{1}{\alpha_i^2} (hB_s - A_s),$$

e quindi confrontando colle rimanenti tre, si ha:

$$a_{ss}\left(1 - \frac{2h}{z_s^2}\right) \frac{z_s^2}{z_j^2} + a_{ij}\left(1 - \frac{2h}{z_i^2}\right) \frac{z_i^2}{z_s^2} = 2a_{is}\left(1 - h\left(\frac{1}{z_s^2} + \frac{1}{z_i^2}\right)\right),$$

ossia:

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_2^2}{z_3^2} a_{22} + \frac{z_3^2}{z_2^2} a_{33} - 2a_{23} &= 2h \left(\frac{a_{22}}{z_3^2} + \frac{a_{33}}{z_2^2} - a_{23} \left(\frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} \right) \right) \\ \frac{z_3^2}{z_1^2} a_{33} + \frac{z_1^2}{z_3^2} a_{11} - 2a_{31} &= 2h \left(\frac{a_{33}}{z_1^2} + \frac{a_{11}}{z_3^2} - a_{31} \left(\frac{1}{z_3^2} + \frac{1}{z_1^2} \right) \right) \\ \frac{z_1^2}{z_2^2} a_{11} + \frac{z_2^2}{z_1^2} a_{22} - 2a_{12} &= 2h \left(\frac{a_{11}}{z_2^2} + \frac{a_{22}}{z_1^2} - a_{12} \left(\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Queste tre equazioni insieme alle prime tre delle (20) costituiscono il sistema delle sei equazioni che determina i coefficienti di ω_4 . L'equazione di 3.^o grado, cui soddisfa la h , si potrà avere sotto forma di un determinante di 6.^o ordine uguagliando a zero il determinante di tale sistema; oppure anche sotto forma di determinante di 3.^o ordine, eliminando dalle (21) tre delle incognite mediante le (20), ed uguagliando a zero il determinante di questo nuovo sistema. Ad esempio, eliminando dalle (21) le a_{11} , a_{22} , a_{33} , si ottiene per h la seguente equazione:

$$\begin{vmatrix} z_1^4 + \alpha_3^4 + 6\alpha_1^2\alpha_3^2 - 8h(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) & \alpha_3^2(\alpha_3^2 - 2h) & \alpha_2^2(\alpha_2^2 - 2h) \\ \alpha_3^2(\alpha_3^2 - 2h) & \alpha_3^2 + \alpha_1^2 + 6\alpha_3^2\alpha_1^2 - 8h(\alpha_3^2 + \alpha_1^2) & \alpha_1^2(\alpha_1^2 - 2h) \\ \alpha_2^2(\alpha_2^2 - 2h) & \alpha_1^2(\alpha_1^2 - 2h) & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 6\alpha_1^2\alpha_2^2 - 8h(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

Quest'equazione coincide con quella che conviene risolvere per ridurre a forma canonica le due forme quadratiche, i cui determinanti si ottengono dal precedente facendo $h=0$ e $h=\infty$; è facile verificare che queste due forme sono determinate di segno, quindi per un noto teorema di WEIERSTRASS, l'equazione precedente ha tutte le radici reali.

Dal sistema (20), (21) ora considerato possiamo dedurre in funzione di h , delle espressioni proporzionali ai coefficienti di ω_4 , che possiamo scrivere:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= s A_{11}(h) & a_{22} &= s A_{22}(h) & a_{33} &= s A_{33}(h) \\ a_{23} &= s A_{23}(h) & a_{31} &= s A_{31}(h) & a_{12} &= s A_{12}(h), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ove s è il fattore di proporzionalità. I rimanenti coefficienti di T_4 si potranno ora determinare, all'infuori del fattore s , mediante le quattro equazioni:

$$a_{11} + \frac{a_1}{\alpha_1^2} + \frac{a_0}{\alpha_1^4} = h \left(\frac{2}{\alpha_1^2} a_{11} + \frac{a_1}{\alpha_1^4} \right)$$

$$a_{22} + \frac{a_2}{\alpha_2^2} + \frac{a_0}{\alpha_2^4} = h \left(\frac{2}{\alpha_2^2} a_{22} + \frac{a_2}{\alpha_2^4} \right)$$

$$a_{33} + \frac{a_3}{\alpha_3^2} + \frac{a_0}{\alpha_3^4} = h \left(\frac{2}{\alpha_3^2} a_{33} + \frac{a_3}{\alpha_3^4} \right)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

quando in esse per a_{11} , a_{22} , a_{33} si sostituiscano le loro espressioni (23). Queste equazioni, quando si faccia $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, coincidono con quelle che determinano T_2 ; il loro determinante coincide quindi, anche nel caso attuale, col determinante delle equazioni di T_2 , ed è:

$$D_2(h) = \frac{1}{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2} \begin{vmatrix} 1 - \frac{h}{\alpha_1^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_1^2} \\ 0 & 1 - \frac{h}{\alpha_2^2} & 0 & \frac{1}{\alpha_2^2} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{h}{\alpha_3^2} & \frac{1}{\alpha_3^2} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

in esso però al posto di h si deve intendere sostituita una delle radici della (22).

Risolvendo troviamo così:

$$D_2(h) a_1 = \frac{s}{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2} \begin{vmatrix} \left(\frac{2h}{\alpha_1^2} - 1 \right) A_{11} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_1^2} \\ \left(\frac{2h}{\alpha_2^2} - 1 \right) A_{22} & 1 - \frac{h}{\alpha_2^2} & 0 & \frac{1}{\alpha_2^2} \\ \left(\frac{2h}{\alpha_3^2} - 1 \right) A_{33} & 0 & 1 - \frac{h}{\alpha_3^2} & \frac{1}{\alpha_3^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \dots \dots \dots$$

$$D_2(h)a_0 = \frac{s}{x_1^2 x_2^2 x_3^2} \begin{vmatrix} 1 - \frac{h}{x_1^2} & 0 & 0 & \left(\frac{2h}{x_1^2} - 1\right)A_{11} \\ 0 & 1 - \frac{h}{x_2^2} & 0 & \left(\frac{2h}{x_2^2} - 1\right)A_{22} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{h}{x_3^2} & \left(\frac{2h}{x_3^2} - 1\right)A_{33} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

I coefficienti di T_4 risultano così tutti determinati. Sarebbe facile poi rappresentare ω_4 sotto forma di un unico determinante di 3.^o ordine, o trovare, sotto forma di determinante, un'unica relazione lineare che determini $\omega_2 + \omega_0$, ecc.; ma non insisteremo su queste espressioni, essendo ben nota la via per arrivarvi.

§ 6. Relazioni fra le funzioni di Lamé e le funzioni armoniche ellissoidiche.

Le formole che legano le coordinate cartesiane x, y, z colle coordinate ellittiche, adottando le notazioni di WEIERSTRASS per le funzioni ellittiche, si possono porre sotto la forma seguente (*):

$$\begin{aligned} x\sqrt{H} &= \sqrt{e_2 - e_3} \frac{\sigma_1 \xi}{\sigma \xi} \frac{\sigma_1 \eta}{\sigma \eta} \frac{\sigma_1 \zeta}{\sigma \zeta} \\ y\sqrt{H} &= \sqrt{e_3 - e_1} \frac{\sigma_2 \xi}{\sigma \xi} \frac{\sigma_2 \eta}{\sigma \eta} \frac{\sigma_2 \zeta}{\sigma \zeta} \\ z\sqrt{H} &= \sqrt{e_1 - e_2} \frac{\sigma_3 \xi}{\sigma \xi} \frac{\sigma_3 \eta}{\sigma \eta} \frac{\sigma_3 \zeta}{\sigma \zeta}, \end{aligned}$$

ove:

$$H = -(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2), \quad e_1 > e_2 > e_3,$$

e ξ, η, ζ sono tre parametri, i cui intervalli di variabilità si possono fissare in modo che risulti una corrispondenza univoca fra le terne di valori x, y, z

(*) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, 2.^e Partie, Chap. XII.

e ξ , η , ζ . Le equazioni delle tre famiglie di quadriche omofocali $\xi = \text{cost.}$, $\eta = \text{cost.}$, $\zeta = \text{cost.}$ si ottengono immediatamente dalle formole precedenti mediante l'identità:

$$(e_2 - e_3)\sigma_1^2 u \sigma_1^2 v + (e_3 - e_1)\sigma_2^2 u \sigma_2^2 v + (e_1 - e_2)\sigma_3^2 u \sigma_3^2 v = H\sigma^2 u \sigma^2 v,$$

che sussiste fra le due quaderne di funzioni σ dipendenti rispettivamente dai due argomenti u e v .

L'equazione di LAPLACE colle variabili ξ , η , ζ assume la forma:

$$(\wp \eta - \wp \zeta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\wp \zeta - \wp \xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\wp \xi - \wp \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0,$$

per cui, ponendo:

$$u_i = L(\xi)M(\eta)N(\zeta),$$

come è ben noto, risulta soddisfatta ogni qualvolta L , M , N sono integrali dell'equazione di LAMÉ:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = [i(i+1)\wp t + B]w,$$

ove i è un numero intero, B una costante. Per il prodotto $L(\xi)M(\eta)N(\zeta)$ si aggiunge poi la condizione che rappresenti una funzione razionale intera delle coordinate x , y , z .

Le funzioni L , M , N sono le *funzioni di Lamé*; noi dimostreremo ora che le funzioni u_i , ora definite (che sono quelle che abbiamo chiamato: *polinomi di Lamé*) coincidono colle funzioni armoniche ellissoidiche, da noi studiate.

Difatti colle coordinate ξ , η , ζ l'elemento lineare prende la forma:

$$ds^2 = P^2 d\xi^2 + Q^2 d\eta^2 + R^2 d\zeta^2,$$

dove:

$$P^2 = (\wp \xi - \wp \eta)(\wp \xi - \wp \zeta)$$

$$Q^2 = (\wp \eta - \wp \zeta)(\wp \eta - \wp \xi)$$

$$R^2 = (\wp \zeta - \wp \xi)(\wp \zeta - \wp \eta),$$

per cui indicando con dn l'elemento di normale ad uno qualunque degli ellissoidi $\xi = \text{cost.}$, avremo:

$$dn = \sqrt{(\wp \xi - \wp \eta)(\wp \xi - \wp \zeta)} d\xi.$$

Sulla superficie dell'ellissoide $\xi = \xi_0$ sarà perciò:

$$\frac{1}{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{(\wp \xi_0 - \wp \eta)(\wp \xi_0 - \wp \zeta)}} \frac{L'(\xi_0)}{L(\xi_0)}, \quad (24)$$

dove $L'(\xi) = \frac{dL}{d\xi}$.

D'altra parte, se l'equazione cartesiana dell'ellissoide ξ_0 è:

$$\Omega = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

si ha:

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{Du_i}{\sqrt{\Delta_1 \Omega}},$$

e inoltre per formole note:

$$\Delta_1 \Omega = \frac{(\wp \xi_0 - \wp \eta)(\wp \xi_0 - \wp \zeta)}{(\wp \xi_0 - e_1)(\wp \xi_0 - e_2)(\wp \xi_0 - e_3)},$$

per cui sostituendo nella (24) troviamo:

$$\frac{Du_i}{u_i} = \frac{1}{\sqrt{(\wp \xi_0 - e_1)(\wp \xi_0 - e_2)(\wp \xi_0 - e_3)}} \frac{L'(\xi_0)}{L(\xi_0)}.$$

L'espressione del secondo membro è una costante sull'ellissoide ξ_0 e rappresentandola con $\frac{1}{h_i}$ ritroviamo la formola fondamentale:

$$h_i Du_i = u_i.$$

Ricordando infine dalla teoria delle funzioni di LAMÉ, che i polinomi u_i sono pari o dispari secondo ciascuna delle variabili x, y, z concludiamo che essi soddisfanno a tutte le condizioni che noi abbiamo posto per le funzioni armoniche ellissoidiche.

Reciprocamente possiamo far vedere che qualunque funzione razionale intera che sulla superficie dell'ellissoide soddisfa all'equazione (5) e nell'interno all'equazione di LAPLACE, si può ottenere col nostro procedimento. Difatti se la (5) è soddisfatta quando le x, y, z sono legate dalla condizione:

$$\Omega = 1, \quad (25)$$

ciò significa che quella relazione si riduce ad una identità, quando mediante

quest'ultima equazione si elimina una delle variabili; cioè sono nulli tutti i coefficienti dell'espressione, formata colle rimanenti due variabili, che in tal modo si ottiene. Ora a queste identità si può arrivare anche riducendo prima u_i e Du_i omogenee mediante la (25) e poi uguagliando a zero i coefficienti di tutti i termini della funzione così costruita. Ciò è appunto quanto noi abbiamo fatto.

Le considerazioni precedenti ci conducono anche a trovare un'espressione generale per le costanti h_i di proporzionalità, cioè:

$$h_i = \sqrt{(\wp \xi_0 - e_1)(\wp \xi_0 - e_2)(\wp \xi_0 - e_3)} \frac{L(\xi_0)}{L'(\xi_0)}.$$

Agosto 1895.