10. *Ueber die Herstellung von
Wirbelbewegungen in idealen Flüssigkeiten durch
conservative Kräfte; von J. R. Schütz.*

1. Ein Fundamentalsatz der hydrodynamischen Wirbeltheorie ist dieser:

„Kein Theilchen einer idealen Flüssigkeitsmasse, in welcher eine beliebige Druckvertheilung herrschen mag und auf welche beliebige äussere conservative Kräfte wirken, kann je in Rotation sein, wenn es nicht schon von Anfang an in Rotation begriffen war.“¹⁾

Wenn sich nichtsdestoweniger Wirbelbewegungen in beliebigen Flüssigkeiten, *zumal vermittelt rasch abklingender Druckdifferenzen*, mit bemerkenswerther Leichtigkeit erzeugen lassen, so liegt es nahe, dieses regelwidrige Verhalten der Flüssigkeiten ihrem Mangel an *idealem* Verhalten zuzuschreiben; und so gross ist das Vertrauen in die absolute Zuverlässigkeit des oben citirten Satzes, dass Lord Kelvin auf denselben seine berühmt gewordenen Ideen über die Constitution der ponderablen Materie gestellt hat.

Es ist indess nicht unbemerkt geblieben, dass gerade bei den Versuchsanordnungen, bei welchen die Herstellung der Wirbelringe am regelmässigsten und zuverlässigsten gelingt, *der Grad* des idealen Verhaltens der Flüssigkeit für das experimentelle Ergebniss merklich irrelevant ist; und die dem Theoreme zugemessene grosse Tragweite möchte für sich allein schon eine scharfe Abgrenzung seines Evidenzbereiches wünschenswerth erscheinen lassen.

Aus der nachfolgenden kleinen Studie über diesen Gegenstand resultirt die Bemerkung: *dass der eingangs citirte Satz*

1) von Helmholtz hat diesen Satz zuerst für *incompressible* Flüssigkeiten ausgesprochen; für ideale *compressible* Flüssigkeiten ist er in der hydrodynamischen Literatur theils ausdrücklich, theils stillschweigend allenthalben angenommen.

zwar für jede ideale Flüssigkeit, die sich allenthalben und fort-dauernd im vollkommenen¹⁾ thermodynamischen Gleichgewichte befindet, uneingeschränkte Gültigkeit besitzt, gleichviel ob die Flüssigkeit compressibel oder incompressibel ist; dass er aber im allgemeinen auf andere Flüssigkeiten auch dann nicht angewendet werden darf, wenn dieselben vollkommen ideal und incompressibel sind.

2. Wir verstehen unter den Grössen ϱ , p , X , Y , Z und u , v , w der Reihe nach die Dichte, den Druck, die äusseren Kräfte und die Strömungsgeschwindigkeiten, welche in der vollkommen reibungslos vorausgesetzten Flüssigkeit zur Zeit t im Punkte x , y , z herrschen. Dann gelten die Bewegungsgleichungen

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ Y - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ Z - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z} \right).$$

Indem man die zweite dieser Gleichungen nach z , die dritte nach $(-y)$ differentirt, die beiden so erhaltenen Gleichungen addirt und das Resultat passend ordnet, erhält man

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{array} \right.$$

Hierin bezeichnet d/dt eine totale Differentiirung nach der Zeit. Die Annahme, dass die äusseren Kräfte conservativer Natur sind, bringt den Term $\partial Y/\partial z - \partial Z/\partial y$ zum Ver-

1) Hierzu ist erforderlich, dass die Flüssigkeit mit einer zweiten thermodynamischen Phase coexistirt.

schwinden, und durch Einführung der Rotationsgeschwindigkeiten

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{array} \right.$$

vereinfacht sich die Gleichung (3) zu der folgenden:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{\partial u}{\partial x} \\ \quad - \eta \frac{\partial v}{\partial x} - \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \text{beziehentlich} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{d\eta}{dt} - \xi \frac{\partial u}{\partial y} \\ \quad - \eta \frac{\partial v}{\partial y} - \zeta \frac{\partial w}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{d\zeta}{dt} - \xi \frac{\partial u}{\partial z} \\ \quad - \eta \frac{\partial v}{\partial z} - \zeta \frac{\partial w}{\partial z} + \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{array} \right.$$

3. Wenn für ein Flüssigkeitstheilchen ξ , η , ζ gleichzeitig Null sind, so gelten demnach für dasselbe zu dieser Zeit die Differentialgleichungen

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} \right), \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right), \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \end{array} \right.$$

Die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen sind nun aber, wenn man nicht besondere Voraussetzungen macht, im allgemeinen um einen endlichen Betrag von Null verschieden, und zwar nicht nur für compressible, sondern auch für vollkommen incompressible Flüssigkeiten, insoweit diesem Begriffe noch ein physikalischer Sinn innewohnt.¹⁾

1) Vgl. hierzu auch meine nachfolgende Note über eine bei der theoretischen Einführung incompressibler Flüssigkeiten gebotene Vor-

Wir können aber diese Ausdrücke durch die Forderung zum Verschwinden bringen, das der Ausdruck $dp/2\rho$ ein *vollständiges Differential* sein soll. Dies letztere wäre

I. für jede Flüssigkeit der Fall, in der sich alle möglichen Druckschwankungen entweder *vollkommen isotherm* oder *vollkommen adiabatisch* ausgleichen; es ist durchaus nicht zu erwarten, dass in *bewegten* Flüssigkeiten (geschweige denn in solchen mit discontinuirlichen Störungen, welche mit der Entstehung von Wirbeln nothwendig verknüpft sind), eines dieser Extreme auch nur angenähert allgemein statt habe.

II. Der zweite Fall aber, in welchem einer möglichen Realisirung der obigen Forderung ein theoretisches Bedenken im allgemeinen nicht entgegensteht, ist der, dass die Flüssigkeit mit einer zweiten thermodynamischen Phase coexistirt und sich mit dieser allenthalben und fortdauernd im vollkommenen thermodynamischen Gleichgewichte befindet.

4. Es sei noch die Bemerkung gestattet, dass *die übrigen Fundamentalsätze* der hydrodynamischen Wirbeltheorie, welche sich auf die Bewegungserscheinungen fertiggestellter Wirbelringe beziehen, durch die obigen wesentlich physikalischen Betrachtungen nicht berührt werden; sie haben vielmehr in aller Strenge statt, sobald das Spiel der Druckimpulse aufgehört hat. In der That sagen alsdann diese Sätze rein geometrische, bez. kinematische Wahrheiten aus, welche im Grunde genommen jeder physikalischen Voraussetzung entbehren können.

Göttingen, Physik. Inst. d. Univ., März 1895.

sicht; wer Paradoxa liebt, kann sagen, dass in einer *incompressiblen* Flüssigkeit Wirbelbewegungen unmöglich, in einer *unendlich wenig compressiblen* Flüssigkeit aber mit Leichtigkeit erzeugt werden können.