Hat man mittelst der Formeln (10) oder (13), (7) oder (14), (15) und (16) die Grössen A , B , C , $\frac{dA}{dt}$ berechnet, so kann man mittelst der Formeln (4), (5), (6) die curtirte Entfernung des Weltkörpers von der Erde (ρ), seine Entfernung von der Sonne (r), und seine Entfernung von der Erde ($\Re$) bestimmen.

Was die Anwendung der im Obigen entwickelten Formeln betrifft, so werden darüber die folgenden kurzen Bemerkungen an diesem Orte genügen.

Die Anwendung dieser Formeln setzt voraus, dass man sich im Besitz einer grösseren Anzahl beobachteter geocentrischer Längen und Breiten des betreffenden Weltkörpers befinde, die sämmtlich zu der Zeit t benachbarten Zeiten beobachtet worden sind. Dann wird man mittelst der bekannten Interpolationsmethoden, unter denen jedenfalls die von *Cauchy* selbst angegebene, wie manche andere Arbeiten dieses grossen Mathematikers bei Weitem nicht allgemein genug bekannte und in Anwendung gebrachte, Interpolations-

methode eine der vorzüglichsten ist und eine der ersten Stellen einnimmt, die der Zeit t entsprechende geocentrische Länge und Breite λ und β des Weltkörpers, oder auch $\tan \beta$ und $\tan \beta$, als ganze rationale algebraische Functionen der Zeit t (natürlich nur näherungsweise) darstellen, und daraus dann auch die Differentialquotienten der verschiedenen Ordnungen von λ , $\tan \beta$, $\tan \beta$ ableiten, also auch die Grössen A , B , C , $\frac{dA}{dt}$ mittelst der im Obigen ent-

wickelten Formeln berechnen können, woraus sich dann ferner ρ , r , $\Re$ gleichfalls mittelst der im Obigen entwickelten Formeln ergeben. *Cauchy* hat allerdings a. a. O. noch verschiedene andere Formeln entwickelt; indess scheinen mir die obigen die wichtigsten zu sein, und diesen Gegenstand in dem vorliegenden kurzen Aufsätze zu erschöpfen, konnte natürlich nicht in meiner Absicht liegen, indem ich nur auf diese jedenfalls sehr bemerkenswerthen Formeln aufmerksam machen, und für dieselben eine zusammenhängende Entwicklung geben wollte.

Dr. Grunert.

Formules relatives au mouvement d'un point soumis à l'action d'une force centrale R dont la loi, à la distance r , est exprimée par $R = \frac{A}{r^2} + Er$.

Remarque sur le mouvement du périée de la Lune, calculé par *Newton*.

Par Mr. *Jean Plana*.

§ I.

Soit h la valeur initiale du rayon vecteur r et v la vitesse initiale, que je suppose avoir été imprimée au mobile, perpendiculairement à l'extrémité de la distance h . En posant $r = \frac{h}{z}$, $k = \frac{A}{hv^2}$, $g = \frac{Eh^2}{v^2}$ on sait que, en désignant par φ l'angle formé par le rayon vecteur r avec la ligne fixe h , on a pour déterminer ce mouvement, les deux équations

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \int \frac{-z dz}{\sqrt{(1-z)[z^3 + (1-2k)z^2 - gz - g]}} \\ \frac{vt}{h} &= \int \frac{-dz}{z\sqrt{(1-z)[z^3 + (1-2k)z^2 - gz - g]}} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

où les quantités k et g sont les rapports des forces centrales $\frac{A}{h^2}$, Ek , à la force centrifuge $\frac{v^2}{h}$, au commencement du mouvement. Le cas général dépend, comme l'on voit, de deux intégrales réductibles aux transcendentes elliptiques. Mais, si nous supposons les coefficients k et g tels que le facteur du troisième degré soumis au radical ait deux racines égales; alors l'intégration pourra s'effectuer par les

transcendentes ordinaires. Et ce cas est celui que nous voulons d'abord considérer. Pour cela, nous admettons que l'on a l'une ou l'autre de ces deux identités;

$$\left. \begin{aligned} z^3 + (1-2k)z^2 - gz - g &= (z-\alpha)(z+\beta)^2; \\ z^3 + (1-2k)z^2 - gz - g &= (z+\alpha')(z-\beta')^2; \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

α , β , α' , β' étant des quantités positives. D'après la théorie des équations du 3^{ème} degré, cela ne peut avoir lieu sans avoir identiquement;

$$\{(2k-1)^2 + 3g\}^3 = \{(2k-1)^3 + 9g(1+k)\}^2;$$

ou (ce qui revient au même)

$$(2k-1)^3 = g\{g-2-10k+k^2\} \dots \dots (3)$$

Alors, l'on aura nécessairement pour la première des équations (2):

$$\alpha = \frac{(2k-1)}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{(2k-1)^2 + 3g},$$

$$\beta = -\frac{(2k-1)}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{(2k-1)^2 + 3g},$$

et pour la seconde:

$$\alpha' = -\frac{(2k-1)}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{(2k-1)^2 + 3g},$$

$$\beta' = \frac{(2k-1)}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{(2k-1)^2 + 3g}.$$

En substituant pour k et g leurs valeurs, et posant $2A - hv^2 = X$, l'équation (3) devient

$$X^3 = Eh^3 \{A^2 - 2(2A - X)^2 + (Eh^3 - 10A)(2A - X)\};$$

c'est-à-dire

$$0 = X^3 + 2Eh^3X^2 + Eh^3(Eh^3 - 18A)X + AEh^3(27A - 2Eh^3). \dots\dots\dots(4)$$

Ainsi, en supposant données les trois quantités A, E, h , cette équation donnera pour X une racine réelle; d'où on conclura $hv^2 = 2A - X$. Outre cela, il faut observer, que l'identité exprimée par la première des équations (2) est équivalente à ces trois équations:

$$\beta = \frac{2\alpha}{1+\alpha}, \quad k = \frac{(1-\alpha)^2}{2(1+\alpha)}, \quad g = \frac{4\alpha^3}{(1+\alpha)^2}.$$

§ II.

Cela posé, si l'on considère d'abord la première des équations (2), les formules (1) deviendront

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\psi - 2\beta \int \frac{2d\psi}{(1+\alpha+2\beta) + (1-\alpha)\cos 2\psi}, \\ \frac{vt\beta}{h} &= 2 \int \frac{2d\psi}{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos 2\psi} - 2 \int \frac{2d\psi}{(1+\alpha+2\beta) + (1-\alpha)\cos 2\psi}. \end{aligned}$$

En ayant égard à l'équation $\beta = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$ l'on aura

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\psi - 4\alpha \int \frac{2d\psi}{(1+\alpha)^2 + 4\alpha + (1-\alpha^2)\cos 2\psi}, \\ \frac{v\beta t}{h} &= \left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)(\varphi - 2\psi) + 2 \int \frac{2d\psi}{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos 2\psi}. \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on fait, pour plus de simplicité:

$$f = \sqrt{(3+\alpha)\left(3+\frac{1}{\alpha}\right)},$$

on obtient par les formules connues:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 2\psi - \frac{4}{f} \arccos \left\{ \tan \psi = \left(\frac{3+\alpha}{f}\right) \tan \psi \right\}, \\ \frac{v\beta t}{h} &= \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \cdot \arccos \left\{ \tan \psi = \sqrt{\alpha} \cdot \tan \psi \right\} \\ &\quad - \frac{2(1+\alpha)}{f\alpha} \cdot \arccos \left\{ \tan \psi = \left(\frac{3+\alpha}{f}\right) \tan \psi \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

Donc, en intégrant depuis $z=1$ jusqu'à $z=\alpha$, et par conséquent depuis $\psi=0$ jusqu'à $\psi=\frac{\pi}{2}$, si l'on désigne par φ_1 et t_1 les valeurs correspondantes de φ et t , nous aurons

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \pi - \frac{4}{f} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \left(1 - \frac{2}{f}\right), \\ t_1 &= \frac{h\pi}{v\beta\sqrt{\alpha}} - \frac{h\pi(1+\alpha)}{v\beta\alpha f} = \frac{h\pi}{v\beta\sqrt{\alpha}} \left(1 - \frac{(1+\alpha)}{f\sqrt{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{1-\beta'}} \int \frac{d\omega (\cos^2 \omega + \beta' \sin^2 \omega)}{\cos \omega \sqrt{(1+\alpha') - (1-\beta') \sin^2 \omega}},$$

$$\frac{vt}{h} = \frac{2}{\sqrt{1-\beta'}} \int \frac{d\omega}{\cos \omega (\cos^2 \omega + \beta' \sin^2 \omega) \sqrt{(1+\alpha') - (1-\beta') \sin^2 \omega}}$$

$$\varphi = \int \frac{-zdz}{(z+\beta) \sqrt{(1-z)(z-\alpha)}},$$

$$\frac{vt}{h} = \int \frac{-dz}{z(z+\beta) \sqrt{(1-z)(z-\alpha)}}.$$

Les valeurs de z devant être comprises entre $z=\alpha$ et $z=1$, nous ferons $z = \cos^2 \psi + \alpha \sin^2 \psi$; ce qui donne

$$\varphi = 2\psi - \beta \int \frac{2d\psi}{\beta + \cos^2 \psi + \alpha \sin^2 \psi}.$$

$$\frac{vt\beta}{h} = \int \frac{2d\psi}{\cos^2 \psi + \alpha \sin^2 \psi} - \int \frac{2d\psi}{\beta + \cos^2 \psi + \alpha \sin^2 \psi};$$

ou bien,

$$\varphi = 2\psi - 2\beta \int \frac{2d\psi}{(1+\alpha+2\beta) + (1-\alpha)\cos 2\psi},$$

$$\frac{vt\beta}{h} = 2 \int \frac{2d\psi}{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos 2\psi} - 2 \int \frac{2d\psi}{(1+\alpha+2\beta) + (1-\alpha)\cos 2\psi}.$$

Le mobile reviendra à la distance initiale h après un temps égal à $2t_1$; mais alors son rayon vecteur h fera avec la position primitive fixe un angle égal à $2\varphi_1$.

§ III.

Considérons maintenant le mouvement correspondant à la seconde des équations (2): alors les formules (1) deviendront

$$\varphi = \int \frac{-zdz}{(z-\beta') \sqrt{(1-z)(z+\alpha')}},$$

$$\frac{vt}{h} = \int \frac{-dz}{z(z-\beta') \sqrt{(1-z)(z+\alpha')}}.$$

Les valeurs de z étant comprises entre $z=\beta'$ et $z=1$, nous ferons $z = \cos^2 \omega + \beta' \sin^2 \omega$. En substituant cette valeur de z , nous aurons:

Maintenant, si l'on fait

$$\sin \omega = \sqrt{\frac{1 + \alpha'}{1 - \beta'}} \sin u,$$

l'on aura $z = 1 - (1 + \alpha') \sin^2 u$, et

d'où l'on tire:

$$\begin{aligned} \Phi &= 2u + 2\beta' \int \frac{2du}{(1 - \alpha' - 2\beta') + (1 + \alpha') \cos 2u}; \\ \frac{v\beta't}{h} &= 2 \int \frac{2du}{(1 - \alpha' - 2\beta') + (1 + \alpha') \cos 2u} - 2 \int \frac{2du}{(1 - \alpha') + (1 + \alpha') \cos 2u}. \end{aligned}$$

D'après la formule générale

$$\int \frac{2du}{p + q \cos 2u} = \frac{2}{\sqrt{q^2 - p^2}} \text{Log} \left\{ \frac{\sqrt{q+p} \cos u + \sqrt{q-p} \sin u}{\sqrt{p+q} - 2q \sin^2 u} \right\},$$

nous aurons d'abord:

$$\begin{aligned} \Phi &= 2u + \frac{2\beta'}{\sqrt{(1-\beta')(\alpha'+\beta')}} \text{Log} \left\{ \frac{\sqrt{1-\beta'} \cos u + \sqrt{\alpha'+\beta'} \sin u}{\sqrt{(1-\beta') - (1+\alpha') \sin^2 u}} \right\}, \\ \frac{v\beta'^2 t}{h} &= \Phi - 2u - \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha'}} \text{Log} \left\{ \frac{1 + \sqrt{\alpha'} \tan u}{1 - \sqrt{\alpha'} \tan u} \right\}. \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on observe, que $\beta' = \frac{2\alpha'}{1-\alpha'}$, l'on aura:

$$\begin{aligned} \Phi &= 2u + \frac{4\sqrt{\alpha'}}{f'} \text{Log} \left\{ \frac{\sqrt{1-3\alpha'} + \sqrt{\alpha'(3-\alpha')} \tan u}{\sqrt{1-3\alpha'} - \alpha'(3-\alpha') \tan^2 u} \right\}, \\ \frac{v\beta'^2 t}{h} &= \frac{4\sqrt{\alpha'}}{f'} \text{Log} \left\{ \frac{\sqrt{1-3\alpha'} + \sqrt{\alpha'(3-\alpha')} \tan u}{\sqrt{1-3\alpha'} - \alpha'(3-\alpha') \tan^2 u} \right\} - \frac{2\sqrt{\alpha'}}{1-\alpha'} \text{Log} \left\{ \frac{1 + \sqrt{\alpha'} \tan u}{1 - \sqrt{\alpha'} \tan u} \right\}, \end{aligned}$$

où l'on a fait $f' = \sqrt{(1-3\alpha')(3-\alpha')}$. Soit u' la valeur de u qui correspond à $\omega = \frac{\pi}{2}$; d'après l'équation entre ω et u ,

l'on aura $\sin^2 u' = \frac{1-3\alpha'}{1-\alpha'^2}$. Puisque le second terme de

la valeur précédente de Φ devient infini lorsque $u = u'$; il est clair qu'il y a une valeur de u inférieure à u' , qui donnera $\Phi = 2\pi$. En augmentant cette valeur de u on obtiendra $\Phi = 4\pi$; et ainsi de suite. Il suit de là, que la valeur de u converge très-lentement vers la valeur fixe u' , et qu'elle ne peut lui devenir égale que dans un temps infini. De sorte que, après un petit nombre de révolutions du mobile on peut supposer constante la valeur de u ; et depuis cet instant, la valeur de Φ croît avec la vitesse uniforme $\frac{v\beta'^2}{h}$: alors l'expression

$$r = \frac{h}{1 - (1 + \alpha') \sin^2 u}$$

du rayon vecteur sera sensiblement constante, ce qui démontre, que ce mouvement devient bientôt circulaire et uniforme.

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \frac{2du \{1 - (1 + \alpha') \sin^2 u\}}{(1 - \beta') - (1 + \alpha') \sin^2 u}, \\ \frac{vt}{h} &= \int \frac{2du}{[1 - (1 + \alpha') \sin^2 u] [(1 - \beta') - (1 + \alpha') \sin^2 u]}, \\ \frac{v\beta't}{h} &= \int \frac{2du}{(1 - \beta') - (1 + \alpha') \sin^2 u} - \int \frac{2du}{1 - (1 + \alpha') \sin^2 u}. \end{aligned}$$

En comparant l'analyse que je viens d'exposer, avec celle donnée par Legendre aux pages 566 et 568 du Premier Volume de son Traité des Fonctions Elliptiques, on reconnaîtra, que ce double problème exigeait une solution moins concise, afin de pouvoir saisir clairement la dernière conséquence relative au mouvement circulaire et uniforme: mouvement qui ne peut avoir lieu, que dans le cas où le coefficient E de la force centrale serait négatif.

§ IV.

On pourrait encore avoir un mouvement à-peu-près circulaire (mais non convergent indéfiniment vers l'uniformité sur un cercle) dans le cas où $(z - \alpha)(z - \beta)(z + \gamma)$ seraient les facteurs du quadrinome du 3^{ième} degré, en supposant $\alpha > 1$, $\beta < 1$, $\gamma > 0$. Alors l'on aurait

$$\Phi = \int \frac{-z dz}{\sqrt{(1-z)(z-\alpha)(z-\beta)(z+\gamma)}}.$$

En faisant $z = \cos^2 p + \alpha \sin^2 p$, et ensuite $\tan p = H \tan \psi$, on trouvera qu'en posant

$$H^2 = \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}, \quad c^2 = 1 - \frac{(\alpha+\gamma)(1-\beta)}{(1+\gamma)(\alpha-\beta)},$$

$$\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi},$$

l'on a:

Maintenant, si l'on fait $n = 1 - H^2 = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta}$ on tire de là:

$$\varphi = \frac{2H(1-\alpha H^2)}{(1-H^2)\sqrt{(1-\beta)(1+\gamma)}} \int \frac{d\psi}{\Delta} + \frac{2H^3(\alpha-1)}{(1-H^2)\sqrt{(1-\beta)(1+\gamma)}} \int \frac{d\psi}{\Delta(1-n\sin^2\psi)},$$

$$\frac{vt}{h} = \frac{2H(1-H^2)}{(1-\alpha H^2)\sqrt{(1-\beta)(1+\gamma)}} \int \frac{d\psi}{\Delta} - \frac{2H^3(\alpha-1)}{(1-\alpha H^2)\sqrt{(1-\beta)(1+\gamma)}} \int \frac{d\psi}{\Delta(1-n\sin^2\psi)}.$$

En intégrant depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \frac{\pi}{2}$, et doublant le résultat on aura pour φ une quantité de la forme $\varphi = G\pi = \pi + (G-1)\pi$, où $(G-1)\pi$ sera le mouvement de la ligne des apsides pendant chaque révolution du mobile. On obtient par là une solution, sous forme finie, du problème résolu, par approximation, dans le second Corollaire de la Proposition XLV du Premier Livre des Principia de *Newton*, en considérant le mouvement comme à-peu-près circulaire; ce qui revient à supposer les quantités k et g comme fort peu différentes de l'unité.

§. V.

Toutefois il importe d'observer que, même avec une solution finie de ce problème, il est impossible de tirer de cette source, avec une précision suffisante, le mouvement du périhélie de la Lune. En effet, la partie principale de la composante de la force, due à l'action réunie de la Terre et du Soleil, dirigée suivant le rayon vecteur r de la Lune, n'est pas de la forme $\frac{A}{r^2} + Er$, mais de la forme

$$\varphi = \frac{2H}{\sqrt{(1-\beta)(1+\gamma)}} \int \frac{d\psi}{\Delta} \frac{\{\cos^2 \psi + \alpha H^2 \sin^2 \psi\}}{\{\cos^2 \psi + H^2 \sin^2 \psi\}},$$

$$\frac{vt}{h} = \frac{2H}{\sqrt{(1-\beta)(1+\gamma)}} \int \frac{d\psi}{\Delta} \frac{\{\cos^2 \psi + H^2 \sin^2 \psi\}}{\{\cos^2 \psi + \alpha H^2 \sin^2 \psi\}}.$$

$$\frac{M}{r^2} - \frac{M'r}{2a^3} \{1 + 3 \cos(2\varphi - n't)\},$$

où M désigne la somme des masses de la Terre et de la Lune; M' la masse du Soleil; $n't$ sa longitude moyenne, et a' sa moyenne distance de la Terre.

Or on sait, que le terme

$$- \frac{3}{2} \cdot \frac{M'}{a'^3} r \cos(2\varphi - n't)$$

introduit une quantité fort sensible dans le mouvement du périhélie de la Lune, ainsi que Clairaut l'a fait voir le premier. On peut en lire la démonstration dans ma *Théorie de la Lune* (Voyez les pages 21 et 22 du second Vol.)

Newton dans la Proposition IV du troisième Livre des Principia a employé le résultat de l'observation, et non pas celui fourni par le Cor. 2 de la Proposition XLV du Premier Livre: parce que, probablement, il avait le sentiment de la grande imperfection inhérente à son résultat théorique, obtenu par l'omission d'un terme dont il ne pouvait calculer l'influence sans considérer, comme Clairaut, le carré de la force perturbatrice.

Turin, le 1. Mars 1856.

Jean Plana.

Schreiben des Herrn Professors *Secchi*, Directors der Sternwarte des Coll. Rom., an den Herausgeber.

(Schluss von № 1017).

Nébuleuses.

Néb. h. 2075 (AR 20^h15^m Decl. + 19°35') Néb. Planétaire très large: son diamètre = 41''343. Avec un peu de lumière sur les fils son bord paraît s'évanouir et la partie centrale montre des masses plus vives irrégulières; du côté suivant on remarque quelques petits points étincelants.

Néb. h. 2047 (20^h34^m, — 14°32'). Planétaire magnétique circulaire étincelante: avec les petits grossissements il

paraît de voir Jupiter entre les nuages: belle couleur bleue: en illuminant les fils, les bords s'évanouissent un peu, et l'on voit une lumière plus forte dans les parties centrales; en cinq points surtout on la voit étinceler et parfois il paraît y voir des étoiles; avec 1000 on voit une croix plus sombre dans son milieu. Diamètre 25''795 (sans doute plus petit du véritable à cause de l'affaiblissement des bords, à cause de la lumière).