Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Vertheilung des Lobatschewsky-Preises*)

erstattet durch

FELIX KLEIN in Göttingen.

An die Physico-mathematische Gesellschaft der Kaiserlichen Universität in Kasan.

Geehrte Herren!

Sie haben mir im Hinblick auf die demnächstige erste Vergebung des Lobatschewsky'schen Preises die ehrenvolle Aufforderung zukommen lassen, ich solle mich über die Arbeiten von Sophus Lie betr. die Grundlagen der Geometrie, insbesondere über die im dritten Bande seiner Transformationsgruppen enthaltenen bezüglichlichen Entwicklungen gutachtlich äussern und über dieselben im Zusammenhange mit dem gegenwärtigen Standpunkte der Raumfrage Bericht erstatten. Ich versuche im Folgenden dieser Aufforderung zu entsprechen, so schwierig und verantwortungsvoll die Sache nach verschiedenen Richtungen erscheinen mag.

Nach § 5 der Statuten wird der Lobatschewsky-Preis für Werke über Geometrie, in erster Linie für solche über nichteuklidische Geometrie verliehen. Der § 6 stellt die weitere Bedingung, dass die Werke innerhalb der sechs der Verleihung des Preises vorangehenden Jahre gedruckt sein müssen.

Ausserlich genommen liegt daraufhin die Sache sehr einfach; denn der von Prof. Lie eingesandte Band entspricht diesen Bedingungen nicht nur, sondern er ragt unter allen anderen Werken, die zum Vergleich kommen mögen, so unbedingt hervor, dass ein Zweifel über die Ertheilung des Preises kaum möglich sein dürfte. Entscheidend für diese Beurtheilung der Höhe der wissenschaftlichen Leistung ist nicht nur die ausserordentliche Gründlichkeit und Schärfe, mit welcher Lie im fünften Abschnitte seines Buches das von ihm so genannte *Riemann-Helmholtz'sche Raumproblem* behandelt, sondern insbesondere

---

*) Abgedruckt nach dem von der physikalisch-mathematischen Gesellschaft der Universität Kasan publicirten Original.

der Umstand, dass diese Behandlung so zu sagen als logische Folge der lang fortgesetzten schöpferischen Arbeiten Lie's auf dem Gebiete der Geometrie, insbesondere seiner Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen erscheint. Ich möchte sagen, dass der § 5 der Statuten hier ebensosehr nach seinem speciellen wie nach seinem allgemeinen Inhalte entscheidet. Die ausserordentliche Bedeutung, welche die Arbeiten von Lie für die Allgemeinentwicklung der Geometrie besitzen, kann nicht wohl überschätzt werden; ich bin überzeugt, dass dieselbe in den nächsten Jahren zu noch viel allgemeinerer Geltung kommen wird, als bisher.

Sehr viel schwieriger erscheint nun aber, Ihnen einen Bericht zu liefern, der ebensowohl der Wichtigkeit der Sache entspricht, als Ihrer Gesellschaft einigermassen nützlich sein kann. Die sehr ausführliche und unmittelbar verständliche Darlegung von Lie hier im Auszuge reproduciren zu wollen, hiesse nur das was klar und deutlich ist unnöthig zu verdunkeln und schwerer zugänglich zu machen; — mit dem Verfasser aber betreffs der kritischen Bemerkungen, die er anderen Autoren gegenüber macht, in dem einen oder anderen Punkte zu rechten, dürfte weder förderlich noch der heutigen Gelegenheit entsprechend sein; ich darf beiläufig auch auf die Darstellung verweisen, die ich von den Lie'schen Entwicklungen im zweiten Bande meiner (autographirten) Vorlesungen über höhere Geometrie, sowie in dem elften Vortrage meines Evanston Colloquium's gegeben habe. Vielmehr will ich versuchen, meine Aufgabe allgemeiner zu fassen, indem ich es unternehme, den heutigen Stand der Raumfrage oder doch eine Reihe dahin gehöriger Probleme, die in den letzten Jahren hervorgetreten sind, unter umfassenden Gesichtspunkten zu erläutern. Hierbei wird sich von selbst die Stelle ergeben, an der die in Frage stehenden Lie'schen Untersuchungen so wie andere von Lie herrührende, in demselben Bande der Transformationsgruppen enthaltene Entwicklungen in Betracht kommen; zugleich finde ich Gelegenheit, auf weitere Fragepunkte aufmerksam zu machen, die mir wesentlich scheinen und denen die Commission des Lobatschewsky-Preises vielleicht einmal in Zukunft ihre Aufmerksamkeit zuwenden wird.

Woher stammen die Axiome? Ein Mathematiker, der die nicht-euklidischen Theorien kennt, wird kaum noch die Meinung früherer Zeiten festhalten wollen, als seien die Axiome nach ihrem concreten Inhalte Nothwendigkeiten der inneren Anschauung; was dem Laien als solche Nothwendigkeit erscheint, erweist sich bei längerer Beschäftigung mit den nichteuklidischen Problemen als Resultat sehr zusammengesetzter Prozesse, insbesondere auch der Erziehung und der Gewöhnung. Stammen die Axiome aus der Erfahrung? Helmholtz ist hierfür bekanntlich in nachdrücklichster Weise eingetreten. Aber

seine Darlegungen erscheinen nach bestimmter Richtung unvollständig. Man wird, wenn man dieselben überdenkt, zwar gerne zugeben, dass die Erfahrung an dem Zustandekommen der Axiome einen grossen Antheil hat, man wird aber bemerken, dass gerade derjenige Punkt bei Helmholtz unerörtert bleibt, der dem Mathematiker vor anderen interessant ist. Es handelt sich um einen Process, den wir in genau derselben Weise bei der theoretischen Behandlung irgend welcher empirischer Daten immerzu vollziehen und der ebendarum dem Naturforscher völlig selbstverständlich erscheinen mag. Ich werde mich in allgemeiner Fassung so ausdrücken: *die Ergebnisse irgend welcher Beobachtungen gelten immer nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen und unter particulären Bedingungen; indem wir die Axiome aufstellen, setzen wir an Stelle dieser Ergebnisse Aussagen von absoluter Präcision und Allgemeinheit.* In dieser „Idealisirung“ der empirischen Daten liegt meines Erachtens das eigentliche Wesen der Axiome. Unser Ansatz ist dabei in seiner Willkür zunächst nur dadurch beschränkt, dass er sich den Erfahrungsthatssachen anschmiegen muss und andererseits keine logischen Widersprüche einführen darf. Es tritt dann als Regulator noch dasjenige hinzu, was Mach die „Oekonomie des Denkens“ nennt. Niemand wird vernünftigerweise ein complicirteres Axiomensystem festhalten, sobald er einsieht, dass er mit einem einfacheren Systeme die zur Darstellung der empirischen Daten erforderliche Genauigkeit bereits vollauf erreicht. Also, um es gleich an demjenigen Punkte zu erläutern, der für die Grundlegung der Geometrie in erster Linie in Betracht kommt: Jedermann wird für practische Zwecke die Formeln der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und nicht etwa diejenigen der Lobatschewsky'schen Geometrie in Anwendung bringen.

Diese allgemeinen Bemerkungen habe ich vorausschicken wollen, damit über die Grundlage, von der die folgenden Entwicklungen ausgehen, kein Zweifel bestehen soll. In der That soll es sich des weiteren nur um die wirkliche Geometrie unseres empirisch gegebenen Raumes und um deren mathematischen Aufbau handeln, — nicht um Verallgemeinerungen, die man gebildet hat und die nach anderer Richtung mathematisch werthvoll sein mögen. Ich beginne mit einer Frage, welche die mathematischen Kreise in den letzten 25 Jahren in steigendem Maasse beschäftigt hat, die aber immer noch nicht die allgemeine Beachtung gefunden hat, welche sie verdient. Was ist eine *willkürliche Curve*, eine *willkürliche Fläche*? Euklid stellt die Worte *Curve* und *Fläche* an die Spitze seines Systems, ehe er zur Definition der geraden Linie und der Ebene schreitet. Und nicht nur die Schöpfer der Differential- und Integralrechnung scheinen an der Deutlichkeit dieser Begriffe keinen Zweifel gehegt zu haben, auch noch die geometrischen Beweise, welche Gauss von dem Fundamentalsatze

der Algebra giebt, ruhen auf der Voraussetzung, dass die Idee der (ebenen) Curve etwas in sich evidentes sei. Aber unsere Sicherheit in dieser Hinsicht ist in der Zwischenzeit, wesentlich unter dem Einflusse von Weierstrass, völlig zerstört worden; man kann sagen, dass vom rein mathematischen Standpunkte aus heutzutage nichts dunkler und unbestimmter erscheint als die genannte Idee. Was wir in der empirischen Anschauung Curve nennen, ist zunächst ein *Streifen*, d. h. ein Raumstück, dessen übrige Abmessungen gegen die Längendimension zurücktreten (wobei die genaue Begrenzung des Raumstücks unbestimmt bleibt). In dieser (primären) Form kommt die Idee der Curve in zahlreichen Gebieten der Anwendungen zur Geltung, und ich bin, mit Hrn. Pasch, der Meinung, dass es gut ist, dieses mehr hervorzukehren, als gewöhnlich geschieht. Soll aber die Curve Gegenstand der *exacten* mathematischen Betrachtung werden, so müssen wir sie idealisiren, genau so, wie dies zu Beginn der Geometrie allorts mit dem Punkte geschieht. Und hier beginnen nun die Schwierigkeiten. Eine erste Bemerkung, die nicht unwichtig ist, ist die, dass alle Autoren, welche über die vorliegende Frage geschrieben haben, dabei die analytische Geometrie als Ausgangspunkt benutzen. Man kann dann die ebene Curve (um uns auf diese zu beschränken) entweder als Ort eines beweglichen Punktes durch Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definiren, unter φ , ψ stetige Functionen verstanden, oder als Grenze eines ebenen Gebietes. Thut man das letztere, so muss gleich zu Anfang die schwierige Frage erörtert werden, was Alles unter „Gebiet“ verstanden werden soll. Die beiden Definitionen stimmen zuvörderst keineswegs überein, und jedenfalls müssen ihnen beiden weitgehende Beschränkungen zugesetzt werden, wenn man zu all' den Eigenschaften der Rectificirbarkeit, der Differentiirbarkeit etc. gelangen will, die man einer Curve gemeinlich beilegt. Es ist fast am besten, sich von vorneherein auf *analytische Curven* zu beschränken, d. h. φ , ψ in den vorstehenden Gleichungen als analytische Functionen vorauszusetzen. Die analytischen Curven sind auch allgemein genug, um jede empirisch gegebene Curve mit beliebiger Annäherung darzustellen. Weiter ist es eine sehr merkwürdige Thatsache, dass man die wichtigsten Eigenschaften der analytischen Functionen (insbesondere auch der algebraischen Functionen) gefunden hat, indem man von der empirischen Auffassung der Curven (und Flächen) Gebrauch machte. Trotzdem wird man sich kaum entschliessen wollen anzunehmen, dass die empirische Auffassung vermöge irgend welcher ihr innewohnender verborgener Qualitäten gerade nothwendig und ausschliesslich zu den analytischen Curven hinleite. Es liegen hier offenbar noch die interessantesten Probleme erkenntnisstheoretischer Natur vor. An gegenwärtiger Stelle müssen wir uns mit einer negativen Schlussfolgerung

begnügen, dass nämlich die hier berührten Untersuchungen unmöglich an den Anfang der Geometrie gestellt werden können, dass man an dieselben erst herangehen kann, wenn auf Grund geeigneter Axiome und daran geknüpfter Folgerungen das Lehrgebäude der *elementaren* Geometrie bereits fest steht. Der vorherige Aufbau und die Verwendung der *analytischen* Geometrie aber erscheint uns nicht nothwendig, sondern nur zweckmässig.

Wenden wir uns jetzt zu der Voraussetzung, welche Riemann an die Spitze seiner Betrachtungen über die „Hypothesen der Geometrie“ gestellt hat, der Punktraum dürfe als eine dreifach ausgedehnte, stetige *Zahlenmannigfaltigkeit* angesehen werden. In früherer Zeit mochte man diese Voraussetzung für eine selbstverständliche Folge der Stetigkeitsverhältnisse des Raumes bez. der in ihm liegenden Curven und Flächen halten. Dies ist aber auf Grund der Entwicklung, welche die Kritik des Curvenbegriffs in der Zwischenzeit genommen hat, offenbar nicht mehr zulässig. Die Berechtigung, den Punktraum als Zahlencontinuum zu bezeichnen, kann nach dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft nur so abgeleitet werden, dass man vorab dasselbe thut, was wir eben als nothwendige Vorbereitung für die Definition des Curvenbegriffs hinstellten, dass man nämlich die *Elementargeometrie als solche* entwickelt, — mag man nun dabei die Betrachtung der Kreise und Kugeln voranstellen (metrische Geometrie) oder diejenige der geraden Linien und Ebenen (projective Geometrie), wie sogleich noch näher zu schildern ist. Von der Elementargeometrie aus ist nunmehr die elementare analytische Geometrie zu entwickeln. Da wird es sich zunächst darum handeln, die Punkte des einzelnen Kreises, oder der einzelnen geraden Linie, dem eindimensionalen Zahlencontinuum zuzuordnen, worüber wir ebenfalls weiter unten noch Genaueres sagen werden. Nun erst, wenn dies Alles geschehen ist, wird man zu den drei Raumcoordinaten aufsteigen, wo dann die Frage entsteht, wodurch sich ein mehrdimensionales Continuum von dem eindimensionalen unterscheidet. Man sieht, wie complicirt der Weg ist, auf dem die in Rede stehende Voraussetzung schliesslich erreicht wird. Etwas Aehnliches wird man von der Forderung sagen müssen, welche Riemann wieder stillschweigend benutzt und die Helmholtz dann ausdrücklich als Axiom einführt*): es sollen die Functionen, durch welche die Maassverhältnisse des Raumes innerhalb der repräsentirenden Zahlenmannigfaltigkeit festgelegt werden, differentiirbare Functionen sein (eine Anzahl Differentiationen gestatten). Es folgt, dass alle Untersuchungen, welche mit den Begriffen Zahlenmannigfaltigkeit und

---

*) Helmholtz bezeichnet die Annahme, der Raum dürfe als Zahlenmannigfaltigkeit angesehen werden, bereits ebenfalls ausdrücklich als Axiom.

differentiirbare Functionen beginnen, wenn man sie *direct* als Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie interpretiren wollte, einen Zirkel enthalten würden. Wir können sie nur als Hilfsmittel für solche Untersuchungen gelten lassen; sie ebenen sozusagen den Weg, auf welchem die rein geometrischen Untersuchungen vorzugehen haben. In ähnlichem Sinne äussert sich Lie auf pag. 535—537 des dritten Bandes seiner Transformationsgruppen; er hebt dort noch hervor, dass wenn man die Forderung der Zahlenmannigfaltigkeit und der Differentiirbarkeit mit den weiteren Axiomen zusammennimmt, die man bei der Durchführung der analytischen Untersuchungen als solcher gebraucht, man dieses erreicht, *ein vielleicht nicht zweckmässiges, aber jedenfalls vollständiges System von Axiomen für die Grundlegung der Geometrie zu besitzen.*

Immer möchte ich hier zunächst an die Voraussetzung der Zahlenmannigfaltigkeit und der Differentiirbarkeit anknüpfen. Man wird dann genau so, wie bei der rein geometrischen Betrachtungsweise, zwischen metrischer und projectiver Behandlung der weiteren Aufgabe unterscheiden können; — oder auch, man wird in Anlehnung an meine Entwicklungen von 1872*) die allgemeine Idee einer beliebigen innerhalb der Mannigfaltigkeit zu entwerfenden „Geometrie“ auf Grund irgend welcher für die Elemente der Mannigfaltigkeit geltenden Transformationsgruppe erfassen. *Für jede derartige Geometrie kann man dann eine axiomatische Definition verlangen* d. h. eine Definition, welche sie ohne explicite Formeln (oder sagen wir lieber: unabhängig von der innerhalb der Mannigfaltigkeit zufällig gegebenen Coordinatenbestimmung) durch begriffliche Eigenschaften festlegt. Diese axiomatische Definition kann damit beginnen, die zu Grunde liegende Gruppe als solche zu definiren, und das ist der Weg, den man in der metrischen Geometrie einschlägt, wenn man die Thatsache der freien Beweglichkeit starrer Körper (anders ausgedrückt: die „Congruenzsätze“) an die Spitze stellt. Man kann aber auch so vorgehen, dass man die Configurationen in Betracht zieht, welche sich aus irgendwelchen im Sinne der Gruppe gleichwerthigen Elementen bilden lassen. Dies geschieht beispielsweise, wenn man den Aufbau der projectiven Geometrie mit den Sätzen über das Ineinanderliegen von Punkten, geraden Linien und Ebenen beginnt.

Wir haben nun genau die Stelle für dasjenige Problem, dessen endgültige Erledigung von Lie gegeben wird, das von Lie sogenannte *Riemann-Helmholtz'sche Raumproblem*. Lie legt dabei, wie es im Sinne der weiter unten zu gebenden Erläuterungen allein zulässig scheint,

---

*) Erlanger Programm, oder auch Bd. 6 der Mathematischen Annalen (Zweiter Aufsatz zur nichteuklidischen Geometrie).

zunächst ein begrenztes Raumstück der Betrachtung zu Grunde (p. 441 seiner Darstellung). Man wird dann etwa so sagen: die Euklidische, die Lobatschewsky'sche und die Riemann'sche Geometrie setzen in gleicher Weise innerhalb des genannten Raumstücks freie Beweglichkeit der starren Körper voraus. Sie liefern auch übereinstimmend für das Quadrat des Bogenelementes eine quadratische Function der Differentiale der Coordinaten und zwar eine solche, für welche das sogenannte Krümmungsmaass constant ist [Riemann's Ausgangspunkt]; sie differiren nur hinsichtlich des Werthes dieser Grösse, indem dieselbe in den drei Fällen beziehungsweise Null, negativ und positiv ist. *Die Aufgabe soll sein, die sechsgliedrigen Bewegungsgruppen dieser drei Geometrien durch charakteristische Merkmale von allen anderen continuirlichen Transformationsgruppen der dreifachen Zahlenmannigfaltigkeit zu unterscheiden.*

Lie giebt für diese Aufgabe im vorliegenden Bande zwei Lösungen, deren erste Voraussetzungen über das Verhalten der Gruppe im Infinitesimalen macht, während sich die zweite auf die Betrachtung endlicher Dimensionen beschränkt. Was die erste Methode angeht, so sage man, „eine Gruppe besitze in einem reellen Punkte freie Beweglichkeit im Infinitesimalen“, wenn Folgendes statt hat: „Hält man den Punkt P und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement fest, so soll stets noch continuirliche Bewegung möglich sein, hält man dagegen ausser P und jenem Linienelemente noch ein beliebiges reelles Flächenelement fest, das durch beide geht, so soll keine continuirliche Bewegung möglich sein“. *Unsere oben genannten Gruppen sind dann, wie Lie findet, dadurch vollkommen charakterisirt, dass sie in einem reellen Punkte allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen.* — Bei der zweiten Methode wird vorausgesetzt: „Hält man einen beliebigen reellen Punkt y_1^0, y_2^0, y_3^0 von allgemeiner Lage fest, so befriedigen alle reellen Punkte x_1, x_2, x_3 , in welche ein anderer reeller Punkt x_1^0, x_2^0, x_3^0 dann noch übergehen kann, eine reelle Gleichung von der Form:

$$W(y_1^0, y_2^0, y_3^0; x_1^0, x_2^0, x_3^0; x_1, x_2, x_3) = 0,$$

die für $x_1 = y_1^0, x_2 = y_2^0, x_3 = y_3^0$ nicht erfüllt ist und die eine reelle durch den Punkt x_1^0, x_2^0, x_3^0 gehende Fläche darstellt. Um den Punkt y_1^0, y_2^0, y_3^0 lässt sich ein endlicher dreifach ausgedehnter Bereich derart abgrenzen, dass nach Festhaltung des Punktes y_1^0, y_2^0, y_3^0 jeder andere reelle Punkt x_1^0, x_2^0, x_3^0 des Bereiches noch continuirlich in jeden anderen dem Bereiche angehörigen reellen Punkt übergehen kann, der die Gleichung $W = 0$ befriedigt und der mit dem Punkte: x_1^0, x_2^0, x_3^0 durch eine irreducible continuirliche Reihe von Punkten verbunden ist“. *Wiederum sind durch diese Voraussetzungen, wie Lie*

findet, die oben genannten drei Gruppen vollständig charakterisirt. — Diese zweite Methode leitet vermöge der Aehnlichkeit ihrer Voraussetzung zu Helmholtz' ursprünglichen Entwicklungen hin. Wenn man von der Genauigkeit der Formulierungen absieht (infolge deren die Lie'schen Prämissen, die wir wörtlich anführten, etwas umständlich lauten), so wird bei Helmholtz *mehr* verlangt als bei Lie, insbesondere noch das besondere Postulat der „Monodromie des Raumes“ aufgestellt, welches bei Lie wegfällt. Des Ferneren aber findet sich in Helmholtz' Beweisgang eine wirkliche Unrichtigkeit, die darin besteht, dass Helmholtz seine auf endliche Dimensionen bezüglichen Voraussetzungen stillschweigend auf das Infinitesimale überträgt. Genauer gesagt: er setzt als mathematisch selbstverständlich voraus, dass die dreifach unendliche Gruppe von Bewegungen, welche einen Punkt P festlässt, die Verhältnisse der von P auslaufenden Differentiale der Coordinaten auf dreifach unendlich viele Weisen linear transformiren müsse. Hier ist übersehen (wie Lie hervorhebt), dass sich unter den Transformationen der genannten Gruppe möglicherweise auch solche befinden können, welche in der Umgebung des Punktes P unendlich klein von der zweiten Ordnung sind, welche also die in Rede stehenden Differentiale überhaupt ungeändert lassen. Vielleicht kann man sagen, dass bei Helmholtz an dieser Stelle der strenge Grenzbegriff der modernen Differentialrechnung durch die den Anwendungen entstammende Auffassung der Differentiale als sehr kleiner aber nicht geradezu verschwindender Grössen beeinträchtigt ist. —

Soviel über das Riemann-Helmholtz'sche Raumproblem. Ich habe mich dabei absichtlich, entsprechend der Begrenzung, welche in diesem Berichte festgehalten werden soll, auf den Fall der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit beschränkt; die Entwicklungen von Riemann, Helmholtz und Lie selbst beziehen sich zum Theil auf eine beliebige Dimensionenzahl. Im Uebrigen wiederhole ich, was ich schon oben andeutete, dass nämlich die blosses Mittheilung der Lie'schen Resultate kein Aequivalent für die überzeugende Kraft der Lie'schen Darstellung sein kann; um letztere zu würdigen muss der Leser durchaus das Original selbst nachsehen. Ich gebe hier noch eine kurze Zusammenstellung weiterer Bemerkungen zur Grundlegung der Geometrie, die in dem Lie'schen Werke eingestreut sind. In Abtheilung IV untersucht Lie u. a. diejenigen Gruppen des R_n , welche eine quadratische Gleichung zwischen den Differentialen der Coordinaten: $\sum f_{ik} dx_i dx_k = 0$ invariant lassen, wodurch er Anschluss an Riemann's ursprüngliche Entwicklungen nimmt. Auf pag. 524 (Abtheilung V) kommt er beiläufig auf die Grundlegung der projectiven Geometrie zu sprechen und bemerkt, dass man die zugehörige Gruppe, d. h. die Gruppe der Collineationen des R_n , einfach durch die Angabe charakterisiren kann, sie sei eine endliche

continuirliche Gruppe von Punkttransformationen, bei welcher $n + 2$ Punkte keine Invariante haben. Endlich kommt hier aus Abtheilung III die Bestimmung aller continuirlichen Untergruppen der projectiven Gruppe des Raumes von drei Dimensionen in Betracht. Man nehme an, dass man von der sechsfach unendlichen Bewegungsgruppe des genannten Raumes bereits wisse, dass sie aus lauter Collineationen bestehe. Dann führt die von Lie gegebene Tabelle aller Untergruppen mit einem Schlage zu den obengenannten drei Möglichkeiten zurück, die sich nun in heute wohlbekannter Weise in die Cayley'sche Maassbestimmung einordnen, bei welcher eine Fläche zweiten Grades fundamental ist.

Ich knüpfe nunmehr erneut an dasjenige an, was oben über die Nothwendigkeit und Bedeutung der Axiome gesagt wurde. Unsere bisherigen Entwicklungen bezogen sich, wie wir ausdrücklich angaben, immer nur auf ein *begrenzt*es Stück unserer Mannigfaltigkeit; es ist durchaus logisch, dass wir nun fragen, welche Verhältnisse eintreten mögen, wenn wir dieses Stück unbegrenzt erweitern. Die natürliche Festsetzung wird sein, dass sich der Raum in der Umgebung jeder seiner (durch endliche Bewegung zugänglichen) Stellen genau ebenso verhalten soll, wie in dem bisher untersuchten begrenzten Stück. Damit ist ersichtlich nicht ausgeschlossen, dass der Raum (bez. die Mannigfaltigkeit, die wir hier abkürzend als Raum bezeichnen) verschiedentlich in sich zurückläuft, dass er höheren Zusammenhang besitzt. Die Frage wird geradezu sein, welche *Zusammenhangsverhältnisse des Raumes mit den verschiedenen Bogenelementen constanter Krümmung verträglich sein mögen*. Diese Frage will mir genau ebenso wichtig erscheinen, wie irgend eine andere Frage auf axiomatischem Gebiete. Um so merkwürdiger ist es, dass dieselbe bisher nur wenig beachtet wurde.

Clifford hatte 1873 beiläufig auf eine in sich zurücklaufende Fläche des von mir so genannten elliptischen Raumes (des „einfachen“ Raumes constanter positiver Krümmung) aufmerksam gemacht, welche überall das Krümmungsmaass Null besitzt, aber trotzdem nur endlichen Flächeninhalt hat. Hieran anknüpfend entwickelte ich im Bande 37 der Mathematischen Annalen (1890) die allgemeine Fragestellung und die Grundlinien der Theorie; die Untersuchungen sind dann bald hernach von Hrn. Killing aufgenommen worden (Math. Ann. Bd. 39, 1891, sowie Abschnitt 4 in dem 1893 erschienenen ersten Bande des Lehrbuchs „Einführung in die Grundlagen der Geometrie“); es ist mir aber nicht bekannt, dass irgend Jemand sonst seitdem auf diesen Gegenstand eingegangen wäre. Und doch sind die Resultate sehr merkwürdig. Es ergibt sich, dass wir je nach dem Werthe des Krümmungsmaasses eine Reihe unterschiedener Möglichkeiten erhalten,

also eine Serie topologisch unterschiedener Raumformen mit Euklidischer, Lobatschewsky'scher, Riemann'scher Geometrie im begrenzten (einfach zusammenhängenden) Raumstück. Wir haben da erstlich selbstverständlicherweise die drei Stammtypen, die sich in unmittelbarer Anlehnung an Cayley's projective Maassbestimmung ergeben, den parabolischen, hyperbolischen und elliptischen Raum nach der von mir in Annalen IV (1871) eingeführten Ausdrucksweise. Weitere Typen ergeben sich, wenn wir innerhalb eines jeden dieser Räume solche *discontinuirliche* Bewegungsgruppen aufsuchen, die keine im Endlichen gelegene Rotations- oder Schraubenaxen aufweisen: die Discontinuitätsbereiche dieser Gruppen brauchen nur als geschlossene Mannigfaltigkeiten aufgefasst zu werden, um ebensoviele Beispiele der von uns gewollten Raumformen abzugeben. Es ist hier nicht der Ort, dies näher auszuführen. Ich will nur bemerken, dass die Aufzählung der genannten Gruppen im hyperbolischen Falle (im Falle des negativen Krümmungsmaasses) unmittelbar mit der von Poincaré und mir gegebenen Theorie der discontinuirlichen Gruppen linearer Substitutionen einer complexen Veränderlichen zusammenhängt und dass letztere Theorie von Hrn. Fricke neuerdings wesentlich weiterentwickelt und unter meiner Mitwirkung zur zusammenhängenden Darstellung gebracht worden ist*). Aber dies ist nicht Alles. Es rubricirt hier auch (im Falle positiven Krümmungsmaasses) die Gegenüberstellung des einfachen elliptischen und des *sphärischen* Raumes, in welchem sich zwei geodätische Linien immer in zwei Punkten schneiden. Herr Killing hat zuerst den Satz aufgestellt, dass der sphärische Raum neben den Stammtypen (wie ich sie oben nannte) der einzige ist, der als Ganzes frei in sich bewegt werden kann. — Es wird interessant sein, zu untersuchen, wie die Axiome der Geometrie (NB. hier immer noch unter Zugrundelegung der Hypothesen von der Zahlenmannigfaltigkeit und Differentiirbarkeit) gefasst werden müssen, um von vornherein auf eine bestimmte dieser unendlich vielen verschiedenen Raumformen zu kommen. Für die Untergruppen, die sich aus den Discontinuitätsbereichen der Bewegungsgruppen ergeben, gilt, dass die freie Beweglichkeit der Figuren nur so lange besteht, als die Dimensionen der Figuren eine gewisse Grösse nicht überschreiten. Das Axiom von der Geraden (demzufolge zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können) erleidet die wesentlichsten Modificationen; giebt es doch jetzt gerade Linien, welche sich in unendlich vielen Punkten treffen. Hierdurch wird die Beziehung zwischen den Punkten einer Geraden und den Strahlen eines perspectiven Büschels (sofern man eben den Raum

---

*) Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen. Von R. Fricke und F. Klein. Band I. Leipzig, Teubner 1897.

als Ganzes nehmen will) unter Umständen ganz entstellt. Vollends aber entsteht Verwirrung in der Theorie der Parallellinien. Es ist so bequem zu sagen, dass sich verschwindendes, negatives und positives Krümmungsmaass dadurch unterscheiden, dass durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden zu dieser Geraden 1, 2 und 0 Parallelen möglich sind. Jetzt haben wir Räume von verschwindendem und negativem Krümmungsmaasse, welche nur endlich ausgedehnt sind; wie will man in ihnen Parallele definiren? In alledem liegt natürlich mehr eine formale als eine wirkliche Schwierigkeit (insofern die Erzeugung aller unserer Raumformen ganz klar ist); ich führe es nur an, um zur Untersuchung der neuen Raumformen anzureizen.

Ich werde nunmehr die Annahme der Zahlenmannigfaltigkeit (und der Differentiirbarkeit) verlassen und über die eigentlichen *geometrischen Grundlagen* der Theorie Einiges sagen. Dabei will ich wieder nur solche Punkte berühren, welche in den letzten Jahren besonders hervorgetreten sind oder auf die ich die Aufmerksamkeit des Lesers besonders hinlenken möchte. Als Haupteintheilungsprincip bietet sich wieder der Gegensatz von *metrischer* und *projectiver* Geometrie. Letztere ist dabei natürlich wieder nicht so zu verstehen, als ob sie die metrischen Fragen von der Betrachtung schlechtweg ausschliesse; sie schiebt dieselben nur zurück, um sie erst aufzunehmen, nachdem die einfacheren projectiven Beziehungen entwickelt sind. Diese Zweitheilung wird dabei nicht als eine willkürliche oder nur durch die Natur der mathematischen Methoden indicirte anzusehen sein, sondern als eine solche, die dem thatsächlichen Zustandekommen unserer Raumanschauung entspricht, bei dem sich ja in der That mechanische Erfahrungen (betr. die Bewegung starrer Körper) mit Erfahrungen des Sehraumes (betr. die verschiedenartige Projection angeschauter Gegenstände) combiniren.

Die elementaren Grundlagen der metrischen Geometrie haben in den letzten Jahren wohl kaum eine Neu-Bearbeitung gefunden, die hier zu nennen wäre. Interessant sind die Entwicklungen des Herrn Lindemann in dem 1891 erschienenen zweiten Bande von Clebsch's Vorlesungen über Geometrie, der die Axiome, welche bei Euklid selbst auftreten, mit den modernen Betrachtungen über die Beweglichkeit der starren Körper in Vergleich bringt.

Etwas ausführlicher möchte ich mich über die *Einführung der Zahlen in die metrische Geometrie* äussern. Der wesentliche Schritt ist, wie schon oben hervorgehoben wurde, dass wir den Punkten irgend welcher gegebenen Curve, sagen wir der Einfachheit halber einer geraden Linie, die Zahlen des eindimensionalen Continuuums zuordnen. Wir werden damit beginnen, dass wir uns auf einer gezeichnet vorliegenden oder sonstwie materiell gegebenen geraden Linie thatsächlich eine Scala äquidistanter Punkte (einen Maassstab) construiren. Die

Theile dieser Scala werden wir dann weiter unterabtheilen, soweit dies practisch ausführbar erscheint. Wir kommen so zu dem Resultate, dass innerhalb der empirischen Anschauung, d. h. soweit die Genauigkeit derselben reicht, thatsächlich jedem Punkte der geraden Linie eine bestimmte Zahl und jeder Zahl ein bestimmter Punkt zugeordnet werden kann. Und nun machen wir den charakteristischen Schritt über die empirische Anschauung hinaus zum Axiom: *wir postuliren, dass das Entsprechen zwischen Punkt und Zahl nicht nur innerhalb der empirischen Genauigkeit, sondern im absoluten Sinne statthaben soll**). Es wird sich diese Forderung des Genaueren in drei Stücke zerlegen lassen. Wir ziehen erstlich nur rationale Zahlen in Betracht und verlangen, dass *jeder* rationalen Zahl ein Punkt der geraden Linie entsprechen soll. Schon dieses erscheint mir durchaus axiomatisch, denn rationale Zahlen mit hinreichend grossem Nenner können auf unserer Scala empirisch nicht mehr nachgewiesen werden. Wir wenden uns zweitens zu den irrationalen Zahlen (die wir mit Dedekind oder G. Cantor oder Weierstrass als Grenzen rationaler Zahlen definiren). Wieder haben wir ausdrücklich zu postuliren, dass jeder solchen irrationalen Zahl ein Punkt unserer Geraden entsprechen soll (vergl. G. Cantor im fünften Bande der Mathematischen Annalen, 1872). Drittens endlich ist zu verlangen, dass jedem Punkte unserer Geraden nun auch eine bestimmte Zahl zugewiesen sein soll. Es wird dies der Fall sein, sobald es kein noch so kleines Segment unserer geraden Linie giebt, in welches wir bei fortgesetzter Unterabtheilung unserer Scala nicht eindringen können. Insofern deckt sich diese dritte Forderung mit dem sogenannten *Axiom des Archimedes*. Diese drei Axiome zusammen — ich werde sie kurz die *Stetigkeitsaxiome* nennen — sind die eigentliche Grundlage unserer gewöhnlichen analytischen Geometrie. Man wird fragen können, ob diese Axiome nothwendig sind, ob man dieselben nicht irgendwie modificiren kann. In diesem Zusammenhange habe ich zunächst die Tendenz zu nennen, welche in dem grossen Buche von Veronese**) ihre ausführlichste Bearbeitung gefunden hat, nämlich, das Axiom des Archimedes fallen zu lassen und neben den genannten (rationalen und irrationalen) Zahlen auf der geraden Linie noch andere Zahlen einzuführen, die durch Addition von „actual unendlich kleinen Zahlen“ zu den gewöhnlichen „endlichen“ Zahlen entstehen. Ich betrachte es hier nicht als meine Aufgabe, zu

*) Es ist interessant, hier die Erläuterungen zu vergleichen, welche Mach auf pag. 71—77 seines neuen Buches über die Principien der Wärmelehre (Leipzig, 1896) betreffs der physikalischen Bedeutung des Zahlencontinuums giebt.

**) Grundlage der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten (übersetzt von Schepp), Leipzig 1894. Das italienische Original erschien 1891, Padova.

den verschiedenen Einwendungen Stellung zu nehmen, welche gegen die Veronese'schen Entwicklungen erhoben worden sind; ich will nur beiläufig bemerken, dass greifbare geometrische Resultate als Folge des erwähnten Ansatzes bisher noch nicht gewonnen sein dürften. Umgekehrt tritt bei anderen Forschern neuerdings vielfach die Tendenz hervor, nur die rationalen Punkte als wirkliche Punkte gelten zu lassen. Es liegt hier eine merkwürdige Umkehr des wissenschaftlichen Gedankens vor. Denn die irrationalen Zahlen sind in die Arithmetik überhaupt erst eingeführt worden, um der geometrischen Continuität gerecht zu werden, an deren Vorhandensein man nicht zweifelte; also nicht die Arithmetik, sondern die Geometrie hat den ersten Anstoss zu ihrer Inbetrachtnahme gegeben.

Die hiermit gegebenen Erörterungen über die Einführung der Zahlen gingen von dem Umstande aus, dass die empirische Messung eine Grenze nach unten hin hat, jenseits deren sie versagt. Genau so dürfte bei der Heranziehung der topologisch unterschiedenen Raumformen, von denen wir oben nur erst in abstractem Sinne handelten, hier, wo die Geometrie des thatsächlich gegebenen Raumes in Betracht kommt, keine Willkür, sondern nur eine innere Consequenz vorliegen. Unsere empirische Messung hat ebensowohl eine Grenze nach oben hin, welche durch die Dimensionen der uns zugänglichen oder sonst in unsere Beobachtung fallenden Gegenstände gegeben ist. Was wissen wir über die Verhältnisse des Raumes im Unmessbar-Grossen? Von vornherein zweifellos gar nichts; wir sind durchaus darauf angewiesen, Postulate aufzustellen. Ich betrachte also alle die topologisch unterschiedenen Raumformen als mit der Erfahrung gleich verträglich. Dass wir bei unseren theoretischen Ueberlegungen einzelne dieser Raumformen bevorzugen (nämlich die Stammtypen, also die eigentliche parabolische, hyperbolische und elliptische Geometrie), um schliesslich die parabolische Geometrie, d. h. die gewöhnliche Euklidische Geometrie endgültig anzunehmen, geschieht einzig nach dem Grundsätze der Oekonomie.

Indem ich mich jetzt zur projectiven Geometrie wende, wünsche ich zunächst Einiges über ihre von allem Messen unabhängige Begründung zu sagen. Dieselbe beruht bekanntlich auf dem Ineinanderliegen der Punkte, Geraden und Ebenen des Raumes, wie dies zuerst v. Staudt in seiner Geometrie der Lage 1847 entwickelt hat. Ich selbst habe dann in Bd. 4 und 6 der Mathematischen Annalen (1871—72) gezeigt, dass diese Ueberlegungen, trotzdem v. Staudt es anders darstellt, thatsächlich vom Parallelenaxiom unabhängig sind. Es beruht dies auf dem Umstande, dass man sich auf solche Constructionen beschränken kann, die über ein vorgegebenes begrenztes Raumstück nicht hinausführen (wobei dann alle Punkte, welche die gewöhnliche projective

Geometrie ausserhalb dieses Raumstücks voraussetzt, nur als sogenannte ideale Punkte zur Geltung kommen). In besonders knapper und durchsichtiger Weise ist dies neuerdings (1891) von Hrn. Schur im 39. Bande der mathematischen Annalen dargelegt worden. Vor allen Dingen aber muss ich hier auf die systematische Ableitung der ganzen Theorie aufmerksam machen, welche Hr. Pasch in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie (Leipzig 1882) gegeben hat. Das Buch von Pasch ist um so bemerkenswerther, als er mit seinen streng logisch gegliederten Entwicklungen überall ausdrücklich an die empirisch gegebene Raumanschauung anknüpft, so dass diejenige Auffassung der Geometrie, welche im vorliegenden Berichte vertreten wird, hier im Zusammenhange zur consequenten Darstellung gelangt. Die Axiome der *abstracten* projectiven Geometrie sind im Anschlusse an Pasch in den letzten Jahren von verschiedenen italienischen Geometern weiter zergliedert worden. Eine eigenartige Darstellung fanden dieselben in dem bereits genannten Buche von Veronese: der Verfasser formuliert seine Voraussetzungen so allgemein, dass er beim Uebergange zur metrischen Geometrie neben dem einfachen elliptischen Raume von vornherein den sphärischen Raum mit erhält. Die Abstractheit ist hier auf die Spitze getrieben, indem die Betrachtung immer mit den allgemeinsten Ueberlegungen anhebt; ich finde es äusserst schwer, dem Gedankengange des Verfassers auch nur ein Stück weit zu folgen.

Zweitens wünsche ich über die *Einführung der Zahlen in die projective Geometrie* hier einiges zu sagen. Der Process ist meines Erachtens im Princip genau derselbe wie im Falle der metrischen Geometrie, dass man nämlich zuerst eine Scala auf gegebener gerader Linie empirisch construirt, diese so weit als möglich unterabtheilt und schliesslich eben diejenigen Stetigkeitsaxiome einführt, von denen oben die Rede war. Der äussere Unterschied besteht natürlich, dass man jetzt von *drei* Punkten der Geraden ausgehen muss, denen man (willkürlich) die Zahlen 0, 1, ∞ zuweist, — während die metrische Scala mit zwei beliebigen Punkten beginnt, welche 0 und 1 genannt werden. Dies hat aber mit der *Plausibilität* der Stetigkeitsaxiome, wie ich es nennen möchte, gar nichts zu thun; es genügt, sich wirklich einmal eine projective Scala (empirisch) zu construiren, um zu sehen, dass die Theilpunkte für das beobachtende Auge bald so eng zusammenrücken, dass sie nicht mehr unterschieden werden können*). Ich habe daher auch nie verstehen können, wesshalb Pasch in seinem Buche, in dem er übrigens die projective Einführung der Zahlen vollständig zur Durchführung bringt, vor Einführung der Stetigkeitsaxiome

---

*) In der That ist ja auch die gewöhnliche metrische Scala der Euklidischen Geometrie direct ein Specialfall der projectiven Scala.

einen Abschnitt über Congruenz der Figuren einschaltet und die genannten Axiome dann an die metrische Scala anschliesst; man vergleiche hierzu die Erläuterungen, welche Hr. Pasch später (1887) im 30. Bande der mathematischen Annalen über diesen Punkt gegeben hat. Die Herren Lindemann und Killing haben sich denn auch in ihren bereits genannten Lehrbüchern diesem Verfahren nicht angeschlossen. Uebrigens soll nicht unerwähnt bleiben, dass der erste, welcher die projective Einführung der Zahlen auf der geraden Linie in streng logisch gegliederter Weise zur Darstellung gebracht hat, de Paolis gewesen ist (*Memorie della Accademia dei Lincei*, ser. 3, vol. 9, 1880–81).

Die so skizzirten Bemerkungen über die Einführung der Zahlen in die projective Geometrie bedürfen natürlich, um mit dem Früheren in Uebereinstimmung zu sein, der bestimmten Einschränkung, dass alle in Betracht kommenden Constructionen und Ueberlegungen zunächst nur im begrenzten Raumstück angestellt werden sollen. Dann ist die Bahn frei, um beim Uebergang zur Metrik eine der drei möglichen Maassbestimmungen nach Belieben aufzustellen und überhaupt für den unbegrenzten Raum hinterher alle die topologischen Möglichkeiten zu discutieren, die wir oben genauer bezeichneten.

Nun noch ein paar lose Ausführungen, die mit diesen projectiven Theorien in Verbindung stehen.

Die Herren Minkowski und Hilbert haben der Frage der mit der projectiven Geometrie verträglichen metrischen Geometrie letzthin eine sehr merkwürdige Wendung gegeben. Es seien x, y, z gewöhnliche Parallelcoordinaten. Minkowski ersetzt dann (vergl. seine Geometrie der Zahlen, Heft 1, Leipz. 1896) den üblichen Ausdruck für den Abstand zweier Punkte x, y, z und x_0, y_0, z_0 durch irgend eine homogene Function ersten Grades der beigesetzten Differenzen:

$$\Omega(x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

welche, gleich Constans gesetzt, in x, y, z als laufenden Coordinaten eine *nirgends concave* Fläche darstellt. Es gilt dann immer noch der Satz (wie Minkowski nachweist), dass die gerade Linie die kürzeste Linie zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte ist. Bewegungen des Raumes aber giebt es, allgemein zu reden, nicht mehr, abgesehen von den dreifach unendlich vielen Parallelverschiebungen. Man muss die Entwicklungen von Minkowski selbst nachlesen, um zu sehen, dass dieser allgemeine Ansatz zu sehr bemerkenswerthen geometrischen Folgerungen hinführt. Herr Hilbert hat die Frage umgekehrt, indem er verlangt die allgemeinste Maassbestimmung anzugeben, bei welcher die gerade Linie uneingeschränkt kürzeste Linie ist. Er findet, dass man diese Maassbestimmung aus den Doppelverhältnissen der projectiven

Geometrie erhält, wenn man statt der Fläche zweiten Grades, welche Cayley benutzt, irgend eine nirgends concave geschlossene Fläche als Fundamentalfläche zu Grunde legt. Minkowski's Maassbestimmung ist hiervon ein Grenzfall. Im Allgemeinen gibt es bei Hilbert überhaupt keine Bewegungen.

Eine andere Frage, welche allgemein interessiren muss, ist, welche Stellung Helmholtz zur projectiven Begründung der nichteuklidischen Geometrie eingenommen hat. Das typische projective Denken (im Sinne von Staudt's) hat Helmholtz vermuthlich ganz fern gelegen. Man muss sich vergegenwärtigen, dass man in jenen Jahren, in welche Helmholtz' eigentliche mathematische Productivität fällt, die projective Geometrie noch durchgängig als eine Specialität betrachtete; die Ueberzeugung von ihrer grundlegenden Bedeutung für alle geometrische Speculation war noch keineswegs allgemein durchgedrungen. Es kann auch sein, dass Helmholtz nach seiner naturwissenschaftlichen Gewöhnung, die Dinge immer in concreto zu sehen, der bei der projectiven Geometrie zu Grunde liegenden Abstraction von vorneherein abgeneigt war. In der Einleitung zu seiner Göttinger Note (1868) weist er eine Begründung der Geometrie, welche die Eigenschaften des Sehraumes voranstellt, geradezu zurück, „weil doch auch der Blinde richtige Raumvorstellungen gewinnen könne“. Hiermit contrastirt nun in interessanter Weise, dass Helmholtz durch seine ausgedehnten optischen Untersuchungen von selbst immerzu veranlasst ist, projective Fragen in Betracht zu ziehen, die er bald mit selbstgeschaffenen Hilfsmitteln löst, bald aber auch nur mit allgemeinem Raisonement behandelt.

Was insbesondere die projective Erfassung der Lobatschewsky'schen bez. Riemann'schen Geometrie angeht, so finden sich die ausführlichsten Aeusserungen in dieser Richtung in seinem populären Vortrage über „Ursprung und Bedeutung der geometrischen Axiome“, der im dritten Hefte der bezüglichen Sammlung (Braunschweig, 1876) abgedruckt ist. Für den Raum constanter negativer Krümmung benutzt er dort in der That mit Vorliebe Beltrami's „Sphärisches Abbild“ (1868) (bei welchem der genannte Raum nach seiner ganzen Erstreckung in das Innere einer Kugel des Euklidischen Raumes abgebildet wird, und zwar derart, dass seinen geraden Linien die geraden Linien des Euklidischen Raumes entsprechen). Bei dieser Abbildung verwandelt sich bekanntlich Lobatschewsky's Geometrie in diejenige Cayley'sche Maassbestimmung, welche die begrenzende Kugel als absolute Fläche benutzt; der Unterschied ist nur, dass im Anschluss an Cayley zum Fundament wird, was bei Beltrami ein blosses Mittel der Veranschaulichung ist, womit zusammenhängt, dass nicht schon Beltrami zur Erfassung einer projectiven Begründung der nichteuklidischen Geometrie gelangt ist. Von Cayley und den sich anschliessenden Entwicklungen

ist nun bei Helmholtz nirgends die Rede; er hat, wie es scheint, davon nie Notiz genommen. Trotzdem erfasst er das „kugelförmige Abbild“ als etwas wesentliches; er sucht sich den Eindruck klar zu machen, den ein Beobachter gewinnen müsste, der, mit Euklidischem Augenmaasse ausgestattet, die nichteuklidischen Bewegungen starrer Körper innerhalb des genannten Abbildes betrachten würde. Diese Bewegungen erweisen sich dabei natürlich als Collineationen, welche die fundamentale Kugel festlassen; die Kugel ist wie eine undurchdringliche, oder richtiger gesagt: unerreichbare Wand, an welche die Bewegungen zwar beliebig nahe heranbringen, welche man aber nie wirklich berührt. Helmholtz versucht es, diese Sache zu veranschaulichen, ohne von dem Worte „Collineation“ Gebrauch zu machen. Zu dem Zweck construirt er eine Analogie; er fingirt einen Beobachter, der, mit Euklidischem Augenmaass ausgestattet, den Euklidischen Raum und die in diesem stattfindenden Bewegungen durch eine Concavlinse betrachtet. Die Sache ist dann in projectiver Ausdrucksweise folgende: der Euklidische Raum unterliegt vermöge der an der Linse stattfindenden Strahlenbrechung einer bestimmten Collineation (einer „Reliefperspective“), vermöge deren die unendlich ferne Ebene auf den Beobachter zu ins Endliche gerückt erscheint; es ist also in der That dieser Vergleichspunkt vorhanden, dass das Gesichtsfeld nach vornhin durch eine Wand wie abgeschlossen erscheint. Darum bleibt aber doch, wie man leicht bemerkt, ein wesentlicher Unterschied bestehen. Die in Rede stehende Wand ist eben kein Stück einer Kugelfläche, sondern eine richtige Ebene, und in Uebereinstimmung hiermit ist die abgeänderte Maassbestimmung, welche unser Beobachter wahrnimmt, nach wie vor eine Euklidische, d. h. eine parabolische Maassbestimmung, welche einen in der ebenen Wand gelegenen imaginären Kegelschnitt als fundamentales Gebilde benutzt. — Noch interessanter gewissermassen (als eine Mischung von wahr und falsch) ist, was Helmholtz über den Fall des positiven Krümmungsmaasses sagt. Er stattet zunächst den eben eingeführten Beobachter mit einer Convexbrille aus, was allerdings weniger gut passt, weil dadurch die in Rede stehende Wand (die Fluchtebene der Reliefperspective) nicht weggeschafft wird, wie es eigentlich der Fall sein sollte, sondern nur hinter den Beobachter gelegt wird. Dann wieder bemerkt er mit überraschender Deutlichkeit, dass der Hintergrund des Gesichtsfeldes im Falle positiven Krümmungsmaasses durch den eigenen Hinterkopf des Beobachters gegeben sein würde. Man kann die Verhältnisse, wie sie sich im (einfachen) elliptischen Raume gestalten, nicht überzeugender schildern, als durch diese Angabe geschieht. Die Sache stimmt allerdings auch im sphärischen Raume, aber doch nur in complicirter Weise, indem nämlich die Visirlinien, welche vom Auge des Beobachters ausgehen, ehe sie er-

neut, von hinten kommend, sich im Ausgangspunkte kreuzen, vorher alle im sphärischen Gegenpunkte des Beobachters zusammentreffen: das ist eine so wesentliche Sache, dass ein Naturforscher, der den Hergang schildert, sie unmöglich unerwähnt lassen kann. Helmholtz ist aber trotzdem nicht zur Erfassung des einfachen elliptischen Raumes durchgedrungen; vielmehr reproducirt er l. c. weiterhin ungeändert den alten (aber falschen) Satz, dass sich im Raume positiver Krümmung zwei geodätische Linien, wenn sie sich überhaupt schneiden, nothwendig in *zwei* Punkten schneiden müssen!

Fassen wir zusammen, so werden wir sagen dürfen, dass sich hier auf dem Gebiete der projectiven Geometrie ein ganz ähnliches Bild ergibt, wie bei den Untersuchungen über die Grundlagen der metrischen Geometrie, dass nämlich Helmholtz hier wie allerwärts in genialer Weise die richtigen allgemeinen Gesichtspunkte erfasst, dass aber die Einzelausführung nur wenig befriedigt. Der grosse Namen von Helmholtz kann durch solche Bemerkungen nicht herabgemindert werden; die Wissenschaft aber hat Gewinn, wenn die historische Kritik versucht, auch in solchen ausserordentlichen Fällen Licht und Schatten richtig zu vertheilen.

Göttingen, den 1. October 1897.