so lange zu wiederholen, bis keine Gewichtsabnahme mehr erfolgt. Vor allem aber ist darauf zu achten, daß der Porzellantiegel und sein Deckel sich außerhalb nicht mit Zinnsäure beschlagen, die sich aus dem Zinnchlorid und der Feuchtigkeit der Umgebung von neuem bildet. Deshalb setzt man den bedeckten Tiegel in einen größeren gleichfalls bedeckten, und erhitzt diesen ziemlich stark. Die zurückbleibende Wolframsäure ist bald grün, bald schwärzlich gefärbt; sie wird an der Luft geglüht und dadurch gelb und von constantem Gewicht.

I. 0,6975 Zinnsäure und 0,7335 Wolframsäure gaben zuletzt einen Rückstand von 0,7225, der nach dem Glühen an der Luft 0,7255 wog. Die Differenz beträgt also 0,008 Wolframsäure, d. h. statt 51,26 Proc. derselben wurden 50,7 Proc. wieder erhalten.

II. 0,554 Zinnsäure und 1,332 Wolframsäure hinterließen 1,337 von letzterer, d. h. statt 70,62 Proc. 70,89 Proc.

Dieser Methode habe ich mich bei der Trennung beider Säuren in der im vorhergehenden Aufsatz beschriebenen Verbindung bedient.

VI. *Die Interferenzerscheinungen zweiaxiger, senkrecht zur ersten Mittellinie geschnittener Krystallplatten im homogenen polarisirten Licht;*

von Eugen Lommel,

Professor in Schwyz.

Der in der Ueberschrift genannte Gegenstand ist schon so oft und so ausführlich behandelt worden, daß zu dem bereits Bekannten wohl nichts wesentlich Neues hinzuzusetzen möglich ist. Meine Absicht kann daher nur die seyn, in den folgenden Zeilen einfache und leicht discutirbare

Formeln aufzustellen, deren Herleitung keinen größern mathematischen Apparat erfordert, als derselbe gegenwärtig in den ausführlicheren Lehrbüchern der Physik angewendet zu werden pflegt. Eine solche Vereinfachung der Rechnungen gelingt selbstverständlich nur dadurch, daß man geeignete Einschränkungen, welche sonst erst am Ende der Rechnungen zur Erleichterung der Discussion einzutreten pflegen, gleich Anfangs Platz greifen läßt. Die so vereinfachten Formeln können sich dann allerdings in mathematischer Strenge nicht messen mit den vollständigeren aber complicirten Formeln ¹⁾, in welchen auf die Divergenz der beiden an der gleichen Stelle der Krystalloberfläche austretenden Strahlen, auf die ungleiche Absorption ungleich polarisirter Strahlen bei verschiedenen Einfallswinkeln usw. Rücksicht genommen ist. Sie enthalten aber doch mit vollkommen hinreichender Genauigkeit alle wesentlichen Umstände der Erscheinung, und vernachlässigen gewiß nur solche Modificationen, welche ihrer Feinheit wegen sich ohnedies der Beobachtung entziehen. Die vollständigeren Formeln sind wegen ihrer mühevollen Herleitung und der Schwierigkeit ihrer Discussion den Lehrbüchern unzugänglich, während die unten gegebene Darstellung bei einem nur geringen Aufwand mathematischer Hülfsmittel so durchsichtige Formeln liefert, daß sich dieselbe zum Gebrauche der Lehrbücher wohl eignen dürfte, wenn man einige auf die geometrischen Eigenschaften der bei diesen Erscheinungen auftretenden Curvensysteme (Hyperbeln und Lemniscaten) sich beziehende Erörterungen wegläßt, welche ich aber hier, weil sie für die Construction des Bildes einige nützliche Winke geben, nicht unterdrücken wollte. Eine wesentlich einfachere Darstellung glaube ich namentlich im ersten Paragraphen bei Berechnung der Curven gleicher Oscillationsrichtung erreicht zu haben ²⁾, während im zweiten Paragraphen, bei Ermittlung des Phasenunterschiedes, der Hauptsache nach die nämliche Entwicklung befolgt ist, welche

1) Neumann, Pogg. Ann. Bd. XXXIII. S. 257.

2) Vergl. Müller, Pogg. Ann. Bd. XLIV S. 273.

bereits in einigen Lehrbüchern ¹⁾ ihre Stelle gefunden hat. Aus diesen beiden Elementen, der Oscillationsrichtung und dem Phasenunterschied, wird alsdann im dritten Paragraphen die Lichtstärke für jeden Punkt des Bildes abgeleitet und die Construction der Erscheinung für jede beliebige Stellung der den Krystall zwischen sich fassenden Turmalinplatten gelehrt.

§ 1. Die Oscillationsrichtung.

Die dem Auge zugewandte Oberfläche der Krystallplatte sey zugleich die Ebene der Fig. 1 Taf. I. Eine vom beobachtenden Auge auf die Platte herabgelassene Senkrechte treffe dieselbe in O und verlaufe innerhalb der Krystallplatte in der Richtung der ersten Mittellinie, d. h. sie halbiere den spitzen Winkel der beiden optischen Axen. Die Gerade XOX' sey die Durchschnittslinie der Ebene der optischen Axen mit der Krystalloberfläche. In dieser Geraden seyen A und A' die Punkte, wo diejenigen Strahlen, welche im Innern des Krystalls in der Richtung der *secundären optischen Axen* fortgegangen sind, die Platte verlassen. Von jedem Punkte S der Krystalloberfläche gelangen zwei Strahlen in gleicher Richtung in's Auge, welche jedoch durch ihre Oscillationsrichtung und Phase von einander abweichen; dieselben durchlaufen zwar im Krystall verschiedene Wege, wir können aber, da ihre Divergenz jedenfalls nur unbedeutend ist, mit hinreichender Genauigkeit annehmen, daß dieselben innerhalb des Krystalls die nämliche Richtung verfolgen. Die Oscillationsebenen der beiden den Krystall in dieser Richtung durchsetzenden Strahlen sind aber nichts anderes als die zwei (nämlich die innere und die äußere) zu einander senkrechten Halbirungsebenen des Winkels, welchen zwei durch jene Richtung und die secundären optischen Axen gelegte Ebenen mit einander bilden. Die beiden in A und A' auslaufenden optischen Axen, in den Krystall hinein verlängert, schneiden sich auf der Mittellinie in einem Punkte o , von welchem

1) Z. B. Mousson, die Physik auf Grundlage der Erfahrung, Zürich 1860.

wir der Einfachheit wegen annehmen wollen, daß er gerade in die jenseitige Krystalloberfläche falle und der Divergenzpunkt des die Platte durchlaufenden Strahlenkegels sey. Vom Punkte o aus werde eine die Krystalloberfläche in O berührende Kugel beschrieben; seyen alsdann a , a' und s die Punkte, in welchen die optischen Axen oA , oA' und der Strahl oS die Kugeloberfläche treffen, so hat man um die erste Oscillationsebene zu finden, im sphärischen Dreieck asa' den Winkel bei s zu halbiren; die Halbirungslinie treffe die Grundlinie aa' im Punkte c . Je kleiner nun der Winkel der optischen Axen ist, und je kleiner die Neigung des Strahles oS zur Plattennormale angenommen wird, um so näher fällt das sphärische Dreieck asa' mit dem ebenen Dreieck ASA' und die Halbirungslinie sc des sphärischen Winkels s mit der Halbirungslinie SC des ebenen Winkels S zusammen, so daß SC als Spur der Oscillationsebene des einen Strahls oS auf der Krystalloberfläche betrachtet werden kann. Da die Oscillationsebene des zweiten nach der Richtung oS sich fortplanzenden Strahles zu der des ersten senkrecht steht, die Richtung oS aber von der Normale der Platte nur unbedeutend abweicht, so begehen wir jedenfalls nur einen kleinen Fehler, wenn wir die Spur der zweiten Oscillationsebene senkrecht zu derjenigen der ersten annehmen. Um daher die Gesammtheit aller Punkte der Krystalloberfläche zu finden, welche die nämlichen beiden (zu einander senkrechten) Oscillationsrichtungen aufweisen, brauchen wir nur folgende einfache geometrische Aufgabe zu lösen:

Für ein Dreieck von gegebener Grundlinie soll der geometrische Ort der Spitze so gesucht werden, daß die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze einen gegebenen Winkel mit der Grundlinie bildet.

Man wähle O (Fig. 1 Taf. I) zum Anfangspunkt und AOA' zur Abscissenaxe eines Systems rechtwinkliger Coordinaten, bezeichne die halbe Grundlinie OA mit p , den gegebenen Winkel ACS mit α , den Winkel CAS mit μ

und $CA'S$ mit ν , endlich die Coordinaten OM und MS der Spitze mit x und y . Man findet sogleich die Beziehung

$$2\alpha = 180^\circ + \nu - \mu$$

oder

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\nu - \mu).$$

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{y}{p+x} \text{ und } \operatorname{tg} \mu = \frac{y}{p-x}$$

folglich

$$\operatorname{tg}(\nu - \mu) = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - p^2} = \operatorname{tg} 2\alpha,$$

welche bereits die Gleichung des verlangten Ortes ist. Bringt man sie auf die Form:

$$x^2 - y^2 - 2xy \cotg 2\alpha = p^2 \quad (1)$$

so erkennt man sofort, daß dieselbe für die verschiedenen Werthe von α ein System *gleichseitiger Hyperbeln* darstellt, welche sämmtlich durch die Punkte A und A' hindurchgehen.

Transformirt man diese Gleichung zu einem neuen rechtwinkligen Coordinatensystem, welches den nämlichen Anfangspunkt O hat, dessen Abscissenaxe aber mit der ursprünglichen den Winkel β einschließt, indem man

$$x = x' \cos \beta - y' \sin \beta$$

$$\text{und } y = x' \sin \beta + y' \cos \beta$$

setzt, so erhält man zunächst:

$$(x'^2 - y'^2)(\cos 2\beta - \sin 2\beta \cotg 2\alpha) - 2x'y'(\sin 2\beta + \cos 2\beta \cotg 2\alpha) = p^2.$$

Soll die neue Abscissenlinie mit der Hauptaxe der Hyperbel zusammenfallen, so müssen die zusammengehörigen Werthe von α und β der Bedingung:

$$\sin 2\beta + \cos 2\beta \cotg 2\alpha = 0$$

$$\text{oder } 1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta = 0 \quad (2)$$

genügen. Eliminirt man mittelst dieser Relation den Winkel α aus der obigen transformirten Gleichung, so gewinnt die Gleichung der Hyperbel, auf ihre Axen bezogen, folgende einfache Gestalt:

$$x'^2 - y'^2 = p^2 \cos 2\beta \quad (3)$$

wo jetzt β den Winkel ausdrückt, welchen die reelle Axe mit der früheren Abscissenlinie AOA' bildet. Die halbe

Länge r dieser Axe bestimmt sich sodann aus der Gleichung:

$$r^2 = p^2 \cos 2\beta \quad (4)$$

welche uns zugleich zeigt, daß ihre Richtung stets zwischen $\beta = -45^\circ$ und $\beta = +45^\circ$ (oder zwischen $\beta = 180^\circ - 45^\circ$ und $\beta = 180^\circ + 45^\circ$) enthalten seyn muß, weil alle übrigen Werthe von β imaginäre Werthe von r liefern würden.

Die Gleichung (2) sagt aus, daß die Axenrichtung (β) der Hyperbel mit der gegebenen Oscillationsrichtung (α) einen Winkel von 45° macht. Zieht man daher durch den Anfangspunkt O die Gerade PP' (Fig. 2 Taf. I) parallel zur gegebenen Oscillationsrichtung, und QQ' senkrecht dazu (also parallel mit der zugehörigen zweiten Oscillationsrichtung), und halbirt sodann von den vier dadurch entstandenen rechten Winkeln diejenigen zwei Scheitelwinkel POQ und $P'OQ'$, welche die Endpunkte A und A' der beiden optischen Axen zwischen ihre Schenkel fassen, so fällt die reelle Axe derjenigen Hyperbel, welcher jene zwei Schwingungsrichtungen entsprechen, in die Halbirungslinie RR' . Daraus geht noch ferner hervor, daß die Geraden PP' und QQ' die Asymptoten der Hyperbel sind, *daß also die Asymptoten einer jeden unserer Hyperbeln mit den ihr zugehörigen zwei Oscillationsrichtungen parallel laufen.*

Für die Gränzwerte von $\beta + 45^\circ$ und -45° , wird $r = 0$; die Hyperbel reducirt sich alsdann auf ihre Asymptoten, nämlich die beiden Coordinatenachsen XX' und YY' ; in allen Punkten der Coordinatenachsen erfolgen also die Oscillationen parallel mit diesen selbst.

Werden in Gleichung (4) r und β als Polarcoordinaten angesehen, so stellt dieselbe den geometrischen Ort der Scheitel sämmtlicher Hyperbeln dar. Diese krumme Linie wurde von Hrn. J. Müller ¹⁾ die *Spitzencurve* genannt. Der bloße Anblick der Gleichung (4) lehrt, *daß die Spitzencurve eine Lemniscate ist*, welche sich in Form einer 8 durch die Punkte A, A' und O hindurchschlingt.

Hat man daher die Spitzenlemniscate $ACOC'A'$ (Fig. 2

1) A. a. O.

Taf. I) gezeichnet, so ist ihr Radius vector OC , welcher mit der oben erwähnten Halbirungslinie RR' zusammenfällt, der Gröfse und Richtung nach die reelle Halbaxe und der Punkt C der Scheitel der Hyperbel. Bestimmt man aus Gleichung (1) den Winkel w , welchen die Berührende an irgend einem Punkte (x, y) einer unserer Hyperbeln mit der x -Axe einschließt, so findet man:

$$\operatorname{tg} w = \frac{dy}{dx} = \frac{x \operatorname{tg} 2\alpha - y}{y \operatorname{tg} 2\alpha + x} \quad (5)$$

Für $x = p$ und $y = 0$, d. h. für den Punkt A , wo alle Hyperbeln sich schneiden, ergibt sich:

$$\operatorname{tg} w_0 = \operatorname{tg} 2\alpha$$

oder

$$w_0 = 2\alpha$$

Der Winkel also, unter welchem eine jede Hyperbel im Punkte A die Abscissenaxe AOA' durchschneidet, wird durch ihre Asymptotenrichtung halbirt. Berührt daher die Gerade QS (Fig. 2 Taf. I) die Hyperbel BB' in A , und zieht man AT parallel der Asymptote OP , so muß Winkel $TAX = TAS = \alpha$ seyn, demnach auch $SAO = 180^\circ - 2\alpha$, und da Winkel $AOS = \alpha$ ist, so muß auch $ASO = \alpha$ seyn; das Dreieck AOS ist also gleichschenkelig, und zwar ist $AO = AS = p$.

Beschreibt man daher vom Punkte A aus einen Kreis mit dem Halbmesser p , welcher eine beliebige Asymptotenrichtung OP in S schneidet, so berührt der Durchmesser SAQ des Kreises die jener Asymptotenrichtung zugehörige Hyperbel BAB' im Punkte A ; wegen der Perpendicularität der Asymptoten geht selbstverständlich die andere Asymptote durch den Endpunkt Q des Durchmessers SAQ . Zu allen unsern Hyperbeln können somit die Berührungslinien im gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte A mit Hülfe jenes einzigen Kreises construirt werden.

Es erübrigt jetzt nur noch die Gröfse p aus den optischen Constanten des Krystalls zu bestimmen. Die Entfernung irgend eines Punktes der Krystalloberfläche vom Fußpunkt O der vom Auge auf sie gefällten Senkrechten ist

proportional der Tangente des Winkels, welchen der von jenem Punkte zum Auge gelangende Lichtstrahl mit der Plattennormale einschließt. Da wir diesen Winkel stets als klein voraussetzen, so können wir statt der Tangente auch den Sinus nehmen. Ein Strahl aber, welcher den Krystall in der Richtung der secundären optischen Axe durchlaufen hat, breitet sich beim Austritt zu einem Strahlenkegel aus (äußere conische Refraction), dessen Axe, die *scheinbare optische Axe* wir als diejenige Richtung betrachten müssen, in welcher der Punkt *A* gesehen wird. Ist daher γ der Winkel der secundären optischen Axe und γ' derjenige der scheinbaren optischen Axe mit der ersten Mittellinie, so hat man:

$$\sin \gamma' = \frac{1}{b} \cdot \sin \gamma$$

da dem Strahl *oA* die mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit *b* oder das mittlere Brechungsverhältniß $\frac{1}{b}$ zukommt, während bekanntlich

$$\sin \gamma = \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}}$$

ist, unter $a < b < c$ die drei optischen Hauptconstanten des Krystalls verstanden. Die Gröfse *p* ist somit der Gröfse

$$\sin \gamma' = \frac{c}{b^2} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}} \quad (6)$$

proportional zu setzen.

§ 2. Der Gangunterschied.

Um den Gangunterschied der beiden bei *S* (Fig. 1, Taf. I) in gleicher Richtung zum Auge austretenden Strahlen zu bestimmen, machen wir die bereits oben erwähnte Annahme, daß beide auch den Krystall in einerlei Richtung durchlaufen, mit seiner Mittellinie den Winkel w bildend. Bedeutet alsdann *d* die Dicke der Platte, so haben beide Strahlen im Krystall den Weg $\frac{d}{\cos w}$ zurückzulegen.

Bezeichnen wir ferner die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des langsameren Strahls mit v_1 , diejenige des schnelleren mit v_2 (die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Luft = 1 gesetzt), so ist $v_1 \lambda$ die Wellenlänge des ersten, $v_2 \lambda$ die Wellenlänge des zweiten Strahls, wenn durch λ die Wellenlänge in der Luft ausgedrückt wird. Dann ist $\frac{d}{v_1 \lambda \cos w}$ die Anzahl der Wellenlängen, welche auf dem Wege des ersten Strahles liegen, während der zweite Strahl längs desselben Weges nur $\frac{d}{v_2 \lambda \cos w}$ Wellenlängen zählt. Die beiden Strahlen sind also in ihrem Gange um die Anzahl von

$$\vartheta = \frac{d}{\lambda \cos w} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right)$$

Wellenlängen verschieden. Aus dem Biot'schen Gesetz

$$\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) \sin u_1 \sin u_2$$

wo u_1 und u_2 die Winkel bezeichnen, welche der Strahl oS mit den secundären optischen Axen oA und oA' bildet, ergibt sich aber

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = \frac{\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2}}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) \sin u_1 \sin u_2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

Da der Punkt S , unserer Annahme gemäß, sehr nahe bei O liegt, so werden die Geschwindigkeiten der beiden daselbst austretenden Strahlen nur wenig differiren von den Geschwindigkeiten der zwei in der Richtung der Mittellinie durch den Krystall gegangenen Strahlen; wir können demnach ohne bedeutenden Fehler

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

setzen, so daß wir

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \sin u_1 \sin u_2$$

erhalten. Um ϑ zu kennen, bleibt jetzt nur noch $\cos w$ zu berechnen übrig. In den sphärischen Dreiecken sOa und sOa' (Fig. 1 Taf. I) ist aber $as = u_1$, $a's = u_2$, $Os = w$, $Oa = Oa' = \gamma$; ferner werde Winkel $aOs = \delta$ und folglich Winkel $a'Os = 180^\circ - \delta$ gesetzt; aus den beiden Gleichungen

$$\cos u_1 = \cos \gamma \cos w + \sin \gamma \sin w \cos \delta$$

$$\text{und } \cos u_2 = \cos \gamma \cos w - \sin \gamma \sin w \cos \delta$$

folgt alsdann

$$\cos w = \frac{\cos u_1 + \cos u_2}{2 \cos \gamma} = \frac{1}{2} (\cos u_1 + \cos u_2) \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}}$$

so daß

$$\vartheta = \frac{2d}{\lambda} \cdot \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}} \cdot \frac{\sin u_1 \sin u_2}{\cos u_1 + \cos u_2}$$

gefunden wird. Weil jedoch die Winkel u_1 und u_2 sehr klein zu denken sind, so kann man ihre Cosinus $= 1$ und statt ihrer Sinus die Bogen setzen. Nach dieser Vereinfachung hat man:

$$\vartheta = \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}{c^2(a + b)} \cdot u_1 u_2 \quad (7)$$

wo jetzt u_1 und u_2 die Längen der Bogen as und $a's$, oder, was wegen der Kleinheit dieser Bogen auf dasselbe hinauskommt, die Längen der geraden Linien AS und $A'S$ ausdrücken, nach derselben Einheit gemessen wie OA oder p in § 1. Der Gangunterschied ϑ behält also den gleichen Werth in allen jenen Punkten, für welche das Product $u_1 u_2$ constant bleibt; die Curven gleichen Gangunterschiedes sind demnach Lemniscaten, welche sich um die beiden Punkte A und A' als ihre Pole herumschlingen. Will man die Lage des Punktes S durch seine Polarcoordinaten $OS = \varrho$ und Winkel $AOS = \delta$ ausdrücken, so erhält man aus

$$u_1^2 = p^2 + \varrho^2 - 2p\varrho \cos \delta$$

$$\text{und } u_2^2 = p^2 + \varrho^2 + 2p\varrho \cos \delta$$

sogleich

$$u, u_2 = \sqrt{p^4 + q^4 - 2p^2 q^2 \cos 2\delta}$$

also die Gleichung des Lemniscatensystems in Polarcordinaten:

$$\vartheta = \frac{dq}{\lambda} \sqrt{p^4 + q^4 - 2p^2 q^2 \cos 2\delta} \quad (8)$$

wo nur der Kürze wegen

$$\frac{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}{c^2(a+b)} = q$$

gesetzt wurde.

Die Gleichung des Lemniscatensystems in Orthogonal-coordinaten dagegen lautet:

$$[(p+x)^2 + y^2][(p-x)^2 + y^2] = \frac{\vartheta^2 \lambda^2}{d^2 q^2} \quad (9).$$

Daraus findet man die Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie in dem Punkte (x, y) einer Lemniscate mit der Abscissenaxe einschließt, wie folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{p^2 - x^2 - y^2}{p^2 + x^2 + y^2} \quad (10).$$

Durch denselben Punkt (x, y) geht aber auch eine der in Gleichung (1) enthaltenen Hyperbeln, wenn daselbst zu den gegebenen Werthen von x und y α so bestimmt gedacht wird, daß jene Gleichung erfüllt ist; substituirt man nun unter dieser Voraussetzung den Werth von p^2 aus Gleichung (1) in die vorstehende, so geht dieselbe über in:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{y \lg^2 \alpha + x}{x \lg^2 \alpha - y} \quad (11).$$

Vergleicht man dieses Resultat mit Gleichung (5) in §. 1., so erkennt man, daß jede Hyperbel der Gleichung (1) jede Lemniscate der Gleichung (9) rechtwinklig durchschneidet, d. h. *die Curven gleicher Oscillationsrichtung sind die rechtwinkligen Trajectorien zu den Curven gleichen Gangunterschiedes*, und umgekehrt. Denkt man sich daher alle zu den stetig aufeinander folgenden Werthen von ϑ gehörigen Lemniscaten, und auch alle zu den stetig aufeinanderfolgenden Werthen von α gehörigen Hyperbeln con-

struirt, so wird das Gesichtsfeld durch diese beiden Curvensysteme in unendlich viele unendlich kleine rechteckige Feldchen zerschnitten.

Um diejenigen Punkte irgend einer Lemniscate zu finden, welche am weitesten oder am wenigsten weit von der Abscissenaxe entfernt sind, d. h. also die Maxima oder Minima der Ordinate y , muſs man $\frac{dy}{dx}$ (Gleichung 10) gleich Null setzen ($\frac{dy}{dx} = 0$ gesetzt, liefert weder Maxima noch Minima); man erhält dadurch entweder

$$x^2 + y^2 = p^2 \quad (12)$$

oder

$$x = 0 \quad (13).$$

Die erstere Gleichung, welche bloſs Maxima giebt, sagt aus, daſs dieselben auf einem Kreise liegen, welcher von O aus mit dem Radius p beschrieben wurde (vergl. Fig. 5 Taf. I), oder mit andern Worten, *dieser Kreis ist, für alle Lemniscaten, welche er durchschneidet, der geometrische Ort ihrer Ordinatenmaxima.*

In einem jeden Maximum ist die Berührungslinie, oder das ihr angehörende Element der Curve, mit der Abscissenaxe parallel. Da nun die Lemniscaten von den Hyperbeln senkrecht durchschnitten werden, so müssen die Tangenten der Hyperbeln da, wo diese durch die Maximalpunkte der Lemniscaten hindurchgehen, oder, was dasselbe ist, wo sie dem eben genannten Kreise begegnen, mit der Ordinatenaxe parallel seyn: eine jede Hyperbel kommt daher der Ordinatenaxe am nächsten da, wo sie jenen Kreis durchschneidet, so daſs *der nämliche Kreis auch der geometrische Ort aller jener Hyperbelpunkte ist, deren Abscissen Minima sind.* Da jeder dieser Punkte (z. B. D Fig. 2 Taf. I) vom Mittelpunkte O eben so weit entfernt ist wie der Punkt A , so muſs er zu diesem symmetrisch liegen in Bezug auf die Hyperbelaxe OC , und seine Tangente DE muſs diese Axe im nämlichen Punkte E treffen, wie die Tangente AS . Man findet daher den Punkt D als Durchschnittspunkt des Kreises

AD mit einer Geraden, welche durch E parallel zur Ordinatenaxe gezogen wird.

Diejenigen Lemniscaten, deren Maxima auf dem Kreise (12) liegen, haben ihre Minima in der Ordinatenaxe, für $x = 0$; für alle übrigen Lemniscaten liefert $x = 0$ nur Maxima.

Für die Maxima und Minima muß natürlich auch der in (11) enthaltene Werth von $\frac{dy}{dx}$, weil er ja identisch ist mit demjenigen der Gleichung (10), verschwinden, d. h. es muß

$$y \operatorname{tg} 2\alpha + x = 0$$

oder

$$y = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} \cdot x \quad (14)$$

seyn. Diese Gleichung stellt aber eine Gerade vor, welche durch den Anfangspunkt geht und senkrecht steht auf einer andern, die mit der Abscissenlinie den Winkel 2α bildet. Denkt man sich nun durch das Maximum irgend einer Lemniscate, also durch den Punkt D , wo sie vom obigen Kreis geschnitten wird, auch eine unserer Hyperbeln gezogen, so bildet ihre Tangente im Punkte A mit der Abscissenaxe den Winkel 2α ; fällt man auf diese Tangente von O aus eine Senkrechte, so trifft diese den Kreis gerade im Maximum D der Lemniscate; diesen Punkt D , welcher zugleich dem Abscissenminimum der Hyperbel entspricht, kann man daher für eine Hyperbel von gegebener Asymptotenrichtung α auch finden, wenn man auf die nach §. (1) construirte Tangenten AS vom Anfangspunkt die Senkrechte OD zieht und dieselbe $= p$ macht.

Da die gerade Linie, welche den Kreis in D berührt, senkrecht steht zum Radius OD , so läuft sie folglich parallel mit der Geraden AS , welche die durch den nämlichen Punkt D gehende Hyperbel in A berührt. Eine jede Lemniscate wird daher von unserem Kreise unter demselben Winkel geschnitten, unter welchem die zugehörige Hyperbel die Abscissenaxe schneidet.

§. 3. Die Intensität.

Es sey, wie vorher, α (Fig. 3 Taf. I) der Winkel, welchen die eine der beiden in dem beliebigen Punkte S stattfindenden Schwingungsrichtungen mit der Abscissenaxe OX einschließt, während die andere zu jener senkrecht steht; sey ferner φ der Winkel, den die Oscillationsrichtung der ersten Turmalinplatte mit der Abscissenaxe bildet, so wird ein durch dieselbe durchgegangener und demnach mit der Schwingungsrichtung φ an der Krystallplatte anlangender Strahl, dessen Vibrationsintensität gleich A sey, in zwei Strahlen zerlegt, von denen der eine nach α , der andere senkrecht dazu schwingt. Wenn wir von der ungleichen Schwächung, welche die beiden Strahlen beim Durchgang durch die Krystallplatte erleiden, und von der Absorption der Turmaline ganz absehen, so gelangen dieselben zum zweiten Turmalin mit den Vibrationsintensitäten:

$$A \cos(\varphi - \alpha)$$

und $A \sin(\varphi - \alpha)$

Bezeichnen wir ferner mit $2\pi g$ die Phase des einen und mit $\pm 2\pi \vartheta$ den Phasenunterschied der beiden Strahlen, so sind in einem beliebigen Augenblick ihre Schwingungsgeschwindigkeiten:

$$A \cos(\varphi - \alpha) \sin 2\pi g$$

und $A \sin(\varphi - \alpha) \sin 2\pi(g \pm \vartheta)$.

Ist nun ψ der Winkel der Oscillationsrichtung des zweiten Turmalins mit der Abscissenaxe, so besitzen die beiden Strahlen, auf diese Richtung reducirt, nach ihrem Durchgange durch den Turmalin die Schwingungsgeschwindigkeiten:

$$A \cos(\varphi - \alpha) \cos(\psi - \alpha) \sin 2\pi g$$

und $A \sin(\varphi - \alpha) \sin(\psi - \alpha) \sin 2\pi(g \pm \vartheta)$

Da die zwei Strahlen jetzt in der gleichen Ebene schwingen, so können sie interferiren; die Oscillationsgeschwindigkeit des resultirenden Strahls wird erhalten, wenn man diejenigen der Componenten addirt, sie ist also gleich

$$A[\cos(\varphi - \alpha) \cos(\psi - \alpha) \sin 2\pi g \\ + \sin(\varphi - \alpha) \sin(\psi - \alpha) \sin 2\pi(g \pm \vartheta)],$$

oder wenn man $\sin 2\pi(g \pm \vartheta)$ entwickelt:

$$A[\cos(\varphi - \alpha)\cos(\psi - \alpha) \\ + \sin(\varphi - \alpha)\sin(\psi - \alpha)\cos 2\pi\vartheta]\sin 2\pi g \\ \pm A\sin(\varphi - \alpha)\sin(\psi - \alpha)\sin 2\pi\vartheta\cos 2\pi g.$$

Setzt man nun

$$A[\cos(\varphi - \alpha)\cos(\psi - \alpha) \\ + \sin(\varphi - \alpha)\sin(\psi - \alpha)\cos 2\pi\vartheta] = J\cos 2\pi\eta$$

und

$$A\sin(\varphi - \alpha)\sin(\psi - \alpha)\sin 2\pi\vartheta = J\sin 2\pi\eta$$

so findet man die Lichtstärke J^2 des resultirenden Strahls, wenn man die Quadrate der beiden letzteren Gleichungen addirt; nach einigen naheliegenden Reductionen ergibt sich:

$$J^2 = A^2[\cos^2(\varphi - \psi) \\ - \sin 2(\varphi - \alpha)\sin 2(\psi - \alpha)\sin^2 \pi\vartheta] \quad (15).$$

Das erste Glied in der Klammer hängt bloß ab von der Stellung der Turmaline *gegen einander* und liefert gleichsam den Grundton des ganzen Gemäldes, welcher bei Abwesenheit der Krystallplatte und alleinigem Vorhandenseyn der Turmalinplatten überall gleichmäÙig verbreitet wäre; im zweiten aus drei Factoren bestehenden Gliede geben die beiden ersten zusammengehörigen den Einfluss an, welchen die jeweilige Stellung der beiden Turmaline *gegen die Krystallplatte* auf die Erscheinung ausübt; der dritte Factor endlich giebt Rechenschaft über die Modificationen, welche durch Gangunterschied und Wellenlänge hervorgebracht werden.

Denkt man sich in der Formel (15) J^2 constant, so ist sie die Gleichung der *Curven gleicher Intensität*. Es wäre leicht aus dem Vorhergehenden α und ϑ in Orthogonal- oder Polarcoordinaten auszudrücken, und so die Gleichung der Intensitätscurven in einem dieser beiden gebräuchlichsten Coordinatensysteme zu erhalten. Da aber einem jeden Werthe von α eine der oben besprochenen Hyperbeln, einem jeden Werthe von ϑ aber eine bestimmte Lemniscate entspricht, so können wir einen jeden Punkt des Bildes als den Durchschnittspunkt einer solchen Hyperbel mit einer Lemniscate ansehen, und haben sonach in (15)

die Gleichung der Intensitätscurven in einem eigenthümlichen Coordinatensystem.

Wir haben oben unter φ den Winkel verstanden, welchen die Oscillationsrichtung des *ersten* Turmalins mit der Abscissenaxe bildet, unter ψ dagegen den entsprechenden Winkel der *zweiten* Turmalinplatte. Die blofse Ansicht der Formel (15) lehrt aber, dafs man, ohne die Erscheinung im mindesten zu ändern, φ und ψ mit einander vertauschen kann, dafs es somit gleichgiltig ist, auf welche von den beiden Turmalinplatten wir φ und ψ beziehen. Sowohl φ als ψ mögen von der positiven x -Axe aus gegen die positive Y -Axe hin von 0° bis 360° gezählt werden; denken wir uns nun durch den Anfangspunkt O (Fig. 4 Taf. I) die Oscillationsrichtung $\varphi\varphi'$ und $\psi\psi'$ der beiden Turmaline gezogen, so könnten wir zur näheren Bestimmung der Richtungen φ und ψ unter den vier Combinationen $O\varphi$ und $O\psi$, $O\varphi$ und $O\psi'$, $O\varphi'$ und $O\psi$, $O\varphi'$ und $O\psi'$ eine beliebige auswählen; wir wollen immer diejenige nehmen, welche φ (in Fig. 4 Taf. I Winkel $XO\varphi$) gröfser als ψ (Winkel $XO\psi$) und zugleich $\varphi - \psi$ (oder Winkel $\varphi O\psi$) kleiner als 90° ergibt. Dabei kann α beliebig weit, positiv in der nämlichen Richtung wie φ und ψ , negativ in der entgegengesetzten Richtung herumgezählt werden.

Die Intensität wird nun gleich $A^2 \cos^2(\varphi - \psi)$, d. h. gleich derjenigen, welche die Turmaline ohne Dazwischenkunft der Krystallplatte zeigen würden, in allen jenen Punkten für welche $\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha) \sin^2 \pi \vartheta = 0$ ist; dieses geschieht erstens, wenn $\sin^2 \pi \vartheta = 0$, oder wenn ϑ (Null oder) eine ganze Zahl ist; die *Lemniscaten* aa , bb , $cc \dots$ (Fig. 5 Taf. I) also deren Lichtstrahlen um eine ganze Anzahl von Wellenlängen differiren, zeigen in allen ihren Punkten die gleiche Lichtstärke $A^2 \cos^2(\varphi - \psi)$. Dieses Lemniscatensystem wollen wir die *Hauptlemniscaten* nennen. — Das obige Product wird ferner Null, sobald entweder $\sin 2(\varphi - \alpha)$, oder $\sin 2(\psi - \alpha)$ verschwindet, d. h. entweder für $\alpha = \varphi$, oder für $\alpha = \psi$; die nämliche

Lichtstärke $A^2 \cos^2(\varphi - \psi)$ findet demnach auch statt auf den Hyperbeln BB' und CC' (Fig. 5 Taf. I), deren Asymptoten parallel (und senkrecht) sind zu den Schwingungsrichtungen der beiden Turmaline. Wir wollen diese beiden Hyperbeln, deren Asymptoten in Fig. 4 Taf. I für die erste mit $\varphi\varphi'$ und $\pi\pi'$, für die zweite mit $\psi\psi'$ und $\rho\rho'$ bezeichnet sind, die *Haupthyperbeln* nennen. Die Werthe $\alpha = \varphi \pm 90^\circ$, $\alpha = \psi \pm 90^\circ$, $\alpha = \varphi \pm 180^\circ$, $\alpha = \psi \pm 180^\circ$ etc., welche aufser den oben genannten $\sin 2(\varphi - \alpha)$ und $\sin 2(\psi - \alpha)$ zum Verschwinden bringen, würden augenscheinlich zu den nämlichen zwei Hyperbeln führen, und können somit unberücksichtigt bleiben.

Das Product $\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha)$ bleibt negativ, so lange α zwischen φ und ψ liegt; denn alsdann ist $\varphi - \alpha$ positiv, $\psi - \alpha$ aber negativ, während die absoluten Werthe beider Differenzen, wegen $\varphi - \psi < 90^\circ$, um so mehr unter 90° bleiben. Auf allen Hyperbeln also, deren Asymptoten in den Winkel $\varphi O \psi$ (Fig. 4, Taf. I) fallen, ist die Intensität gröfser als $A^2 \cos^2(\varphi - \psi)$ oder mindestens diesem Werthe gleich; dasselbe findet statt, wenn α zwischen $\psi + 90^\circ$ und $\varphi + 90^\circ$, d. h. in den Winkel $\rho O \pi$ ($\pi\pi'$ sey senkrecht zu $\varphi\varphi'$, $\rho\rho'$ senkrecht zu $\psi\psi'$ errichtet) fällt oder zwischen $\psi - 90^\circ$ und $\varphi - 90^\circ$ (Winkel $\rho' O \pi'$), oder zwischen $\psi + 180^\circ$ und $\varphi + 180^\circ$ (Winkel $\varphi' O \psi'$). Das obige Product wird dagegen positiv, wenn α zwischen $\varphi - 90^\circ$ und ψ , oder zwischen φ und $\psi + 90^\circ$, oder zwischen $\varphi + 90^\circ$ und $\psi + 180^\circ$, oder zwischen $\varphi + 180^\circ$ und $\psi + 270^\circ$ fällt; die Intensität ist daher kleiner als $A^2 \cos^2(\varphi - \psi)$ oder höchstens gleich diesem Werthe auf allen Hyperbeln, deren Asymptoten in die Winkel $\pi' O \psi$, $\varphi O \rho$, $\pi O \psi'$ und $\varphi' O \rho'$ hineinfallen. Da die Oscillationen wie gewöhnlich angenommen wird, senkrecht zur Polarisationssebene erfolgen, so können wir diese Resultate folgendermassen ausdrücken: *Auf allen Hyperbeln, deren Asymptoten in die spitzen Scheitelwinkel der Oscillationsrichtungen und in die spitzen Scheitelwinkel der Polarisationsrichtungen der beiden Turmaline hineinfallen, ist die Lichtstärke*

größer als diejenige, welche ohne die Krystallplatte ~~wahrgenommen~~ ^{wäre} würde, oder mindestens dieser gleich ¹⁾); kleiner dagegen oder höchstens ihr gleich ¹⁾) auf sämtlichen Hyperbeln, deren Asymptoten in die spitzen Scheitelwinkel fallen, welche die Oscillationsrichtung einer jeden Turmalinplatte mit der Polarisationsrichtung der andern macht. In Fig. 4 Taf. I sind des bessern Ueberblicks wegen die Scheitelwinkel, welche die Asymptoten der dunkleren Hyperbeln enthalten, durch Schattirung vor denjenigen ausgezeichnet, welche die Asymptoten der helleren Hyperbeln in sich fassen.

Die Hyperbeln aber, welche der erstgenannten Reihe von Asymptoten zugehören, liegen in den Scheitelräumen BAC und $B'AC'$ (Fig. 5 Taf. I) während der zweiten Reihe von Asymptoten die Hyperbeln entsprechen, deren Zweige in die Scheitelräume BAC' und $B'AC$ hineinfallen. Die größere Intensität herrscht demnach zwischen den beiden Haupthyperbeln, die kleinere außerhalb derselben. Unter dem Raume »zwischen« den beiden Haupthyperbeln verstehen wir dabei stets denjenigen, welchen die ψ -Hyperpel ($\psi < \varphi$) beschreiben würde, wenn man sie, in der Richtung von der positiven x -Axe gegen die positive y -Axe drehend, allmählich in die φ -Hyperbel übergehen liesse.

Da nach §. 1. im Punkte A die eine Haupthyperbel (d. h. ihre Tangente in diesem Punkte) mit der Abscissenaxe den Winkel 2ψ , die andere dagegen den Winkel 2φ bildet, so folgt, daß die beiden Haupthyperbeln in ihrem Durchkreuzungspunkte A einen Winkel mit einander machen, welcher doppelt so groß ist, als der spitze Winkel zwischen den Oscillationsrichtungen der beiden Turmaline, nämlich gleich $2(\varphi - \psi)$.

Ist daher der Winkel $\varphi - \psi$ der Turmaline gleich Null, so ist es auch derjenige der beiden Haupthyperbeln, und beide verschmelzen in eine einzige; der hellere Raum zieht sich demnach jetzt auf diese einzige Haupthyperbel zusammen, auf welcher, so wie auf den Hauptlemniscaten, die

1) Das Letzere nämlich nur auf den Haupthyperbeln BB' und CC' und auf den Hauptlemniscaten aa , bb , $cc \dots$ (Fig. 5 Taf. I).

größtmögliche Helligkeit A^2 herrscht. In allen übrigen Punkten des Bildes ist die Intensität geringer als jene, d. h. der dunklere Raum nimmt in diesem Falle die gesamte Bildfläche ein.

Der hellere Raum gewinnt an Breite, wenn der Winkel der Turmaline zunimmt; bilden die Schwingungsrichtungen der Turmaline einen Winkel von 45° mit einander so stehen die Haupthyperbeln im Punkte A auf einander senkrecht, und die Intensität auf ihnen sowie auf den Hauptlemniscaten beträgt $\frac{1}{2}A^2$.

Der hellere Raum wächst fortwährend an Breite, bis $\varphi - \psi = 90^\circ$, als $2(\varphi - \psi) = 180^\circ$ wird. Auch jetzt fallen, wie Anfangs, die beiden Haupthyperbeln in eine einzige zusammen, ihre entsprechenden Schenkel aber bilden einen geraden Winkel mit einander, d. h. sie laufen von A aus nach entgegengesetzten Richtungen. Der dunkle Raum zieht sich dadurch auf die nun einzige Haupthyperbel zusammen, welche nebst den Hauptlemniscaten die kleinstmögliche Intensität Null aufweist. In allen übrigen Punkten des Bildes ist die Lichtstärke größer als Null, d. h. der hellere Raum ist jetzt über die ganze Bildfläche ausgebreitet.

Wenn also der Winkel der Turmaline von 0° bis 45° wächst, so nimmt die Beleuchtung der Haupthyperbeln und Hauptlemniscaten von A^2 bis $\frac{1}{2}A^2$ ab; sie nimmt weiter von $\frac{1}{2}A^2$ bis 0 ab, wenn der Winkel der Turmaline von 45° bis 90° zunimmt. Dabei behalten die Hauptlemniscaten ihre Gestalt und Lage unverändert bei, während die Haupthyperbeln, Anfangs zusammenfallend, immer weiter auseinandertreten, bei $\varphi - \psi = 45^\circ$ auf einander senkrecht stehen und endlich bei $\varphi - \psi = 90^\circ$ nach entgegengesetzter Richtung über einander zu liegen kommen.

Denkt man sich in jedem Punkte des Bildes die Lichtstärke als Ordinate senkrecht errichtet, so geben die Gipfelpunkte der Ordinaten eine krumme Oberfläche, ein „Lichtgebirge“. Die Hauptlemniscaten aa , bb , $cc \dots$ (Fig. 5 Taf. I) und die Haupthyperbeln BB' , CC' stellen dann gleich-

sam ein horizontal verlaufendes Straßennetz vor, welches das ganze Terrain in Felder wie $mnpq$ und $pqrs$ zerschneidet (es werde dabei $\varphi - \psi > 0^\circ$, aber $< 90^\circ$ angenommen, also nicht $= 0^\circ$ und nicht $= 90^\circ$). Ueber jedem Felde wie $mnpq$, welches in einen der helleren Scheitelräume BAC und $B'AC'$ fällt, erhebt sich ein Lichtberg über das Niveau des Straßennetzes; jedes Feld dagegen, welches wie $pqrs$ in einem der dunkleren Scheitelräume BAC' und $B'AC$ liegt, umschliesst ein muldenförmiges Thal, welches sich unter das Niveau der Straßen hinabsenkt.

Sind die Turmaline parallel gestellt ($\varphi - \psi = 0$), so bilden die Hauptlemniscaten sammt der nun einzigen Haupthyperbel das Straßennetz; Berge sind jetzt keine mehr vorhanden, sondern in jedes Feld senkt sich ein Thal hinab.

Sind die Turmaline rechtwinklig gekreuzt, so besteht das Straßennetz ebenfalls nur aus den Hauptlemniscaten und einer einzigen Haupthyperbel; über jedem Felde steigt ein Lichtberg empor, während Thäler gar nicht vorhanden sind. —

Maxima der Lichtstärke treten ein in allen jenen Punkten, für welche das Product $\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha) \sin^2 \pi \vartheta$ seinen größten negativen Werth erreicht; dieses wird offenbar dann stattfinden, wenn gleichzeitig der immer positive Factor $\sin^2 \pi \vartheta$ seinen größten Werth 1 und das Product $\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha)$ seinen größten negativen Werth annimmt. Nun ist aber $\sin^2 \pi \vartheta$ ein Maximum, so oft ϑ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ wird; die Maxima der Lichtstärke liegen daher auf jenen Lemniscaten, welche einem Gangunterschied von einer ungeraden Anzahl halber Wellenlängen entsprechen. Das Product $\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha)$ dagegen erreicht seinen größten negativen Werth, wenn seine beiden Factoren gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind, also wenn

$$\sin 2(\varphi - \alpha) = -\sin 2(\psi - \alpha)$$

ist; dieser Gleichung wird zunächst genügt durch

$$2(\varphi - \alpha) = -2(\psi - \alpha)$$

woraus sich

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$$

ergiebt; die Maxima liegen daher auch auf jener Hyperbel deren eine Asymptote $\sigma\sigma'$ (Fig. 4 Taf. I) den spitzen Winkel der Oscillationsrichtungen der Turmaline, und deren andere $\tau\tau'$ demnach den spitzen Winkel ihrer Polarisationsrichtungen halbirt. Die übrigen Werthe von α , welche noch außerdem der obigen Gleichung genügen, würden sämmtlich zu der nämlichen Hyperbel führen, welche wir die *Maximum-Hyperbel* nennen wollen. Aus dem, was oben über die Tangentenrichtung im Punkte A gelehrt worden ist, ergiebt sich leicht, *dafs die Maximum-Hyperbel im Pole A den Winkel der beiden Haupthyperbeln halbirt.*

Minima der Lichtstärke treten ein, wenn wiederum $\sin^2 \pi \vartheta = 1$ ist, dagegen $\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha)$ seinen grössten positiven Werth hat. Dazu ist aber nöthig, dafs

$$\sin 2(\varphi - \alpha) = \sin 2(\psi - \alpha)$$

werde; dies wird erreicht, wenn

$$2(\varphi - \alpha) = 180^\circ - 2(\psi - \alpha)$$

d. h.

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - 45^\circ$$

genommen wird. Die Intensitätsminima liegen demnach zwar auf den nämlichen schon oben gefundenen Lemniscaten (welche wir deswegen *Maximum- und Minimum-Lemniscaten* nennen), aber da, wo sie von einer Hyperbel getroffen werden, deren eine Asymptote $\chi\chi'$ (Fig. 4 Taf. I) den spitzen Winkel $\varrho O\varphi$ zwischen der Oscillationsrichtung des einen und der Polarisationsrichtung des andern der beiden Turmaline halbirt, so dafs ihre andere Asymptote $\omega\omega'$ den entsprechenden Winkel $\psi O\pi'$ halbiren mufs. Ausser dieser *Minimum-Hyperbel* giebt es, wie man sich leicht überzeugen kann, keine andere. Die Minimumhyperbel halbirt im Punkte A den Nebenwinkel desjenigen, welchen daselbst die beiden Haupthyperbeln einschliessen. Da die Asymptoten der Maximum- und der Minimumhyperbel einen Winkel von 45° mit einander bilden, *so müssen diese beiden Hyperbeln im Pole A stets zu einander senkrecht stehen.*

Die Maximum- und Minimumlemniscaten sind in Fig. 5 Taf. I punktirt angegeben. DD' stellt die Maximum-, EE'

die Minimum-Hyperbel vor; die Durchschnittspunkte der Hyperbel DD' mit jenen Lemniscaten sind die Punkte grösster, die Durchschnittspunkte der Hyperbel EE' mit denselben die Punkte kleinster Lichtstärke. Kehren wir zu unserem Gleichniß vom Lichtgebirge zurück, so projectiren sich in jenen Punkten die Gipfel der Lichtberge, in diesen aber die tiefsten Stellen der Lichtthäler.

Setzt man $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ und $\sin^2 \pi \vartheta = 1$ in den Ausdruck $\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 1(\psi - \alpha) \sin^2 \pi \vartheta$ ein, so wird derselbe $= -\sin^2(\varphi - \psi)$, und man findet die Intensitätsmaxima $= A^2$, d. h. gleich der vollen Lichtstärke, welche die parallelen Turmaline für sich durchlassen würden. Für $\sin^2 \pi \vartheta = 1$ und $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - 45^\circ$ aber wird jener Ausdruck $= +\cos^2(\varphi - \psi)$, und die Intensitätsminima ergeben sich gleich Null. Längs der Maximum-Hyperbel zeigt daher das Bild eine Reihe möglichst hell glänzender, längs der Minimum-Hyperbel dagegen eine Reihe vollkommen schwarzer Punkte. —

Bisher haben wir als Curven gleicher Intensität nur das System der Hauptlemniscaten sammt den beiden Haupthyperbeln kennen gelernt, für welche der Ausdruck $\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha) \sin^2 \pi \vartheta$ Null ist. Ausserdem haben aber noch alle jene Punkte unter sich die gleiche Lichtstärke, für welche dieser Ausdruck den nämlichen positiven oder negativen Werth erlangt. So lange derselbe negativ, aber $> -\sin^2(\varphi - \psi)$ bleibt, liefert er uns die zwischen den beiden Haupthyperbeln eingeschlossenen helleren Curven; die Intensitätscurven des dunkleren Raumes gehen aus ihm hervor, wenn derselbe positiv aber kleiner als $\cos^2(\varphi - \psi)$ ist.

Nehmen wir zunächst an, es sey

$$\sin 2(\varphi - \alpha) \sin(\psi - \alpha) \sin^2 \pi \vartheta = -K \quad (16)$$

wo unter $-K$ ein Werth verstanden wird, welcher der ersteren Bedingung genügt (es sey nämlich $K^2 > 0$, aber $< \sin^2(\varphi - \psi)$), so ist diese Gleichung diejenige der *helleren* Intensitätscurven. Setzt man für α einen bestimmten Werth $\varphi + \alpha'$ (wo $\alpha' > 0$, aber $< \varphi - \psi$ ist), welcher $\sin 2(\varphi - \alpha)$ $\sin 2(\psi - \alpha)$ negativ und $< -K^2$ macht, so entspricht die-

sem eine unserer Hyperbeln; gesetzt, es sey alsdann ϑ' ein Werth von ϑ , welcher für $\alpha = \psi + \alpha'$ die Gleichung (16) erfüllt, so wird dieselbe nothwendig auch für $\vartheta = m + \vartheta'$ und für $\vartheta = n - \vartheta'$ identisch, unter m und n beliebige positive ganze Zahlen verstanden. Es lassen sich daher (weil statt n auch $m + 1$ gesetzt werden kann) in jedem Felde $mnpq$ (Fig. 5 Taf. I) im Allgemeinen zwei Lemniscaten angeben, deren Durchschnittspunkte mit einer gegebenen Hyperbel die Intensität

$$J^2 = A^2 [\cos^2(\varphi - \psi) + k^2]$$

aufweisen. Diese beiden Lemniscaten differiren hinsichtlich ihres Gangunterschieds um gleichviel von den beiden Hauptlemniscaten ($\vartheta = m$ und $\vartheta = m + 1$), welche das Feld begrenzen. Den nämlichen Werth $-\sin 2(\varphi - \psi - \alpha') \sin 2\alpha'$, welchen $\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha)$ für $\alpha = \psi + \alpha'$ annimmt, erlangt dieser Ausdruck auch für $\alpha = \varphi - \alpha'$; es giebt daher aufer der zuerst angenommenen Hyperbel noch eine, welche mit den nämlichen beiden Lemniscaten Durchschnittspunkte von der Intensität J'^2 liefert; die Schwingungsrichtungen dieser zwei Hyperbeln weichen von denjenigen der Haupthyperbeln um gleichviel ab, diese Abweichungen bei beiden im Sinne der Annäherung an die Oscillationsrichtung der Maximumhyperbel verstanden. Nur für diejenigen beiden Hyperbeln, welche bereits

$$\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha) = -K^2 \quad (17)$$

machen, erhält man in jedem Felde nur eine Lemniscate, nämlich die dasselbe durchsetzende Maximum- und Minimum-Lemniscate, weil für diese $\sin^2 \pi \vartheta = 1$ ist. Wäre aber

$$\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha) > -K^2$$

so kann durch keinen Werth von ϑ mehr der Gleichung (16) genügt werden. Wir erschen daraus, daß alle Curven von der Intensität J'^2 zwischen den beiden Hyperbeln, welche der Gleichung (17) genügen, eingeschlossen sind, und von ihnen in den Punkten berührt werden, wo sie den Maximum- und Minimum-Lemniscaten begegnen. (Siehe Fig. 5 Taf. I FF' und GG').

Setzt man $\alpha' = \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$, so fallen die beiden Werthe

$\varphi - \alpha'$ und $\psi + \alpha'$ in den einzigen $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ zusammen; statt der obigen zwei Hyperbeln ($\alpha = \psi + \alpha'$ und $\alpha = \varphi - \alpha'$) erhält man jetzt nur noch eine einzige, nämlich die Maximumhyperbel, für welche der Ausdruck $\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha)$ seinen größten negativen Werth $-\sin^2(\varphi - \psi)$ erlangt. Auf der Maximumhyperbel muß daher $\sin^2 \pi \vartheta$ seinen kleinsten Werth erreichen, nämlich denjenigen, welcher der Gleichung

$$\sin^2(\varphi - \psi) \sin^2 \pi \vartheta = K^2 \quad (18)$$

genügt. Für Werthe von ϑ , welche $\sin^2 \pi \vartheta$ noch kleiner machen, giebt es alsdann keine Punkte mehr von der verlangten Intensität J'' , und man sieht, daß innerhalb eines Feldes zwei von den begrenzenden Hauptlemniscaten um den gleichen Gangunterschied abweichende Lemniscaten je eine Curve gleicher Intensität zwischen sich schließen, und dieselbe in den beiden Punkten berühren, wo sie mit der Maximumhyperbel zusammentreffen.

Es ist klar, daß für die *dunkleren* Intensitätscurven, welche den positiven Werthen von $\sin 2(\varphi - \alpha) \sin 2(\psi - \alpha)$ entsprechen, die Discussion in gleicher Weise geführt werden kann und daß sich das Resultat von dem oben ausgesprochenen nur dadurch unterscheiden wird, daß in demselben »Minimum-« statt »Maximum-Hyperbel« zu setzen ist.

Die Curven gleicher Intensität (die Horizontalcurven unseres Lichtgebirges) *schlingen sich demnach innerhalb eines jeden Feldes als geschlossene Curven um die Maxima oder Minima herum.* —

Es erübrigt jetzt nur noch über die Construction der Fig. 5. Taf. I, noch dasjenige nachzutragen, was nicht unmittelbar aus der vorhergehenden Discussion zu entnehmen ist. Diese Figur stellt die Erscheinung dar, welche eine Salpeterplatte von 1^{mm} Dicke im homogen gelben Lichte der Kochsalzflamme (Fraunhofer'sche Linie D) zeigt, wenn die Schwingungsrichtungen der beiden Turmaline einen Winkel von 45° mit einander bilden. Setzt man die optischen Constanten des Salpeters, nämlich $a = 0,6643$, $b = 0,6646$, $c = 0,7502$, in die Formel (6), so findet man

p^2 proportional der Zahl 0,009465, während gleichzeitig $q = 0,1622$ sich ergibt. Da ferner $d = 1^{\text{mm}}$ und $\lambda = 0^{\text{mm}},000588$ beträgt, so findet sich $\frac{\lambda}{dq} = 0,00363$. Mittelst dieser Werthe wurden sodann einzelne Coordinatenwerthe sowohl der Haupt- als auch der Maximum- und Minimum-Lemniscaten aus den Formeln des §. 2 berechnet, nachdem dieselben zuvor so eingerichtet worden waren, daß sie $p = 5$ (Centimeter) und alle übrigen Längen in demselben Verhältniß vergrößert ergaben. Mit Hülfe der berechneten Punkte konnten sodann die genannten zwei Lemniscatensysteme leicht entworfen werden.

Es wurden dann ferner $\varphi = 75^\circ$, $\psi = 30^\circ$, also $\varphi - \psi = 45^\circ$ angenommen; für die beiden Haupthyperbeln BB' und CC' wurden daraus die Axenrichtungen $\beta = 30^\circ$ und $\beta = -15^\circ$ mit den zugehörigen Halbaxen $r = 3,53$ und $r = 4,65$ gefunden. Der Maximumhyperbel DD' entspricht als Asymptotenrichtung der Werth $\alpha = 52\frac{1}{2}^\circ$, die Axenrichtung $\beta = 7\frac{1}{2}^\circ$, die Halbaxe $r = 4,91$, während der zu ihr senkrechten Minimumhyperbel EE' die Werthe $\alpha = 7\frac{1}{2}^\circ$, $\beta = -37\frac{1}{2}^\circ$, $r = 2,54$ zukommen.

Die Intensität der Maxima ist A^2 , diejenige der Minima Null, die Haupthyperbeln und Hauptlemniscaten besitzen die Lichtstärke $\frac{1}{2}A^2$. Es wurden nun noch diejenigen Intensitätscurven angegeben, welchen die Lichtstärke $\frac{3}{4}A^2$ und $\frac{1}{4}A^2$ zukommt. Von jeder dieser Curven wurden zunächst vier Punkte bestimmt, nämlich erstlich diejenigen beiden, welche auf der Maximum- oder Minimumhyperbel liegen, und dann noch die auf den Maximum- und Minimumlemniscaten gelegenen. Die letzteren erhält man sämtlich auf einmal, wenn man die vier Hyperbeln construirt, welche aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin 2(75^\circ - \alpha) \sin 2(30^\circ - \alpha) &= -\frac{1}{4} \\ \text{und } \sin 2(75^\circ - \alpha) \sin 2(30^\circ - \alpha) &= +\frac{1}{4} \end{aligned}$$

hervorgehen, als Durchschnittspunkte dieser Hyperbeln mit jenen Lemniscaten. Diese Hyperbeln sind für den helleren Raum FF' ($\alpha = 67\frac{1}{2}^\circ$, $\beta = 22\frac{1}{2}^\circ$, $r = 4,20$) und GG'

($\alpha = 37\frac{1}{2}^\circ$, $\beta = -7\frac{1}{2}^\circ$, $r = 4,91$), für den dunkleren Raum dagegen HH' ($\alpha = 22\frac{1}{2}^\circ$, $\beta = -22\frac{1}{2}^\circ$, $r = 4,20$) und JJ' ($\alpha = 82\frac{1}{2}^\circ$, $\beta = 37\frac{1}{2}^\circ$, $r = 2,54$). Man erkennt aus diesen Werthen, daß die Hyperbeln FF' und HH' die gleiche Halbaxe haben und im Punkte A auf einander senkrecht stehen; auch GG' und JJ' stehen auf einander senkrecht, hinsichtlich der Größe ihrer Halbaxe stimmt aber die erstere mit der Maximumhyperbel DD' , die letztere mit der Maximumhyperbel EE' überein. Nachdem nun auch noch die auf der x -Axe und y -Axe gelegenen Punkte der Intensitätscurven bestimmt waren, konnten dieselben leicht aus freier Hand entworfen werden; dabei wurden die helleren Curven (Lichtstärke $\frac{3}{4}A^2$) nur leicht, die dunkleren aber (Lichtstärke $\frac{1}{4}A^2$) stark ausgezogen. Unter den letzteren ist besonders merkwürdig die in der Mitte des Bildes befindliche, welche den Mittelpunkt O und zwei Minima umschlingt.

Fig. 1 Taf. II zeigt einen Durchschnitt des Lichtgebirges längs der x -Axe AOA' ; Fig. 2 Taf. II einen Durchschnitt längs der y -Axe; diese beiden Profile lassen die sattelförmige Gestaltung der Intensitätsoberfläche im Punkte O erkennen.

Endlich zeigt Fig. 3 Taf. II ein Profil des Lichtgebirges längs einer der Maximum- und Minimum-Lemniscaten $tuvwz$, welche dabei gerade gestreckt gedacht wurde.

In Fig. 6 Taf. I ist die Zeichnung Fig. 5 Taf. I nochmals in halber Größe ausgeführt, und durch Schattirung die ungefähre Theilung der Lichtstärke angegeben. —

Aus der ganzen hier gegebenen Darstellung erhellt, daß die Berechnung und Discussion des allgemeinsten Falles der Erscheinung, bei beliebiger Stellung der Turmaline zu einander und zum Krystall, keineswegs größere Schwierigkeiten darbietet, als der gewöhnlich in den Lehrbüchern allein behandelte specielle Fall der rechtwinklig gekreuzten Turmaline. Bei gekreuzten Turmalinen coincidiren die beiden Haupthyperbeln, welche nebst den Hauptlemniscaten vollkommen schwarz erscheinen; die Intensitätsmaxima liegen dann

immer auf der Hyperbel, welche im Pole auf der schwarzen Hyperbel senkrecht steht. Fallen die Oscillationsrichtungen der Turmaline mit den Coordinatenaxen zusammen, so erscheinen diese selbst schwarz, und die Maxima reihen sich entlang jener Hyperbel, deren Asymptoten von der Abscissenlinie beiderseits um 45° abweichen und deren Halbachse $= p$ ist. Wenn dagegen die Schwingungsrichtungen der Turmaline zu beiden Seiten um 45° von der Ebene der optischen Axen absteigen, so erscheint umgekehrt die eben genannte Hyperbel vollkommen dunkel, während die Maxima auf die beiden Coordinatenaxen fallen.

Auch die Interferenzerscheinungen der einaxigen, senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Krystallplatten sind für $b = a$, also $p = 0$, in unsern Formeln enthalten; nur zieht sich jetzt jede Hyperbel auf ihre Asymptoten, d. h. auf zwei zu einander senkrechte, durch den Anfangspunkt gehende, gerade Linien, und jede Lemniscate auf einen um diesen Punkt beschriebenen Kreis zurück. —

VII. Ueber das Schillern gewisser Krystalle; von E. Reusch.

(Fortsetzung des Aufsatzes in Bd. CXVIII. S. 256)

V. Der schillernde Labrador.

§. 22.

An jedem nur einigermaßen homogenen Stück Labrador lassen sich zwei Blätterbrüche nachweisen; der erste *P* ist der leichtere und glasglänzend, der zweite *M* ist schwieriger herzustellen, er zeigt die bekannten Schillerfarben, oder nach Hessels Sprachweise, die Farbenwandlung. Dafs jedoch das Schillern kein wesentliches Attribut dieses Blätterbruchs ist, erkennt man einerseits daran, dafs der Schil-