Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries.

Par

N. Sonine,
professeur de l'Université à Varsovie.

Ces recherches sont divisées en six sections.

La première est consacrée à l'étude des conséquences auxquelles conduit la propriété récurrente des fonctions cylindriques exprimée par la relation

$$(2) \qquad S_{n+1}(x) + 2\frac{dS_n(x)}{dx} - S_{n-1}(x) = 0 .$$

Comme résultat final on obtient le développement d'une fonction $S_0(\alpha + x)$ en série de la forme

$$(22) \qquad S_0(\alpha + x) = J^0(\alpha) \cdot S_0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n J^n(\alpha) \cdot S_n(x) .$$

Dans la seconde section j'adjoigne à la propriété (2) cette autre

$$(40) \qquad n S_n(x) = \frac{x}{2}\left[S_{n-1}(x) + S_{n+1}(x)\right]$$

et je considére les intégrales définies d'une forme nouvelle qui possédent ces deux propriétés caractéristiques des fonctions cylindriques et qui s'expriment linéairement par ces fonctions.

La troisième section est consacrée à l'évaluation des intégrales indéfinies contenant les fonctions cylindriques. Le sujet a été traité récemment par M. Lommel, mais à l'aide d'une méthode peu directe et générale.

Dans la quatrième section j'étudie les intégrales définies contenant les fonctions cylindriques. J'y déduit une formule très-générale et, je crois, très-importante, à savoir

$$\omega_3 = \int_0^\infty J^m(bx) \cdot x^{m+1} \cdot \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\, dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{b^m}{a^n}\left(\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} J^{n-m-1}\left(z\sqrt{a^2-b^2}\right), & a > b, \\ 0, \quad a < b; \quad n > m > -1, \end{cases}$$

et j'en fais plusieurs applications; par exemple, au No. 47. j'en obtient la généralisation d'une formule célèbre d'Abel.

Une formule de M. H. Weber, reproduite au No. 39., me conduit au développement d'une fonction continue pour chaque valeur réelle positive de la variable en série procédant suivant les polynomes entiers d'une forme déterminée.

A la fin de la section se trouve une expression très-élégante de la fonction cylindrique de seconde espèce $Y^0(\varkappa)$, à savoir

$$Y^0(\varkappa) = -2\int_0^\infty J^0(x)\frac{\cos(x+\varkappa)}{x+\varkappa}\,dx = -2\int_0^\infty \frac{J^0(x)\,dx}{x+\varkappa} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varkappa\cos\varphi)\,d\varphi.$$

La cinquième section traite de l'équation différentielle de Bessel dont on n'a fait aucune mention dans les quatre sections précédentes. J'y considére la forme symbolique de la solution, donnée par M. Hargreave, et je fais voir sur cet exemple particulier de quelle utilité peut être souvent la forme symbolique lors même qu'elle n'a pas d'interprétation directe. Je me permet de remarquer que c'est par la considération de la forme symbolique de la fonction $Y^0(\varkappa)$ que j'ai trouvé son expression qu'on vient d'écrire.

Enfin dans la sixième section je présente la généralisation des considérations développées dans la première section et j'en fais une application, en me réservant de traiter ce sujet à fond dans un mémoire special.

I.

Nouvelle origine des fonctions cylindriques.

1. Concevons une série de fonctions d'une variable indépendante x

$$S_0(x),\ S_1(x),\ S_2(x),\ \cdots S_n(x),\ \cdots \tag{1}$$

qui soient liées entre elles par une relation récurrente

$$S_{n+1} + 2\frac{dS_n}{dx} - S_{n-1} = 0 \tag{2}$$

et la condition

$$S_1 = -\frac{dS_0}{dx}. \tag{3}$$

Partant de cette définition on peut exprimer tous les termes de la série (1) au moyen du premier, qui reste complètement arbitraire, et de ses dérivées de divers ordres.

En effet en désignant le symbole $\frac{d}{dx}$ par D on peut écrire les équations (2) et (3) comme il suit

$$S_{n+1} + 2DS_n - S_{n-1} = 0,\quad S_1 = -DS_0, \tag{4}$$

et si l'on considére maintenant D comme une constante, la relation récurrente ne sera qu'une équation linéaire aux différences finies dont la solution générale sera

$$(5)\qquad S_n = (-D+\sqrt{D^2+1})^n L + (-D-\sqrt{D^2+1})^n M,$$

L et M étant deux constantes (ou fonctions périodiques) par rapport à n.

Pour déterminer ces constantes on pose d'abord $n=0$ et l'on trouve

$$S_0 = L+M;$$

on pose ensuite $n=1$ et l'on obtient, conformément à la condition $S_1 = -DS_0$,

$$0 = L - M.$$

Donc

$$L = M = \frac{S_0}{2},$$

et la fonction S_n qui satisfait aux équations (4) sera

$$(6)\qquad S_n = \frac{(-D+\sqrt{D^2+1})^n + (-D-\sqrt{D^2+1})^n}{2} S_0.$$

Ce sera en même temps l'expression symbolique du terme général de la série (1), dont l'interprétation se trouve dans les deux formules suivantes:

n pair:

$$(7)\qquad S_n = S_0 + \frac{n^2}{1\cdot 2}\frac{d^2S_0}{dx^2} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^4S_0}{dx^4} + \cdots + \frac{n^2[n^2-2^2]\cdots[n^2-(n-2)^2]}{1\cdot 2\cdots n}\frac{d^nS_0}{dx^n};$$

n impair:

$$(8)\qquad S_n = -\left[\frac{n}{1}\frac{dS_0}{dx} + \frac{n(n^2-1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3S_0}{dx^3} + \cdots + \frac{n[n^2-1^2][n^2-3^2]\cdots[n^2-(n-2)^2]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\frac{d^nS_0}{dx^n}\right].$$

Si l'on introduit un nouveau symbole Δ, lié au symbole D par la relation

$$(9)\qquad D = i\cos\Delta,$$

on obtient une nouvelle formule symbolique très-utile

$$(10)\qquad S_n = (-i)^n \cos n\Delta \cdot S_0.$$

2. Soit maintenant $f(x)$ une fonction quelconque et proposons-nous de développer $f(\alpha+x)$ suivant les fonctions de la série (1) de sorte qu'on ait

$$(11)\qquad f(\alpha+x) = A_0(\alpha)\cdot S_0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n A_n(\alpha)\cdot S_n(x),$$

$A_0(\alpha)$, $A_1(\alpha)$, $\cdots A_n(\alpha)$, $\cdots$ étant une série de fonctions d'une seule variable α.

En différentiant ce développement par rapport à x on obtient

$$f'(\alpha+x) = A_0(\alpha)\frac{dS_0}{dx} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n A_n(\alpha)\frac{dS_n}{dx},$$

ou, en vertu des équations (2) et (3) et après une legère transformation,

$$(12)\quad f'(\alpha+x) = -A_1(\alpha)\cdot S_0 - \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n[A_{n+1}(\alpha) - A_{n-1}(\alpha)]S_n.$$

La différentiation de l'équation (11) par rapport à α fournit

$$(13)\qquad f'(\alpha+x) = \frac{dA_0}{d\alpha}S_0 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{dA_n}{d\alpha}\cdot S_n,$$

et si l'on compare maintenant les deux séries représentant la même fonction $f'(\alpha+x)$, on trouve

$$(14)\quad 0 = \left(A_1 + \frac{dA_0}{d\alpha}\right)S_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\left(A_{n+1} + 2\frac{dA_n}{d\alpha} - A_{n-1}\right)S_n.$$

C'est évidemment la condition pour que la série au second membre de l'équation (11) représente une fonction de la somme $\alpha + x$. Supposons qu'elle doit être remplie indépendamment de la forme particulière de la fonction $S_0(x)$. Cela conduit à admettre que les coefficients qui multiplient les fonctions $S_0, S_1, \cdots S_n$ s'évanouissent separément, c'est-à-dire qu'on a

$$(15)\qquad A_{n+1} + 2\frac{dA_n}{d\alpha} - A_{n-1} = 0,\quad A_1 = -\frac{dA_0}{d\alpha}.$$

On retrouve ainsi dans la série de fonctions $A_0, A_1, \cdots A_n, \cdots$ les mêmes propriétés caractéristiques dont jouit la série (1); donc, en désignant $\frac{d}{d\alpha}$ par D_1 et posant $D_1 = i\cos\Delta_1$ on obtient

$$(16)\qquad A_n(\alpha) = \frac{(-D_1+\sqrt{D_1^2+1})^n + (-D_1-\sqrt{D_1^2+1})^n}{2}A_0(\alpha)$$

$$= (-i)^n\cos n\Delta_1\cdot A_0(\alpha).$$

Quelles que soient les fonctions initiales $S_0(x)$, $A_0(\alpha)$, la série (11), si elle est convergente, représente toujours une fonction de la somme $\alpha + x$.

3. Soit $f(x) = S_0(x)$. Désignons pour ce cas spécial les fonctions $A_n(\alpha)$ par $J^n(\alpha)$, de sorte qu'on ait

$$(17)\qquad S_0(\alpha+x) = J^0(\alpha)\cdot S_0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n J^n(\alpha)\cdot S_n(x).$$

Tant que le theorème de Taylor est applicable à la fonction $S_0(\alpha+x)$, on peut l'écrire sous la forme symbolique suivante

$$(18)\qquad S_0(\alpha+x) = e^{\alpha D}\cdot S_0(x) = e^{\alpha i\cos\Delta}\cdot S_0(x);$$

de l'autre coté, l'équation (17), lors qu'on y introduit les expressions symboliques (10), fournit

$$(19)\qquad S_0(\alpha+x) = \left[J^0(\alpha) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} i^n J^n(\alpha)\cdot\cos n\Delta\right] S_0(x).$$

En égalant ces deux développements de la fonction $S_0(\alpha+x)$ on obtient

$$e^{\alpha i\cos\Delta}\cdot S_0(x) = \left[J^0(\alpha) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} i^n J^n(\alpha)\cdot\cos n\Delta\right]\cdot S_0(x),$$

et l'on en conclut

$$(20)\qquad e^{\alpha i\cos\Delta} = J^0(\alpha) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} i^n J^n(\alpha)\cdot\cos n\Delta.$$

On voit donc que les coefficients $J^n(\alpha)$ ne dépendent point du tout de la forme particulière de la fonction $S_0(x)$ et restent les mêmes quelle qu'elle soit; par conséquent on peut écrire

$$(21)\quad J^n(x) = \frac{(-D+\sqrt{D^2+1})^n + (-D-\sqrt{D^2+1})^n}{2} J^0(x) = (-i)^n\cos n\Delta\cdot J^0(x).$$

On voit de plus que notre fonction $J^n(x)$ coïncide parfaitement avec la fonction cylindrique de première espèce, que l'on définit au moyen du développement (20). On peut donc énoncer le théorème suivant:

Tant qu'il est possible le développement de la fonction $S_0(\alpha+x)$ suivant les puissances entières positives de α, a lieu aussi le développement suivant les fonctions cylindriques $J^n(\alpha)$ selon la formule

$$(22)\qquad S_0(\alpha+x) = J^0(\alpha)\cdot S_0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n J^n(\alpha)\cdot S_n(x).$$

Pour $x=0$ on obtient ce corollaire:

La fonction $S_0(\alpha)$, développable suivant la formule de **Maclaurin**, *l'est aussi selon la formule*

$$(23)\qquad S_0(\alpha) = S_0(0)\cdot J^0(\alpha) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n S_n(0)\cdot J^n(\alpha).$$

4. La formule (20) fournit, comme on sait, l'expression suivante de la fonction $J^n(\alpha)$

$$(24)\qquad J^n(\alpha) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^\pi e^{\alpha i\cos\Delta}\cos n\Delta\cdot d\Delta.$$

Mais on peut en tirer une autre expression remarquable de la même fonction. A cet effet remarquons que l'égalité (20) a lieu pour chaque valeur réelle (et même imaginaire) de Δ. En la multipliant par $\frac{\sin(p-\vartheta)\Delta}{\Delta}d\Delta$, où p est un nombre entier positif, ϑ une fraction positive, et l'intégrant entre les limites 0 et ∞, on obtient

$$\int_0^\infty e^{\alpha i\cos\Delta}\frac{\sin(p-\vartheta)\Delta}{\Delta}d\Delta = J^0(\alpha)\int_0^\infty\frac{\sin(p-\vartheta)\Delta}{\Delta}d\Delta$$

$$+2\sum_{n=1}^{n=\infty}i^nJ^n(\alpha)\int_0^\infty\frac{\cos n\Delta\cdot\sin(p-\vartheta)\Delta}{\Delta}d\Delta.$$

Mais toutes les intégrales au second membre sont connues, à savoir

$$\int_0^\infty\frac{\sin(p-\vartheta)\Delta}{\Delta}d\Delta=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty\frac{\cos n\Delta\cdot\sin(p-\vartheta)\Delta}{\Delta}d\Delta=\begin{cases}0, & \text{lorsque } n>p-1,\\ \frac{\pi}{4}, & \quad ,, \quad n=p-1,\quad \vartheta=1,\\ \frac{\pi}{2}, & \quad ,, \quad n<p.\end{cases}$$

On en conclut

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{\alpha i\cos\Delta}\frac{\sin(p-\vartheta)\Delta}{\Delta}d\Delta=J^0(\alpha)+2\sum_{n=1}^{n=p-1}i^nJ^n(\alpha),$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{\alpha i\cos\Delta}\frac{\sin(p-1)\Delta}{\Delta}d\Delta=J^0(\alpha)+2\sum_{n=1}^{n=p-2}i^nJ^n(\alpha)+i^{p-1}J^{p-1}(\alpha).$$

Si l'on remplace p par $p+1$ et que l'on retranche des résultats les formules primitives, on obtient, en remarquant que la fraction $1-\vartheta$, dont le second membre ne dépend en aucune manière, peut être remplacée simplement par ϑ,

$$(25)\quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{\alpha i\cos\Delta}\frac{\sin\vartheta\Delta}{\Delta}\cos p\Delta\, d\Delta=i^pJ^p(\alpha),\quad 0<\vartheta<1,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{\alpha i\cos\Delta}\frac{\sin p\Delta-\sin(p-1)\Delta}{\Delta}d\Delta=i^pJ^p(\alpha)+i^{p-1}J^{p-1}(\alpha).$$

5. La formule (23) nous fournit immédiatement le développement d'une fonction $S_0(\alpha)$, synectique autour du point $\alpha=0$, suivant les fonctions cylindriques $J^n(\alpha)$. Les développements de ce genre ont

été considérés par M. Ch. Neumann qui les déduit par l'intermédiaire d'un développement auxiliaire, celui de la fraction $\frac{1}{x-\alpha}$. Ce développement auxiliaire, devenu à présent inutile, peut être obtenu très-aisément au moyen de notre formule (22), lorsqu'on y substitue $-\alpha$ au lieu de α et que l'on admet $S_0(x) = \frac{1}{x}$. Alors, en remarquant que $J^n(-\alpha) = (-1)^n J^n(\alpha)$, on trouve

$$(26) \qquad \frac{1}{x-\alpha} = J^0(\alpha) \cdot S_0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} J^n(\alpha) \cdot S_n(x),$$

où

$$(27) \qquad S_n(x) = \frac{(-D+\sqrt{D^2+1})^n + (-D-\sqrt{D^2+1})^n}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

La fonction (27) n'est autre que celle que M. Neumann a désignée par $O^n(x)$. Pour passer de sa forme symbolique à la forme effective on peut appliquer les formules (7) et (8) ou mieux encore procéder de la manière suivante. Pour chaque valeur de x différente de zéro on peut écrire

$$(28) \qquad \frac{1}{x} = \int_0^{\infty\cdot\beta} e^{-xt}\,dt,$$

β étant une constante telle que la partie réelle de $x\beta > 0$. En vertu de cette formule on trouve sans peine

$$O^n(x) = \int_0^{\infty\beta} e^{-xt} \frac{(t+\sqrt{t^2+1})^n + (t-\sqrt{t^2+1})^n}{2}\,dt,$$

ou, en introduisant la nouvelle variable $\omega = tx$,

$$(29) \qquad O^n(x) = \int_0^{\infty\cdot x\beta} \frac{(\omega+\sqrt{\omega^2+x^2})^n + (\omega-\sqrt{\omega^2+x^2})^n}{2x^{n+1}}\, e^{-\omega}\, d\omega.$$

En vertu de la condition imposée à la constante β rien n'empêche de remplacer la limite supérieure simplement par ∞ et l'on obtient ainsi une formule communiquée sans démonstration par M. Neumann. (Theorie der Bessel'schen Functionen, p. 16.)

6. Si l'on substitue $-n$ au lieu de n dans les formules (6) et (10) on obtient

$$(30) \qquad S_{-n}(x) = (-1)^n S_n(x).$$

D'après cela on peut écrire au lieu de (22)

$$(31) \quad S_0(\alpha+x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n J^n(\alpha) \cdot S_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} J^{-n}(\alpha) \cdot S_n(x).$$

Effectuons sur les deux membres l'opération $(-i)^p \cos p\Delta$. En remarquant que d'après la définition de la fonction $S_n(x)$ on a

$$(-i)^p \cos p\Delta \cdot S_n = (-i)^{p+n} \cos p\Delta \cdot \cos n\Delta \cdot S_0$$
$$= \frac{1}{2} \left\{(-i)^{p+n} \cos (p+n)\Delta + (-1)^n (-i)^{p-n} \cos (p-n)\Delta\right\} S_0$$
$$= \frac{1}{2} \left\{S_{p+n} + (-1)^n S_{p-n}\right\},$$

on obtient

$$(32) \qquad S_p(\alpha+x) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} J^{-n}(\alpha) \left\{S_{p+n} + (-1)^n S_{p-n}\right\}$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} J^n(\alpha) \cdot S_{p-n}(x) \cdot$$

On retrouve de là comme cas particuliers les développements de $J^p(\alpha+x)$, $O^p(\alpha+x)$, donnés par M. M. Lommel (Studien über die Bessel'schen Functionen § 10.) et Schläfli (Math. Annalen, t. III., p. 138).

7. Nous avons déterminé la fonction $A_0(\alpha)$ pour le cas spécial $f(x) = S_0(x)$. Revenons maintenant à l'équation générale (11).

Supposons que la fonction $S_n(x)$ soit synectique dans un cercle décrit du point $x = 0$ comme centre; les fonctions $S_1 \cdots S_n \cdots$ seront aussi synectiques dans l'intérieur du même cercle.

Pour $x = 0$ on obtient de la formule (11)

$$(33) \qquad f(\alpha) = S_0(0) \cdot A_0(\alpha) + 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^n S_n(0) A_n(\alpha),$$

ou sous la forme symbolique

$$(33') \qquad f(\alpha) = \left[S_0(0) + 2 \sum_{1}^{\infty} i^n S_n(0) \cos n\Delta_1\right] A_0(\alpha).$$

Telle est la dépendance entre les fonctions $f(\alpha)$, $A_0(\alpha)$. Pour qu'elle ne soit pas illusoire, il faut admettre que la série périodique entre parenthèses est convergente pour chaque valeur de Δ_1. Cela admis, désignons la somme de la série par $F(i \cos \Delta_1)$. On voit que cette série s'obtient du développement (23) de la fonction $S_0(\alpha)$ suivant les fonctions cylindriques, lorsqu'on y remplace $J^n(\alpha)$ par $(-i)^n \cos n\Delta_1$. Cela permet d'établir une simple dépendance entre les fonctions $S_0(\alpha)$ et $F(z)$. En effet si l'on remplace dans la formule (23) les fonctions cylindriques $J_n(\alpha)$ par leurs expressions intégrales (24) on trouve

$$(34) \qquad S_0(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\alpha i \cos \varphi} F(i \cos \varphi)\, d\varphi,$$

ou encore

(35) $$S_0(\alpha) = F(D_1) \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\alpha i \cos\varphi}\, d\varphi = F(D_1) \cdot J^0(\alpha).$$

On en conclut aisément

(36) $$S_n(\alpha) = F(D_1) \cdot J^n(\alpha).$$

Enfin l'équation (33') se transforme en celle-ci

(37) $$f(\alpha) = F(D_1) \cdot A_0(\alpha).$$

La formule (36) montre que la série de fonctions $S_0, S_1 \cdots S_n, \cdots$ propres à servir au développement d'une fonction $f(\alpha + x)$ suivant la formule (11) s'obtient de la série des fonctions cylindriques $J^0(x)$, $J'(x), \cdots, J^n(x), \cdots$ lorsqu'on applique à tous ses termes la même opération $F(D)$.

La formule (37), contenant trois fonctions $f(\alpha)$, $A_0(\alpha)$, $F(D_1)$, permet de déterminer l'une d'elles lorsque les deux autres sont données; toutefois il est nécessaire que la fonction $F(D_1)$ soit développable en une série suivant les puissances entières positives de D_1. Si l'on sait déterminer la fonction $F(D_1)$ correspondante à des fonctions données $f(\alpha)$, $A_0(\alpha)$, on obtient en vertu de la formule (33) le développement de $f(\alpha)$ suivant les fonctions $A_0(\alpha)$, $A_1(\alpha) \cdots A_n(\alpha) \cdots$

Si l'on admet en particulier $A_0(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, la formule (33) servira au développement d'une fonction $f(\alpha)$ suivant les fonctions de M. Neumann $O^0(\alpha)$, $O^1(\alpha)$, $\cdots O^n(\alpha) \cdots$ Remarquons en passant que ce problème se rattache intimément à celui des fonctions génératrices d'Abel. En effet si l'on représente $\frac{1}{\alpha}$ par l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty\beta} e^{-\alpha t}\, dt,$$

on aura

$$f(\alpha) = \int_0^{\infty\beta} e^{-\alpha t} \cdot F(-t)\, dt;$$

la fonction $F(-t)$ est precisément la fonction génératrice.

II.

Nouvelles expressions intégrales des fonctions cylindriques.

8. Nous avons trouvé l'expression la plus générale de la fonction S_n considérée comme terme général d'une certaine série. Cette expression (6) a été obtenue et a lieu seulement à condition que n soit

un nombre entier. Dans le cas général, où n n'a pas cette signification restreinte, la formule (5) doit être considérée comme l'expression symbolique la plus générale de la fonction S_n de deux variables x, n, satisfaisant à l'équation (2); mais l'interprétation de la forme symbolique est si difficile que sa connaisance ne dispense en aucune manière de la recherche de la forme effective de la fonction S_n. Cette recherche peut être accomplie avec succès de la manière suivante.

Posons

$$S_n = \int_a^b \Phi(t, x) \cdot \frac{dt}{t^{n+1}},$$

où a, b désignent deux constantes absolues, $\Phi(t, x)$ une fonction inconnue de t, x. Substituant cette expression dans l'équation (2) on trouve

$$\int_a^b \left[\left(\frac{1}{t} - t\right) \Phi(t, x) + 2\,\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x}\right] \frac{dt}{t^{n+1}} = 0,$$

et comme cette équation doit avoir lieu pour chaque valeur de n, on en conclut que la fonction Φ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\left(\frac{1}{t} - t\right) \Phi(t, x) + 2\,\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} = 0,$$

qui donne après l'intégration

$$\Phi(t, x) = e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} \psi(t).$$

Donc, quelles que soient les constantes a, b et la fonction $\psi(t)$, l'expression

$$(38) \qquad S_n = \int_a^b e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} \psi(t) \cdot \frac{dt}{t^{n+1}}$$

satisfait à l'équation (2).

Pour que cette expression satisfasse aussi à la condition (3) il faut admettre

$$\int_a^b e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} \psi(t)\, \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2} \int_a^b e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} \psi(t) \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt,$$

ce qui peut s'écrire

$$(39) \qquad \int_a^b \psi(t) \cdot d e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = 0.$$

9. L'expression (38) contient deux constantes et une fonction arbitraire et ces quantités ne sont liées que par une seule condition (39), qui ne peut assurément servir à la détermination de la fonction $\psi(t)$. Du choix de cette fonction dépendent essentiellement les propriétés de la fonction S_n et inversement on peut se proposer de trouver une fonction $\psi(t)$ telle que la fonction S_n posséde une propriété donnée. Supposons que la fonction S_n doit avoir la seconde propriété récurrente exprimée par l'équation

$$(40) \qquad n S_n(x) = \frac{x}{2}\left[S_{n-1}(x) + S_{n+1}(x)\right].$$

On s'assure que cette propriété, pour n entier, appartient à la fonction cylindrique $J^n(x)$, ce qui permet d'en généraliser la conception et d'appeler fonction cylindrique chaque fonction S_n qui satisfait aux équations (2) et (40) quel que soit le nombre n.

En substituant l'expression (38) dans la formule (40) on obtient

$$(41) \qquad \int_a^b \psi(t)\cdot d\left(e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\cdot t^{-n}\right) = 0,$$

et comme cette condition doit avoir lieu quel que soit le nombre n, on en conclut qu'on aura aussi, $\sigma(t)$ étant une fonction arbitraire,

$$\int_a^b \psi(t)\cdot d\left(e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,\sigma(t)\right) = 0,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\Big|_a^b\, e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\psi(t)\cdot\sigma(t) - \int_a^b e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,\sigma(t)\cdot\psi'(t)\,dt = 0.$$

Cette équation donne $\psi'(t) = 0$ et par conséquent $\psi(t) =$ constante arbitraire, que nous supposerons égale à $\frac{1}{2\pi i}\cdot$ La condition (41) devient après cela

$$(42) \qquad \Big|_a^b\, e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\cdot t^{-n} = 0.$$

10. Avant d'aller plus loin il est bon de faire quelques conventions qui abrégeraient le langage.

Nous désignerons dès lors la partie réelle d'une quantité complexe t par $R(t)$ et le coefficient de i dans la partie imaginaire par $J(t)$, de sorte qu'on aura toujours

$$t = R(t) + iJ(t).$$

En représentant, conformément à l'usage général, la quantité complexe t par un point du plan, nous nommerons *vecteur* t la droite qui joint l'origine au point t, *ligne* t le prolongement de cette droite au delà du point t à l'infini.

L'intégrale d'une fonction $f(z)$ prise le long du vecteur t dans la direction de O à t sera désignée simplement par $\int^{t} f(z)\,dz$, et l'intégrale prise le long de la ligne t par $\int_{t} f(z)\,dz$.

Log t sera toujours reputé réel pour t réel positif. Enfin $t^n = e^{n \lg t}$. Reprenons maintenant notre sujet.

11. En désignant par α, β deux constantes telles que $R(x\alpha) < 0$, $R(x\beta) < 0$, on voit que la condition (42) fournit quatre systèmes de valeurs pour les limites a, b, à savoir

$$\left.\begin{array}{lll} 1^0. & a = \infty \cdot \alpha, & b = \infty \cdot \beta, \\ 2^0. & a = -\frac{0}{\alpha}, & b = -\frac{0}{\beta}, \\ 3^0. & a = -\frac{0}{\alpha}, & b = \infty \cdot \beta, \end{array}\right\} n \text{ arbitraire}$$

$$4^0. \quad J(xa) = \pm\infty, \qquad J(xb) = \pm\infty, \qquad R(n) > 0.$$

Conformément à cela on obtient quatre solutions particulières du système de deux équations (2) et (40), à savoir

$$(43) \quad \left\{\begin{aligned} S'_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\cdot\alpha}^{\infty\cdot\beta} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^{n+1}}, \\ S''_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{0}{\alpha}}^{-\frac{0}{\beta}} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^{n+1}}, \\ S'''_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{0}{\alpha}}^{\infty\cdot\beta} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^{n+1}}, \\ S^{\mathrm{IV}}_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{x\pm\infty i}{x}}^{\frac{c\pm\infty i}{x}} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^{n+1}}, \quad R(n) > 0. \end{aligned}\right.$$

Etudions ces solutions, en commençant par S'_n.

12. Avant tout il faut choisir convenablement le chemin d'intégration. Si on le suppose sans noeuds et que l'on joigne les points-limites $\infty\,\alpha$, $\infty\cdot\beta$ par une ligne à l'infini telle que pour tous ses points $R(xt) = -\infty$, on doit admettre que le point $t=0$ se trouve dans l'intérieur du contour fermé ainsi obtenu; dans le cas contraire l'intégrale serait évidemment nulle.

Développons maintenant la fonction S_n' en une série potentielle. L'expression (43) est peu commode pour ce but; c'est pourquoi nous la transformons en introduisant une nouvelle variable d'intégration $u = \frac{tx}{2}$, ce qui donnera

$$(44)\qquad S_n' = \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\cdot\alpha'}^{\infty\cdot\beta'} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\,\frac{du}{u^{n+1}},\quad R(\alpha')<0,\quad R(\beta')<0.$$

Si l'on développe maintenant la fonction $e^{-\frac{x^2}{4u}}$ en série et que l'on se rappelle la formule connue

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\cdot\alpha'}^{\infty\cdot\beta'} e^u\,\frac{du}{u^{n+p+1}} = \frac{1}{\Pi(n+p)},$$

on obtient

$$(45)\qquad S_n' = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{\Pi p\cdot\Pi(n+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}.$$

C'est precisément la série que Hankel a prise comme définition de *la fonction cylindrique de première espèce* pour n quelconque et que l'on désigne par $J^n(x)$. Ainsi $S_n' = J^n(x)$ et nous emploierons désormais la notation $J^n(x)$ au lieu de S_n'.

Posant $t = \frac{xv}{2}$ dans l'intégrale (43) on trouve encore une forme intégrale pour la fonction $J^n(x)$, à savoir

$$(46)\ J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\cdot\alpha''}^{\infty\cdot\beta''} e^{\frac{x^2 v}{4}-\frac{1}{v}}\,\frac{dv}{v^{n+1}},\ R(x^2\alpha'')<0,\ R(x^2\beta'')<0.$$

Ces trois formes intégrales peuvent être considérées comme expressions immédiates des trois propriétés récurrentes des fonctions cylindriques, à savoir (2) et des deux suivantes

$$\left.\begin{aligned} &(47)\qquad J^{n+p}(x) = (-2)^p\, x^{n+p}\,\frac{d^p x^{-n} J^n(x)}{(dx^2)^p},\\ &(48)\qquad J^{n-p}(x) = 2^p\, x^{-n+p}\,\frac{d^p x^n J^n(x)}{(dx^2)^p}.\end{aligned}\right\}\ p \text{ entier}$$

Remarquons encore que lorsque n est un nombre entier les trois intégrales (43), (44), (46) se réduisent à de simples intégrales fermées prises autour de l'origine le long d'un contour quelconque. On conclut de là

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} J^p(x) \cdot t^p \,.$$

Ce développement a été pris par M. Schlömilch pour définition des fonctions cylindriques. Il conduit très-simplement à cette conclusion que $J^{-p}(x) = (-1)^p \cdot J^p(x)$.

13. Soit $\alpha = \beta = e^{\psi i}$ et supposons que le chemin de l'intégrale (43) se compose d'un cercle de rayon 1 décrit de l'origine et d'une double ligne $e^{\psi i}$. On aura pour $R(xe^{\psi i}) < 0$

$$2\pi i\, J^n(x) = -\, e^{2n\pi i} \int_{e^{\psi i}} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^{n+1}} + \int_{\psi-2\pi}^{\psi} e^{\frac{x}{2}\left(e^{\varphi}-e^{-\varphi}\right)-n\varphi}\, i\, d\varphi$$
$$+ \int_{e^{\psi i}} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^{n+1}} \,,$$

ou, en posant dans la première et la troisième intégrale $t = e^{\Theta} \cdot e^{\psi i}$, dans la seconde $\varphi = \psi - \pi + \sigma$ et la réduisant aux limites 0 et π,

$$(49) \qquad J^n(x) = \frac{e^{n(\pi-\psi)i}}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} e^{-xi\sin\psi\cdot\cos\sigma} \cos(x\cos\psi\sin\sigma + n\sigma)\, d\sigma \right.$$
$$\left. - \sin n\pi \int_0^{\infty} e^{\frac{x}{2}\left(e^{\Theta+\psi i}-e^{-\Theta-\psi i}\right)-n\Theta}\, d\Theta \right\} .$$

Pour $\psi = \pi$ et par conséquent $R(x) > 0$ on obtient une formule donnée par M. Schläfli au tome I. des Annali di Matematica (p. 237) et reproduite au tome III. des Mathematische Annalen (p. 143). Pour $R(x) < 0$ on pourrait prendre $\psi = 0$; enfin pour des valeurs purement imaginaires de x on prendrait $\psi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

14. Soit maintenant $\alpha = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)i}$, $\beta = e^{\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)i}$ et supposons que le chemin de l'intégrale (43) se compose de deux lignes α, β et d'un arc de cercle, joignant les points α, β. Cette intégrale devient

$$2\pi i J^n(x) = -\int\limits_{\alpha} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^{n+1}} + i \int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} e^{xi\sin\varphi - n\varphi i}\, d\varphi$$

$$+ \int\limits_{\beta} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^{n+1}},$$

ou, en posant $t = \alpha \cdot u$ dans la première intégrale, $t = \beta u$ dans la troisième et réduisant la seconde aux limites 0 et $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$,

$$(50)\quad J^n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_1^{\infty} \left\{ \beta^{-n} e^{\frac{x}{2}\left(\beta u - \frac{1}{\beta u}\right)} - \alpha^{-n} e^{\frac{x}{2}\left(\alpha u - \frac{1}{\alpha u}\right)} \right\} \frac{du}{u^{n+1}}.$$

Cette formule a lieu tant que $R(x\alpha) < 0$, $R(x\beta) < 0$, comme cela est necéssaire pour la convergence de la seconde intégrale. Pour des valeurs réelles positives de x ces conditions se transforment en une seule $-\sin\varepsilon < 0$ qui sera satisfaite par chaque valeur de ε entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$. La seconde intégrale reste encore convergente et par conséquent la formule (50) vraie à la limite $\varepsilon = 0$, lorsqu'on suppose $R(n) > 0$. Ainsi pour les valeurs réelles positives de x et $R(n) > 0$ on aura

$$(51)\qquad J^n(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi \right.$$

$$\left. + \int\limits_1^{\infty} \sin\left[\frac{x}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) - \frac{n\pi}{2}\right] \frac{du}{u^{n+1}} \right\}.$$

Remarquons que chacune des deux parties dont se compose la fonction $J^n(x)$ dans les formules (49), (50), (51) posséde la propriété exprimée par la relation (2).

15. En remplaçant x par $x + y$ dans la formule (43) on trouve

$$J^n(x+y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\cdot\alpha}^{\infty\cdot\beta} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} e^{\frac{y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^{n+1}},$$

$$R(x+y)\,\alpha < 0, \quad R(x+y)\,\beta < 0,$$

et en développant $e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ selon la formule du No. 12. on obtient

$$(52)\qquad J^n(x+y) = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} J^p(x)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{x.\alpha}^{\infty.\beta} e^{\frac{y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\frac{dt}{t^{n-p+1}}$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} J^p(x) J^{n-p}(y), \quad R(y\alpha) < 0, \quad R(y\beta) < 0.$$

On s'assure aisément que pour chaque valeur de y on peut choisir telles constantes α, β que non-seulement seraient satisfaites les conditions $R(y\alpha) < 0$, $R(y\beta) < 0$ mais encore ces autres $R(x+y)\alpha < 0$, $R(x+y)\beta < 0$, ou, ce qui est la même chose, $Ry\alpha\left(1+\frac{x}{y}\right) < 0$, $Ry\beta\left(1+\frac{x}{y}\right) < 0$, si l'on admet $\operatorname{mod}\frac{x}{y} < 1$. Donc la formule (52) aura lieu pour $\operatorname{mod} x < \operatorname{mod} y$. Elle appartient à M. Schläfli (l. c. p. 136).

En la comparant avec la formule (22) on conclut

$$(53)\qquad J^{n+p}(x) + (-1)^p J^{n-p}(x)$$
$$= \left\{(-D+\sqrt{D^2+1})^p + (-D-\sqrt{D^2+1})^p\right\} J^n(x),$$

p entier positif, n quelconque.

16. Discutons maintenant la formule (44).

Supposons que le chemin de l'integrale se compose d'un cercle de rayon $\frac{c}{2}$ décrit autour du point $u = 0$ et d'une double ligne $\frac{c}{2}e^{(\pi-\psi)i}$. On suppose naturellement $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$ pour que la condition $Re^{(\pi-\psi)i} < 0$ fût satisfaite. Désignons $ce^{-\psi i}$ par h et remarquons que $R(h) > 0$.

La formule (44) se réduit à la suivante

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\pi-\psi}^{\pi-\psi} e^{\frac{c}{2}e^{\varphi i} - \frac{x^2 e^{-\varphi i}}{2c} - n\varphi i}\left(\frac{c}{2}\right)^{-n} i\,d\varphi\right.$$
$$\left. + (1-e^{2n\pi i})\int_{-\frac{h}{2}} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\frac{du}{u^{n+1}}\right\},$$

d'où, en posant dans la première intégrale $\varphi = \sigma - \psi$, dans la seconde $u = -\frac{h}{2} s$ et réduisant la première aux limites 0 et π, on obtient après quelques réductions

$$(54)\quad J^n(x) = \left(\frac{x}{h}\right)^n \cdot \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\pi e^{\frac{h^2-x^2}{2h}\cos\sigma} \cos\left(\frac{h^2+x^2}{2h}\sin\sigma - n\sigma\right) d\sigma \right.$$

$$\left. - \sin n\pi \int_1^\infty e^{-\frac{h}{2}\left(s - \frac{x^2}{h^2 s}\right)} \frac{ds}{s^{n+1}} \right\}.$$

Pour $x = h$ on retrouve la formule de M. Schläfli; posant $h = xi$ on obtient

$$(55)\quad J^n(x) = e^{-\frac{n\pi}{2}i} \cdot \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\pi e^{xi\cos\sigma} \cos n\sigma\, d\sigma - \sin n\pi \int_1^\infty e^{-\frac{xi}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)} \frac{ds}{s^{n+1}} \right\},$$

$$J(x) < 0.$$

17. Soit

$$\frac{h^2+x^2}{2h} = a, \quad \frac{h^2-x^2}{2h} = b,$$

d'où

$$h = a + b, \quad x^2 = (a-b)h = a^2 - b^2, \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

La formule (54) se transforme et devient, à condition $R(a+b) > 0$,

$$(56)\quad J^n(\sqrt{a^2-b^2}) = \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\right)^n \cdot \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\pi e^{b\cos\sigma} \cos(a\sin\sigma - n\sigma)\, d\sigma \right.$$

$$\left. - \sin n\pi \int_0^\infty e^{-\frac{a}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right) - \frac{b}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)} \frac{ds}{s^{n+1}} \right\}.$$

Pour $n = 0$ on obtient la formule de Bessel

$$J^0(\sqrt{a^2-b^2}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{b\cos\sigma} \cos(a\sin\sigma)\, d\sigma.$$

(Abh. d. Berl. Acad. 1824, formule (55)). En supposant n entier on obtiendrait sans peine les formules (50), (51), (52) du même mémoire de Bessel.

18. Soit maintenant $\alpha' = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)i}$, $\beta' = e^{\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)i}$ et supposons que le chemin de l'intégrale (44) se compose d'un arc de cercle de rayon $\frac{c}{2}$ et de deux lignes $\frac{c}{2}\alpha'$, $\frac{c}{2}\beta'$. On aura

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{+\frac{\pi}{2}+\varepsilon} e^{\frac{c}{2}e^{\varphi i} - \frac{x^2 e^{-\varphi i}}{2c} - n\varphi i}\left(\frac{c}{2}\right)^{-n} i\,d\varphi\right.$$

$$\left. + \left(\int_{\frac{c}{2}\beta'} - \int_{\frac{c}{2}\alpha'}\right) e^{u - \frac{x^2}{4u}} \frac{du}{u^{n+1}}\right\},$$

ou, après les réductions analogues à celles que nous avons déjà effectuées plus haut dans un cas semblable,

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{c}\right)^n \cdot \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} e^{\frac{c^2-x^2}{2c}\cos\varphi} \cos\left(\frac{c^2+x^2}{2c}\sin\varphi - n\varphi\right) d\varphi\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2i}\int_1^{\infty}\left[\beta'^{-n} e^{\frac{c}{2}\beta' s - \frac{x^2}{2c\beta' s}} - \alpha'^{-n} e^{\frac{c}{2}\alpha' s - \frac{x^2}{2c\alpha' s}}\right] \frac{ds}{s^{n+1}}\right\}.$$

A la limite $\varepsilon = 0$ on trouve, en supposant $R(n) > 0$,

$$(57)\quad J^n(x) = \left(\frac{x}{c}\right)^n \cdot \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{c^2-x^2}{2c}\cos\varphi} \cos\left(\frac{c^2+x^2}{2c}\sin\varphi - n\varphi\right) d\varphi\right.$$

$$\left. + \int_1^{\infty} \sin\left(\frac{cs}{2} + \frac{x^2}{2cs} - n\frac{\pi}{2}\right) \frac{ds}{s^{n+1}}\right\}.$$

Pour $x = c$ on retrouve la formule (51).

Pour $x = -ci$ on obtient en vertu de la formule (24), en admettant que n soit un nombre entier positif,

$$J^n(-ci) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{c\cos\varphi} \cos n\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{(-i)^n}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{c\cos\varphi} \cos n\varphi\, d\varphi + \int_1^{\infty} \sin\left[\frac{c}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right) - n\frac{\pi}{2}\right] \frac{ds}{s^{n+1}}\right\}$$

et par conséquent

$$(58)\qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_1^{\infty} \sin\left[\frac{c}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right) - n\frac{\pi}{2}\right]\frac{ds}{s^{n+1}}.$$

La démonstration directe de cette égalité singulière de deux intégrales définies parait presque impossible. Remarquons qu'elle n'a lieu que pour les valeurs réelles positives de c.

19. Divisons la formule (54) par $\left(\frac{x}{h}\right)^n$ et posons $x = 0$. Si l'on remarque qu'en vertu de la formule (45) $\lim \frac{J^n(x)}{x^n} = \frac{1}{2^n \Pi n}$ pour $x = 0$, on trouve, en remplaçant h par $2h$

$$(59)\quad \frac{h^n}{\Pi n} = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} e^{h\cos\sigma}\cos(h\sin\sigma - n\sigma)\, d\sigma - \sin n\pi \int_1^{\infty} e^{-hs}\frac{ds}{s^{n+1}}\right\},$$

$$R(h) > 0.$$

Si l'on suppose $R(n) > 0$, la formule (54) reste convergente, et par conséquent vraie lors même que $R(h) = 0$. Si l'on y remplace x par $\sqrt{-2ah}$ et qu'après l'avoir multipliée par $(\sqrt{h})^n$ on pose $h = 0$, on obtient, en remplaçant a par h,

$$(60)\quad 0 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} e^{h\cos\sigma}\cos(h\sin\sigma + n\sigma)\, d\sigma - \sin n\pi \int_1^{\infty} e^{-\frac{h}{s}}\frac{ds}{s^{n+1}}\right\}.$$

En ajoutant et retranchant les deux équations (59) et (60) on trouve

$$(61)\quad \frac{h^n}{\Pi n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{h\cos\sigma}\cos(h\sin\sigma)\cos n\sigma\, d\sigma - \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_1^{\infty}\left(e^{-hs} + e^{-\frac{h}{s}}\right)\frac{ds}{s^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{h\cos\sigma}\sin(h\sin\sigma)\,\mathrm{cin}\, n\sigma\, d\sigma - \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_1^{\infty}\left(e^{-hs} - e^{-\frac{h}{s}}\right)\frac{ds}{s^{n+1}},$$

$$R(n) > 0,\ R(h) > 0.$$

Pour n entier on aura les deux formules connues de Poisson.

20. Remplaçons c par $2c$ dans la formule (57), divisons-la par $\left(\frac{x}{2c}\right)^n$ et posons $x = 0$. On obtient ainsi

$$(62)\quad \frac{c^n}{\Pi n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{c\cos\varphi}\cos(c\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\sin\left(cs-n\frac{\pi}{2}\right)\frac{ds}{s^{n+1}}\,.$$

Si l'on remplace h par c dans l'équation (59) et que l'on retranche du résultat la formule (62), on trouve

$$(63)\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{c\cos\varphi}\cos(c\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi=\sin n\pi\int_1^{\infty} e^{-cs}\frac{ds}{s^{n+1}}$$
$$+\int_1^{\infty}\sin\left(cs-n\frac{\pi}{2}\right)\frac{ds}{s^{n+1}}\,.$$

Les fonctions transcendantes qui sous forme d'intégrales définies se sont introduites dans ces dernières formules méritent peut-être une étude spéciale qui ne serait pas à sa place ici. Nous nous bornerons à une seule remarque. Les fonctions

$$\int_1^{\infty} e^{-hs}\frac{ds}{s^{n+1}}\,,\quad \int_1^{\infty} e^{-\frac{h}{s}}\frac{ds}{s^{n+1}}=\int_0^1 e^{-hs}s^{n-1}\,ds$$

entrent dans nos formules multipliées par $\sin n\pi$ et par conséquent disparaissent du resultat pour n entier; mais il suffit de diviser ces formules par $\sin n\pi$ et de déterminer les valeurs des expressions de la forme $\frac{0}{0}$ par les régles ordinaires du calcul différentiel pour obtenir de nouvelles formules contenant les fonctions mentionnées correspondantes à n entier. C'est ainsi que la formule (49) donne pour n entier positif

$$-\int_1^{\infty} e^{-hs}\frac{ds}{s^{n+1}}$$
$$=(-1)^n\left\{\frac{h^n\lg h}{\Pi n}-\frac{h^n}{(\Pi n)^2}\frac{d\Pi n}{dn}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{h\cos\sigma}\sin(h\sin\sigma-n\sigma)\,\sigma\,d\sigma\right\},$$

et en particulier pour $n=0$

$$-\int_1^{\infty} e^{-hs}\frac{ds}{s}=-\Gamma'(1)+\log h-\frac{1}{\pi}\int^{\pi} e^{h\cos\sigma}\sin(h\sin\sigma)\cdot\sigma\,d\sigma\,.$$

La fonction au premier membre est l'exponentielle intégrale $Ei(-h)$; l'intégrale au second membre se développe aisément en série suivant les puissances entières de h.

21. La formule (44) peut s'écrire

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-xi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty . \alpha'}^{\infty . \beta'} e^{\left(\sqrt{u} + \frac{xi}{2\sqrt{u}}\right)^2} \frac{du}{u^{n+1}} .$$

En développant la fonction exponentielle en série de Taylor on trouve

$$e^{\left(\sqrt{u} + \frac{xi}{2\sqrt{u}}\right)^2} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{2^p \Pi p} \left(\frac{xi}{\sqrt{u}}\right)^p \frac{d^p e^u}{(d\sqrt{u})^p},$$

et par conséquent

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-xi} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(xi)^p}{2^p \Pi p} \cdot \frac{2}{2\pi i} \int_{\infty . \alpha'}^{\infty . \beta'} \frac{d^p e^u}{(d\sqrt{u})^p} \cdot \frac{d\sqrt{u}}{(\sqrt{u})^{2n+p+1}} .$$

Mais l'intégration par parties répétée p fois fournit

$$\begin{aligned} \frac{2}{2\pi i} \int_{\infty . \alpha'}^{\infty . \beta'} \frac{d^p e^u}{(d\sqrt{u})^p} \frac{d\sqrt{u}}{(\sqrt{u})^{2n+p+1}} &= \frac{(2n+p+1)(2n+p+2)\cdots(2n+2p)}{2\pi i} \int_{\infty . \alpha'}^{\infty . \beta'} e^u \frac{du}{u^{n+p+1}} \\ &= \frac{(2n+p+1)(2n+p+2)\cdots(2n+2p)}{\Pi(n+p)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Pi(n+p-\frac{1}{2})}{\Pi(2n+p)} 2^{2n+2p}; \end{aligned}$$

donc

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-xi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\Pi(n+p-\frac{1}{2})}{\Pi(2n+p)\Pi p} 2^{2n} (2xi)^p .$$

On en conclut

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} J^n(x) = \frac{(2x)^n}{\sqrt{\pi}} \Bigg\{ &\cos x \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{\Pi(n+2p-\frac{1}{2})}{\Pi(2n+2p)\Pi 2p} (2x)^{2p} \\ &+ \sin x \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{\Pi(n+2p+\frac{1}{2})}{\Pi(2n+2p+1)\Pi(2p+1)} (2x)^{2p+1} \Bigg\}, \\ 0 = \cos x &\sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{\Pi(n+2p+\frac{1}{2})}{\Pi(2n+2p+1)\Pi(2p+1)} (2x)^{2p+1} \\ - \sin x &\sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{\Pi(n+2p-\frac{1}{2})}{\Pi(2n+2p)\Pi 2p} (2x)^{2p} . \end{aligned} \right.$$

Ces formules ont éte données par M. Lommel pour le cas $n > -\frac{1}{2}$ (Studien, § 7.). Les formules (56) du mémoire cité de Bessel fournissent aisément le développement de $J^0(x)$ en une série de la forme (64).

22. La formule (44) donne

$$\frac{J^n(\sqrt{x+h})}{(\sqrt{x+h})^n} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty.\alpha'}^{\infty.\beta'} e^{u-\frac{x}{4u}-\frac{h}{4u}}\frac{du}{u^{n+1}},$$

et si on développe la fonction $e^{-\frac{h}{4u}}$, on obtient immédiatement

$$(65)\qquad \frac{J^n(\sqrt{x+h})}{(\sqrt{x+h})^n} = \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{(-h)^p}{2^p\Pi p}\;\frac{J^{n+p}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+p}},$$

quelles que soient x, h. (Lommel, Studien § 5.)

Soit $x = r^2 + R^2$, $h = -2rR\cos\varphi$. On trouve

$$\Omega = \frac{J^n(\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi})}{(\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi})^n} = \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{R^p\cos^p\varphi}{\Pi p}\cdot r^p\,\frac{J^{n+p}(\sqrt{r^2+R^2})}{(\sqrt{r^2+R^2})^{n+p}}.$$

Mais la formule (65), lorsqu'on y pose $x = r^2$, $h = R^2$, donne encore

$$\frac{J^{n+p}(\sqrt{r^2+R^2})}{(\sqrt{r^2+R^2})^{n+p}} = \sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{(-R^2)^q}{2^q\Pi q}\;\frac{J^{n+p+q}(r)}{r^{n+p+q}};$$

donc

$$\Omega = \sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{(-1)^q R^{p+2q}\cos^p\varphi}{2^q\,\Pi q\,\Pi p}\;\frac{J^{n+p+q}(r)}{r^{n+q}}.$$

Remarquons maintenant que la formule (40) permet d'obtenir l'expression de $\frac{J^{n+q}(x)}{x^q}$ au moyen des fonctions cylindriques. Cette expression est celle-ci

$$(66)\qquad \frac{J^{n+q}(x)}{x^q} = \sum_{k=0}^{k=q}\frac{\Pi q}{\Pi k\,\Pi(q-k)}\cdot\frac{n+2k}{2^q}\;\frac{\Pi(n+k-1)}{\Pi(n+q+k)}\,J^{n+2k}(x);$$

donc

$$\Omega = \sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^q(n+p+2k)\,\Pi(n+p+k-1)}{2^{2q}\Pi p\,\Pi k\,\Pi(q-k)\,\Pi(n+p+k+q)}\,R^{p+2q}\cos^p\varphi\,\frac{J^{n+p+2k}(r)}{r^n},$$

ou, en appliquant la transformation

$$\sum_{q=0}^{=\infty}\sum_{k=0}^{k=q}u_k^q = \sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{q=k}^{q=\infty}u_k^q = \sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty}u_k^{k+q},$$

$$\Omega = \sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{(-1)^{k+q}(n+p+2k)\,\Pi(n+p+k-1)}{2^{2k+2q}\Pi p\,\Pi k\,\Pi q\,\Pi(n+p+q+2k)}\,R^{p+2k+2q}\cos^p\varphi\,\frac{J^{n+p+2k}(r)}{r^n}.$$

Ici la sommation par rapport à q s'effectue au moyen de la formule (45) et l'expression de Ω devient

$$\Omega=\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^{n+p}(n+p+2k)\Pi(n+p+k-1)}{\Pi k\,\Pi p}\cos^p\varphi\cdot\frac{J^{n+p+2k}(r)}{r^n}\cdot\frac{J^{n+p+2k}(R)}{R^n},$$

ou, en posant $p+2k=s$,

$$\Omega=\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{s=2k}^{s=\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2^{n+s-2k}(n+s)\Pi(n+s-k-1)}{\Pi k\cdot\Pi(s-2k)}\cos^{s-2k}\varphi\cdot\frac{J^{n+s}R}{R^n}\cdot\frac{J^{n+s}(r)}{r^n},$$

ou enfin, en remarquant que

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{s=2k}^{s=\infty}u_s^k=\sum_{s=0}^{s=\infty}\sum_{k=0}^{k=s}\left(u_{2s}^k+u_{2s+1}^k\right)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\sum_{k=0}^{k=\left(\frac{s}{2}\right)}u_s^k,$$

où $\left(\frac{s}{2}\right)$ désigne le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{s}{2}$,

$$(67)\quad \Omega=2^n\sum_{s=0}^{s=\infty}(n+s)\frac{J^{n+s}(r)}{r^n}\cdot\frac{J^{n+s}(R)}{R^n}\cdot 2^s\sum_{k=0}^{k=\left(\frac{s}{2}\right)}(-1)^k\frac{\Pi(n+s-k-1)}{2^{2k}\Pi k\cdot\Pi(s-2k)}\cos^{s-2k}\varphi\,.$$

Si l'on considére les fonctions C_s^n que fournit le développement

$$(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-n}=\sum_{s=0}^{s=\infty}C_s^n(\cos\varphi)\cdot\alpha^s,$$

on aura

$$8)\quad \frac{J^n\left(\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi}\right)}{\left(\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi}\right)^n}=2^n\Pi(n-1)\sum_{s=0}^{s=\infty}(n+s)\frac{J^{n+s}(r)}{r^n}\cdot\frac{J^{n+s}(R)}{R^n}\cdot C_s^n(\cos\varphi).$$

Cette formule a été donnée par M. Gegenbauer.

Sous cette forme elle ne reproduit pas la première formule de ce genre, découverte par M. Neumann et correspondante à $n=0$. Mais la formule (67) donne en ce cas

$$J^0\left(\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi}\right)=J^0(r)\cdot J^0(R)+2\sum_{s=1}^{s=\infty}J^s(r)\cdot J^s(R)\cdot\cos(s\varphi).$$

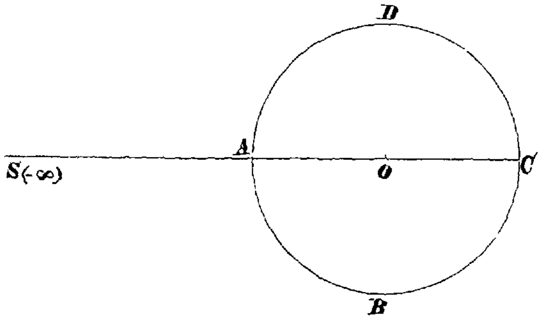
Remarquons qu'en différentiant cette formule n fois par rapport à $\cos\varphi$ on retrouve la formule générale (67) pour le cas de n entier sous cette forme

$$\frac{J^n\left(\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi}\right)}{\left(\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi}\right)^n}=2\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{J^{n+s}(r)}{r^n}\cdot\frac{J^{n+s}(R)}{R^n}\cdot\frac{d^n\cos(n+s)\varphi}{(d\cos\varphi)^n}.$$

23. Après les développements précédents la discussion de la formule (46) n'est d'aucun intérêt; c'est pourquoi nous la passons outre et nous nous tournons à la discussion des trois autres solutions du système de deux équations (2) et (40). On verra que ces solutions s'expriment au moyen de la première S_n'.

Pour le faire voir par rapport aux solutions S_n'' et S_n''' il est bon, pour préciser les idées et l'exposition, de choisir les chemins d'intégration de la manière suivante.

Soit $ABCD$ un cercle de rayon 1 décrit autour du point O, OS la direction de l'axe réelle négative. Désignons l'intégrale



$$\frac{1}{2\pi i}\int e^{x\left(t-\frac{1}{t}\right)}\frac{dt}{t^{n+1}}$$

prise le long d'un chemin quelconque, par exemple BCD, par la lettre $J(BCD)$ etc. Alors la solution $J^n(x) = S_n'$ s'exprime par $J(SABCDAS)$ et pour les deux autres solutions on peut prendre les chemins $OCDABCO$ et $OCDAS$.

Mais d'après notre convention sur la valeur de t^n on aura

$$\begin{aligned}
S_n' &= J(CDA) - J(CBA) + J(AS)(1-e^{2n\pi i}),\\
S_n'' &= J(OC)(1-e^{-2n\pi i}) + J(CDA) - J(CBA)\cdot e^{-2n\pi i},\\
S_n''' &= J(OC) + J(CDA) + J(AS).
\end{aligned}$$

On en tire tout de suite

$$S_n'' - e^{-2n\pi i}\cdot S_n' = (1-e^{-2n\pi i})S_n''';$$

d'où la troisième solution s'exprime linéairement au moyen de deux autres.

Prenons maintenant S'_{-n} et introduisons-y $t = \frac{1}{-t_1} = \frac{1}{e^{\pi i}t_1}$, d'où $t^{+n} = e^{-n\pi i}t_1^{-n}$, $\frac{dt}{t} = -\frac{dt_1}{t_1}$. Le chemin $SABCDAS$ se transforme en $OCBADCO$ de sorte qu'on trouve

$$S'_{-n} = -e^{-n\pi i}J(OCBADCO) = e^{n\pi i}J(OCDABCO) = e^{n\pi i}\cdot S_n''.$$

Donc

$$\begin{aligned}
S_n'' &= e^{-n\pi i}J^{-n}(x),\\
S_n''' &= e^{-n\pi i}\frac{J^{-n}(x)-e^{-n\pi i}J^n(x)}{1-e^{-2n\pi i}} = \frac{J^{-n}(x)-e^{-n\pi i}J^n(x)}{2i\sin n\pi}.
\end{aligned}$$

24. Considérons maintenant la quatrième solution S_n^{IV} qui se réduit à la forme

$$S_n^{IV}=\left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k\pm\infty i}^{l\pm\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4n}}\frac{du}{u^{n+1}},\quad R(n)>0.$$

Prenons ∞i dans les limites avec le même signe, par exemple $+\infty i$. Si l'on admet dans la formule (44) $\alpha'=\beta'=i$ et qu'on y ajoute

$$0=\left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{0+\infty i}^{l+\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\frac{du}{u^{n+1}}\,(=0)+\int\limits_{k+\infty i}^{0+\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4n}}\frac{du}{u^{n+1}}\,(=0)\right\},$$

on obtient

$$J^n(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k+\infty i}^{l+\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\frac{du}{u^{n+1}},\quad R(n)>0.$$

Donc

$$S_n^{IV}=J^n(x).$$

Si l'on pose dans la formule (44) $\alpha'=-i$, $\beta'=i$ et qu'on y ajoute

$$0=\left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{k-\infty i}^{-\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\frac{du}{u^{n+1}}\,(=0)+\int\limits_{+\infty i}^{l+\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\frac{du}{u^{n+1}}\,(=0)\right\}$$

on trouve aussi

$$J^n(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k-\infty i}^{l+\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\frac{du}{u^{n+1}},\quad R(n)>0.$$

Donc $S_n^{IV}=J^n(x)$. Les chemins des intégrales qui représentent S_n^{IV} doivent couper en un point l'axe réelle positive; si l'intersection n'a pas lieu, ces intégrales deviennent nulles.

25. Soit $R(k)>0$ et posons $l=k$. La dernière intégrale peut être prise le long de la ligne droite passant par le point k et parallèle à l'axe imaginaire. En désignant par la lettre a une constante réelle positive et posant $u=\frac{a}{2}(k+ri)$, on obtient en ce cas

$$(69)\quad J^n(x)=\left(\frac{x}{a}\right)^n\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{2}(k+ri)-\frac{x^2}{2a(k+ri)}}\frac{dr}{(k+ri)^{n+1}},\quad R(n)>0.$$

L'intégrale prise le long de la droite passant par le point $-k$ et parallèle à l'axe imaginaire étant nulle, on a ce corollaire de la formule (69)

$$(70)\qquad 0=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}(k+ri)+\frac{x^2}{2a(k+ri)}}\frac{dr}{(k+ri)^{n+1}},\quad R(n)>0.$$

Ces deux formules nous seront bientôt d'une grande utilité.

En les divisant par x^n et posant $x=0$, on trouve

$$(71)\qquad \begin{cases} \dfrac{a^n}{2^n\Pi n}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{2}(k+ri)}\frac{dr}{(k+ri)^{n+1}}, \\ 0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}(k+ri)}\frac{dr}{(k+ri)^{n+1}},\quad R(n)>0. \end{cases}$$

Ce sont les formules connues de Cauchy. On sait qu'elles restent vraies pour $R(n)>-1$. On en conclut que les formules (69) et (70) restent aussi vraies pour $R(n)>-1$.

26. La formule (69) se réduit aisément à celle que M. Lommel a prise pour définition de la fonction cylindrique $J^n(x)$.

Pour atteindre ce but nous partons de la formule bien connue

$$\int_0^{\infty} e^{-pt^2}\cos qt\,dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\cdot e^{-\frac{q^2}{4p}},\quad R(p)>0,$$

qui donne

$$e^{-\frac{x^2}{2a(k+ri)}}=\sqrt{\frac{2a}{\pi}}(k+ri)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{2}(k+ri)t^2}\cos xt\cdot dt.$$

En substituant cette expression dans la formule (69) et changeant l'ordre des intégrations, on trouve

$$J^n(x)=\left(\frac{x}{a}\right)^n\cdot\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos xt\cdot dt\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{2}(1-t^2)(k+ri)}\frac{dr}{(k+ri)^{n+\frac{1}{2}}};$$

mais en vertu des formules de Cauchy, qu'on vient de retrouver, l'intégrale relative à r sera nulle pour $t>1$ et égale à $\dfrac{2\pi\cdot a^{n-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}}{2^{n-\frac{1}{2}}\Pi\left(r-\frac{1}{2}\right)}$ pour $t<1$. Donc

$$J^n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot 2 \int_0^1 \cos xt \cdot (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{x^n}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot \int_{-1}^1 \cos xt \cdot (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} dt.$$

On verra plus loin que cette formule n'est qu'un cas particulier d'une relation générale qui lie les deux fonctions $J^n(x)$, $J^m(x)$.

27. Revenons au système de deux équations (2) et (40).

Après les développements précédents on voit que la solution générale de ce système sera

$$S_n = AJ^n(x) + Be^{-n\pi i}J^{-n}(x),$$

A et B étant deux fonctions périodiques de n.

Pour n entier cette solution perd sa généralité parce qu'alors $e^{-n\pi i}J^{-n}(x) = J^n(x)$; mais la solution S_n''' devient en ce cas

$$S_n''' = -\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{dJ^n}{dn} - (-1)^n \frac{dJ^{-n}}{dn}\right] + \frac{1}{2}J^n;$$

donc en désignant, conformément à la notation de Hankel,

$$Y^n(x) = \frac{dJ^n}{dn} - (-1)^n \frac{dJ^{-n}}{dn},$$

on aura pour solution générale

$$S_n = AJ^n(x) + BY^n(x).$$

La fonction cylindrique de seconde espèce $Y^n(x)$ se présente sous différentes formes suivant que l'on prend l'une ou l'autre expression de $J^n(x)$. Ainsi la formule (43) donne

$$(72) \qquad Y^n(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty.\alpha}^{\infty.\beta} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} [t^{-n} + (-1)^n t^n] \log t \cdot \frac{dt}{t}.$$

La formule (49) a déjà fourni à M. Schläfli l'expression suivante

$$Y^n(x) = \int_0^\pi \sin(x\sin\sigma - n\sigma)\, d\sigma - \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}(e^\Theta - e^{-\Theta})} [e^{n\Theta} + (-1)^n e^{-n\Theta}] d\Theta,$$

$$R(x) > 0,$$

que l'on peut transformer, en posant $e^\Theta = \sqrt{t^2+1} + t$,

$$(73)\quad Y^n(x)=\int_0^\pi \sin(x\sin\sigma-n\sigma)\,d\sigma-\int_0^\infty e^{-xt}\frac{(t+\sqrt{t^2+1})^n+(t-\sqrt{t^2+1})^n}{\sqrt{t^2+1}}\,dt.$$

La formule (55) donne

$$Y^n(x)=-\pi i J^n(x)-2i^n\int_1^\infty e^{-\frac{xi}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)}(s^n+s^{-n})\,\frac{ds}{s},\quad J(x)<0,$$

ou, en posant $s=e^\Theta$,

$$(74)\qquad Y^n(x)=-\pi i J^n(x)-2i^n\int_0^\infty e^{-xi\cos(\Theta i)}\cos(n\Theta i)\,d\Theta.$$

L'intégrale qui entre dans cette formule a été considérée par M. Heine au tome 69 du Journal für Mathematik.

Enfin la formule (69) fournit

$$(75)\quad Y^0(x)=2J^0(x)\cdot\log\frac{x}{a}-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{2}(k+ri)-\frac{x^2}{2a(k+ri)}}\log(k+ri)\,\frac{dr}{k+ri},$$

En y substituant l'expression de $e^{-\frac{x^2}{2a(k+ri)}}$, employée au No. 26., on obtient

$$Y^0(x)=2J^0(x)\cdot\log\frac{x}{a}-2\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_0^\infty \cos xt\cdot dt$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{2}(1-t^2)(k+ri)}\log(k+ri)\,\frac{dr}{\sqrt{k+ri}}.$$

Mais les deux équations (71) différentiées par rapport à n montrent que l'intégrale relative à r sera nulle pour $t>1$ et sera égale à la valeur de $-\frac{d}{dn}\,\frac{a^n(1-t^2)^n}{2^n\Pi n}$ pour $n=-\frac{1}{2}$ lorsque $t<1$. Donc en admettant $a=2$ on aura

$$Y^0(x)=2J^0(x)\cdot\log\frac{x}{2}+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \cos xt\left(\frac{d}{dn}\,\frac{(1-t^2)^n}{\Pi n}\right)_{n=-\frac{1}{2}}dt$$

$$=2J^0(x)\cdot\log\frac{x}{2}+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \cos(xt)\,\frac{\sqrt{\pi}\cdot(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\log(1-t^2)-(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\Pi'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\pi}$$

d'où, en substituant $\Pi'\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,(\Pi'0-2\log 2)$, on obtient, toute réduction faite,

$$(76)\quad Y^0(x)=2J^0(x)\cdot\log x-2(\Pi'0-\log 2)J^0(x)+\frac{4}{\pi}\int_0^1 \cos xt\cdot\frac{\lg(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$
$$=2J^0(x)\cdot\log x-2(\Pi'0-\log 2)J^0(x)$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\cdot\log\cos^2\varphi\cdot d\varphi.$$

Cette forme de la fonction cylindrique de seconde espèce $Y^0(x)$ diffère peu de celle donnée par M. Neumann.

Pour obtenir $Y^n(x)$ remarquons qu'on a évidemment

$$(77)\quad Y^n(x)=(-2x)^n\frac{d^n\,Y^0(x)}{(d\cdot x^2)^n}=\frac{(-D+\sqrt{D^2+1})^n+(-D-\sqrt{D^2+1})^n}{2}\,Y^0(x).$$

En vertu de la première de ces deux expressions on trouve de la formule (75), en y posant $a=2$,

$$Y^n(x)=(-2x)^n\frac{d^n\,J^0(x)\cdot\log x^2}{(d\,x^2)^n}-2\log 2\cdot J^n(x)$$
$$-\left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{k+ri-\frac{x^2}{4(k+ri)}}\frac{\log(k+ri)\,dr}{(k+ri)^{n+1}},$$

ou, en employant la même transformation qui nous a déjà fourni la formule (76),

$$(78)\quad Y^n(x)=(-2x)^n\frac{d^n\,J^0(x)\cdot\log x^2}{(d x^2)^n}-2\left[\frac{d}{dn}\log\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)+\log 2\right]J^n(x)$$
$$+\frac{2x^n}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\cos^{2n}\varphi\cdot\log\cos^2\varphi\cdot d\varphi.$$

La seconde expression (77) de la fonction $Y^n(x)$ appliquée à la formule (76) fournit

$$(78)\quad Y^n(x)=\left\{(-D+\sqrt{D^2+1})^n+(-D-\sqrt{D^2+1})^n\right\}J^0(x)\cdot\log x$$
$$-2(\Pi'0-\log 2)J^n(x)$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(x\sin\varphi+n\frac{\pi}{2}\right)\cos n\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\log\cos^2\varphi\cdot d\varphi.$$

III.

Intégrales indéfinies contenant les fonctions cylindriques.

La question a été traitée par M. Lommel dans un travail récent (Math. Ann. XIV, 520—536) et si nous la reprenons, c'est parce que les formules de ce savant n'ont pas toute la généralité désirable.

28. En désignant par S_n une solution quelconque, générale ou particulière, du système de deux équations (2) et (40), considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \sigma(x)\cdot x^{n+1} S_n(x)\cdot dx$$

et supposons qu'elle soit égale à $\big(A\cdot S_n(x)+B\cdot S_{n+1}(x)\big)x^{n+1}$. En différentiant cette égalité par rapport à x on obtient

$$\sigma(x)\cdot x^{n+1}\cdot S_n(x)=\frac{S_n}{x^n}\cdot\frac{d A\cdot x^{2n+1}}{dx}+x^{n+1}S_{n+1}\frac{dB}{dx}+A\cdot x^{2n+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{S_n}{x^n}\right)$$
$$+B\frac{d}{dx}\left(x^{n+1}S_{n+1}\right),$$

ce que peut s'écrire, en vertu des équations (47) et (48),

$$\sigma(x)\cdot x^{n+1}\cdot S_n(x)=x^{n+1}\left\{\left(\frac{dA}{dx}+\frac{2n+1}{x}A+B\right)S_n+\left(\frac{dB}{dx}-A\right)S_{n+1}\right\}.$$

On en conclut

$$A=\frac{dB}{dx},$$

$$\sigma(x)=\frac{dA}{dx}+\frac{2n+1}{x}A+B=\frac{d^2B}{dx^2}+\frac{2n+1}{x}\frac{dB}{dx}+B$$

et par conséquent

$$\text{(79)}\qquad \int\left(\frac{d^2B}{dx^2}+\frac{2n+1}{x}\frac{dB}{dx}+B\right)x^{n+1}S_n(x)\,dx$$
$$=x^{n+1}\left[BS_{n+1}(x)+\frac{dB}{dx}S_n(x)\right],$$

B étant une fonction arbitraire. Cette formule peut être généralisée par l'introduction de $\varphi(x)$ au lieu de x. A la vérité, elle se trouve déjà dans le livre de M. Lommel (Studien p. 70).

29. Considérons maintenant l'intégrale

$$\text{(80)}\qquad \int\sigma(x)\cdot S_\mu(\varphi x)\cdot S_\nu(\psi x)\,dx,$$

qui sera supposée égale à

$$\text{(80')}\qquad [AS_\mu(\varphi x)+BS_{\mu+1}(\varphi x)]\,S_\nu(\psi x)$$
$$+[CS_\mu(\varphi x)+DS_{\mu+1}(\varphi x)]\,S_{\nu+1}(\psi x).$$

$S_\mu(x)$, $S_\nu(x)$ désignent deux solutions quelconques de deux systèmes indépendants

$$\frac{\partial S_\mu}{\partial x}=\frac{\mu}{x}S_\mu(x)-S_{\mu+1}(x)=-\frac{\mu}{x}S_\mu+S_{\mu-1},$$
$$\frac{\partial S_\nu}{\partial x}=\frac{\nu}{x}S_\nu(x)-S_{\nu+1}(x)=-\frac{\nu}{x}S_\nu+S_{\nu-1},$$

qui définissent en même temps ce qu'on doit comprendre sous

$S_{\mu+1}(x)$, $S_{\nu+1}(x)$. Si l'on différentie l'égalité (80) et qu'on réduit le second membre à ne plus contenir que les mêmes fonctions cylindriques qui entrent au second membre de (80), ce qui se fait aisément au moyen de deux systèmes d'équations qu'on vient d'écrire, on trouve, en égalant les coefficients,

$$\text{a)} \qquad \sigma x = A' + \left(\frac{\mu \varphi' x}{\varphi x} + \frac{\nu \psi' x}{\psi x}\right) A + B\varphi' x + C\psi' x,$$

$$\text{b)} \qquad 0 = B' + \left[\frac{\nu \psi' x}{\psi x} - \frac{(\mu+1)\varphi' x}{\varphi x}\right] B + D\psi' x - A\varphi' x,$$

$$\text{c)} \qquad 0 = C' + \left[\frac{\mu \varphi' x}{\varphi x} - \frac{(\nu+1)\psi' x}{\psi x}\right] C + D\varphi' x - A\psi' x,$$

$$\text{d)} \qquad 0 = D' - \left[\frac{(\mu+1)\varphi' x}{\varphi x} + \frac{(\nu+1)\psi' x}{\psi x}\right] D - B\psi' x - C\varphi' x.$$

En différentiant l'équation d) et en éliminant du resultat B et B' au moyen de l'équation d) elle même et de celle qui s'obtient par l'élimination de A entre les équations b) et c), on obtient, toute réduction faite,

$$2\varphi' x\left[C' + \frac{C}{2}\left(\frac{\varphi'' x}{\varphi' x} - \frac{\varphi' x}{\varphi x} - \frac{\psi'' x}{\psi' x} - \frac{\psi' x}{\psi x}\right)\right]$$
$$= D'' - \left[\frac{\psi'' x}{\psi' x} + \frac{\psi' x}{\psi x} + 2(\mu+1)\frac{\varphi' x}{\varphi x}\right] D'$$
$$+ \left[(\psi' x)^2 - (\varphi' x)^2 - (\nu^2 - 1)\left(\frac{\psi' x}{\psi x}\right)^2 + (\mu+1)(\mu+2)\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x}\right)^2\right.$$
$$\left. + (\mu+1)\frac{\psi' x \cdot \varphi' x}{\psi x \cdot \varphi x} - (\mu+1)\frac{\varphi'' x}{\varphi x} + (\mu+1)\frac{\psi'' x}{\psi' x}\frac{\varphi' x}{\varphi x}\right] D.$$

L'expression au premier membre a pour diviseur intégrant $\sqrt{\varphi x \cdot \psi x \cdot \varphi' x \cdot \psi' x}$, qui la réduit à $2\frac{d}{dx}\left(C \cdot \sqrt{\frac{\varphi' x}{\varphi x \cdot \psi x \cdot \psi' x}}\right)$. En divisant donc cette équation par $\sqrt{\varphi x \cdot \varphi' x \cdot \psi x \cdot \psi' x}$ et réduisant le second membre à la forme

$$\frac{d}{dx}[\Phi(x) \cdot D' + \Psi(x) \cdot D] + \Sigma(x) \cdot D$$

on posera

$$\Sigma(x) \cdot D = \frac{d}{dx}\frac{L}{\sqrt{\varphi x \cdot \psi x \cdot \varphi' x \cdot \psi' x}}$$

et on sera conduit au résultat final suivant:

Si L désigne une fonction arbitraire, c une constante arbitraire et que l'on pose

$$P = \left((\varphi x)^2 - \mu^2 + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi'' x}{\varphi' x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{\varphi'' x}{\varphi' x},$$

$$Q = \left((\psi x)^2 - \nu^2 + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\psi' x}{\psi x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\psi'' x}{\psi' x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{\psi'' x}{\psi' x},$$

les deux expressions (80) seront égales lorsqu'on détermine successivement les coefficients A, B, C, D et la fonction $\sigma(x)$ au moyen du système des équations que voici:

$$(Q-P)\,D = \frac{dL}{dx} - \frac{L}{2}\left(\frac{\varphi'' x}{\varphi' x} + \frac{\varphi' x}{\varphi x} + \frac{\psi'' x}{\psi' x} + \frac{\psi' x}{\psi x}\right),$$

$$2C\cdot\varphi' x = \frac{dD}{dx} - \frac{D}{2}\left[\frac{\psi'' x}{\psi' x} + \frac{\psi' x}{\psi x} - \frac{\varphi'' x}{\varphi' x} - \frac{\varphi' x}{\varphi x} + 4(\mu+1)\frac{\varphi' x}{\varphi x}\right] + L + c\sqrt{\varphi x\cdot\psi x\cdot\varphi' x\cdot\psi' x},$$

$$2B\cdot\psi' x = \frac{dD}{dx} - \frac{D}{2}\left[\frac{\varphi'' x}{\varphi' x} + \frac{\varphi' x}{\varphi x} - \frac{\psi'' x}{\psi' x} - \frac{\psi' x}{\psi x} + 4(\nu+1)\frac{\psi' x}{\psi x}\right] - L - c\sqrt{\varphi x\cdot\psi x\cdot\varphi' x\cdot\psi' x},$$

$$A\cdot\psi' x = \frac{dC}{dx} + C\left[\frac{\mu\varphi' x}{\varphi x} - (\nu+1)\frac{\psi' x}{\psi x}\right] + D\varphi' x,$$

$$\sigma(x) = \frac{dA}{dx} + A\left(\frac{\mu\varphi' x}{\varphi x} + \frac{\nu\psi' x}{\psi x}\right) + B\varphi' x + C\psi' x\cdot$$

La formule la plus générale de M. Lommel correspond à $L=0$, ou $L=\sqrt{\varphi x\cdot\psi x\cdot\varphi' x\cdot\psi' x}$; dans les deux cas $D=0$, c'est pourquoi on peut admettre $c=0$ dans les formules précédentes sans nuire à leur généralité. Remarquons encore que les coefficients A, B, C, D et la fonction $\sigma(x)$ s'expriment linéairement au moyen de la fonction L et de ses dérivées de divers ordres. Si donc on avait

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots,$$

il suffirait de calculer les formules correspondantes à $L=L_1$, $L=L_2$, $L=L_3, \cdots$ et d'ajouter les résultats.

30. Supposons $Q=P$, ce qu'on ne sait satisfaire que par l'admission $\psi x = \varphi x$. Les formules du No. 29. deviennent en ce cas: $L=\varphi x\cdot\varphi' x$,

$$2C\varphi' x = \frac{dD}{dx} - 2(\mu+1)\,D\cdot\frac{\varphi' x}{\varphi x} + \varphi x\cdot\varphi' x,$$

$$2B\varphi' x = \frac{dD}{dx} - 2(\nu+1)\,D\cdot\frac{\varphi' x}{\varphi x} - \varphi x\cdot\varphi' x,$$

$$A\varphi' x = \frac{dC}{dx} + (\mu-\nu-1)\,C\cdot\frac{\varphi' x}{\varphi x} + D\cdot\varphi' x,$$

$$\sigma(x) = \frac{dA}{dx} + (\mu+\nu)\,A\cdot\frac{\varphi' x}{\varphi x} + B\varphi' x + C\varphi' x,$$

où D représente une fonction arbitraire.

Soit en particulier $\varphi x = x$, $D=0$. On obtient en ce cas

$$(81)\qquad (\mu^2-\nu^2)\int S_\mu(x)\cdot S_\nu(x)\cdot\frac{dx}{x} = (\mu-\nu)\,S_\mu(x)\cdot S_\nu(x) + x\,[S_\mu(x)\cdot S_{\nu+1}(x) - S_\nu(x)\cdot S_{\mu+1}(x)],$$

d'où, en posant $\mu = -\nu$, on trouve

$$-2\nu S_\nu(x)\cdot S_{-\nu}(x)+x\,[S_{-\nu}(x)\cdot S_{\nu+1}(x)-S_\nu(x)\cdot S_{-\nu+1}(x)]=g_\nu,$$

g_ν étant la valeur du premier membre pour une valeur particulière de x. Il suffit de prendre une solution particulière $S_n(x)=J^n(x)$ et l'on obtient la formule suivante donnée par M. Lommel (Math. Ann. IV, p. 105)

$$(82)\qquad J^{-\nu}(x)\cdot J^{\nu-1}(x)+J^\nu(x)\cdot J^{-\nu+1}(x)=\frac{2}{\pi x}\sin\nu\pi,$$

où la constante g_ν se détermine pour $x=0$.

En supposant ν entier et admettant $S_\nu(x)=Y^\nu(x)$, $S_\mu(x)=e^{-\mu\pi i}J^{-\mu}(x)$, on tire de la formule (81)

$$(\mu^2-\nu^2)\int J^{-\mu}(x)\cdot Y^\nu(x)\cdot\frac{dx}{x}$$

$$(\mu-\nu)\,J^{-\mu}(x)\cdot Y^\nu(x)+x\,[J^{-\mu}(x)\cdot Y^{\nu+1}(x)+J^{-\mu-1}(x)\cdot Y^\nu(x)],$$

d'où, en supposant $\mu=-\nu$, on trouve

$$-2\nu\cdot J^\nu(x)\cdot Y^\nu(x)+x\,[J^\nu(x)\cdot Y^{\nu+1}(x)+J^{\nu-1}(x)\cdot Y^\nu(x)]=g_\nu,$$

ou finalement, après avoir determiné g_ν pour $x=0$,

$$(83)\qquad J^\nu(x)\cdot Y^{\nu-1}(x)-J^{\nu-1}(x)\cdot Y^\nu(x)=\frac{2}{x}\cdot$$

Cette formule est également due à M. Lommel. On en tire aisément

$$(84)\qquad Y^n(x)=J^n(x)\left\{\frac{Y^0(x)}{J^0(x)}-\frac{2}{x}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{J^k(x)\cdot J^{k+1}(x)}\right\}.$$

31. Supposons $B=0$, $C=0$. Les équations b) et c) du No. 29. donnent pour ce cas

$$D^2=A^2,\quad(\psi'x)^2=(\varphi'x)^2.$$

Donc $D=\pm A$, $\psi'x=\pm\varphi'x$, d'où $\psi x=a\pm\varphi x$; et comme l'équation d) fournit en même temps $D=(\varphi x)^{\mu+1}(\psi x)^{\nu+1}$, on aura finalement, en admettant $\varphi x=x$,

$$\int x^\mu(a\pm x)^\nu\,[2(\mu+\nu+1)\,x\pm(2\mu+1)\,a]\,S_\mu(x)\,S_\nu(a\pm x)\,dx$$
$$=x^{\mu+1}(a\pm x)^{\nu+1}\,[S_{\mu+1}(x)\,S_{\nu+1}(a\pm x)\pm S_\mu(x)\,S_\nu(a\pm x)].$$

Cette formule est la généralisation de celles que contient la troisième section du mémoire cité de M. Lommel.

Nous arrêtons là ces recherches qui ne présentent qu'un intérêt médiocre.

IV.

Intégrales définies contenant les fonctions cylindriques.

Le sujet a été traité par divers auteurs; mais ce qui a manqué aux recherches antérieures c'est la connaissance d'une expression de la fonction cylindrique qui soit assez commode pour cette sorte de recherches, comme l'est notre formule (69).

Dans ce qui suit nous nous proposons de réunir et de coordonner, en les généralisant, les formules déjà connues et d'y adjoindre plusieurs nouvelles, très-générales et souvent très-élégantes, en les déduisant toutes à l'aide de la méthode de l'intégration sous le signe $\int$, dont on a déjà bien longtemps reconnu la puissance et l'extrême fécondité. La différentiation des intégrales ainsi obtenues nous sera aussi d'un bon secours.

Pour abréger l'exposition et les citations faisons dès l'abord les conventions suivantes:

a, b, c, r, x, y désigneront toujours des quantités réelles positives, h, k deux quantités complexes à parties réelles positives; toutes les autres quantités qu'on rencontrera dans nos formules seront censées arbitraires, si l'inverse n'est indiqué explicitement pour chaque formule.

L'inégalité telle que $R(m) > -1$ sera écrite simplement $m > -1$.

Les mémoires principaux qui traitent notre sujet seront désignés: le premier mémoire de M. H. Weber au tome 69 du Journal für Mathematik par (α), le second mémoire du même auteur au tome 75 par (β), enfin les deux mémoires de Hankel au tome VIII. des Mathematische Annalen par (γ).

Enfin rappelons qu'on a

$$J^{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos z, \quad J^{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z$$

et que la limite de $\sqrt{x} \cdot J^m(x)$ est finie pour $x = \infty$, quelque soit m.

32. La formule (69) peut s'écrire

$$J^m(qx) = \frac{q^m x^m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{u}{2} - \frac{q^2 x^2}{2u}} \frac{dr}{u^{m+1}}, \quad u = k + ri, \quad m > -1.$$

Partant de cette formule on trouve aisément à l'aide de la méthode mentionnée

$$\omega_1 = \int_0^{\infty} J^m(qx) \cdot e^{-hx^2} \cdot x^{m+1}\, dx$$

$$= \frac{q^m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{u}{2}} \frac{dr}{u^{m+1}} \int_0^{\infty} e^{-\left(h + \frac{q^2}{2u}\right) x^2} x^{2m+1}\, dx;$$

mais le choix de la constante k dans l'expression de $J^m(qx)$ étant à notre volonté, nous pouvons évidemment lui attribuer une valeur telle que $R\left(h+\frac{q^2}{2u}\right)$ reste positive pour toutes les valeurs possibles de r, ce qui réduit l'intégrale prise par rapport à x à $\frac{1}{2}\frac{\Pi m}{\left(h+\frac{q^2}{2u}\right)^{m+1}}$. D'après cela nous pouvons écrire

$$\omega_1 = \frac{\Pi m\cdot q^m}{2h^{m+1}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{u}{2}}\frac{dr}{\left(u+\frac{q^2}{2h}\right)^{m+1}}$$

$$= \frac{\Pi m\cdot q^m\cdot e^{-\frac{q^2}{4h}}}{2h^{m+1}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}\left(u+\frac{q^2}{2h}\right)}\frac{dr}{\left(u+\frac{q^2}{2h}\right)^{m+1}},$$

et si l'on donne à k une valeur telle que $R\left(k+\frac{q^2}{2h}\right)>0$, on pourra remplacer $u+\frac{q^2}{2h}$ simplement par u, ce qui réduit l'intégrale à $\frac{1}{2^m\,\Pi m}$. Donc

$$\omega_1 = \int\limits_0^{\infty} J^m(qx)\cdot e^{-hx^2}\cdot x^{m+1}\,dx = \frac{q^m}{(2h)^{m+1}}\,e^{-\frac{q^2}{4h}},\quad m>-1,\ (\alpha),\ (\gamma).$$

Cette formule est fondamentale dans l'étude qui nous occupe.

33. Posons dans la formule qu'on vient d'obtenir $h=\frac{k+ri}{2a}=\frac{u}{2a}$ et après avoir multiplié le résultat par $\frac{1}{2\pi}e^{\frac{au}{2}-\frac{az^2}{2u}}\frac{dr}{u^{n+1}}$ intégrons par rapport à r entre les limites $-\infty$ et $+\infty$. On obtient pour $m>-1$, $n>-1$,

$$\int\limits_0^{\infty} J^m(qx)\cdot x^{m+1}\,dx\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a^2-x^2}{2a}u-\frac{az^2}{2u}}\frac{dr}{u^{n+1}}$$

$$= q^m a^{m+1}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{au}{2}-\frac{a(q^2+z^2)}{2u}}\frac{dr}{u^{m+n+2}},$$

ce qui se réduit en vertu des formules (69) et (70) à ce qui suit

$$\omega_2 = \int_0^a J^m(qx)\cdot x^{m+1} J^n\left(z\sqrt{a^2-x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n dx$$

$$= a^{m+n+1} q^m z^n \frac{J^{m+n+1}\left(a\sqrt{q^2+z^2}\right)}{\left(\sqrt{q^2+z^2}\right)^{m+n+1}},$$

ou encore, en posant $x = a\cos\varphi$,

$$\omega_2' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^m(aq\cos\varphi)\cdot J^n(az\sin\varphi)\cos^{m+1}\varphi\cdot\sin^{n+1}\varphi\cdot d\varphi$$

$$= \frac{q^m\cdot z^n}{a}\,\frac{J^{m+n+1}\left(a\sqrt{q^2+z^2}\right)}{\left(\sqrt{q^2+z^2}\right)^{m+n+1}},\quad m > -1,\quad n > -1.$$

34. Si l'on divise l'intégrale ω_2 par z^n et qu'on pose ensuite $z = 0$, on obtient

$$J^{m+n+1}(aq) = \frac{q^{n+1}}{2^n\,\Pi n\cdot a^{m+n+1}}\int_0^a J^m(qx)\cdot x^{m+1}(a^2-x^2)^n\,dx,$$

$$m > -1,\quad n > -1.$$

Posant $a = 1$, $m = -\frac{1}{2}$ et remplaçant $n+\frac{1}{2}$ par n on trouve la forme ordinaire de la fonction cylindrique, communiquée à la fin du No. 26.

Pour $n = 0$ la formule de ce No. devient

$$\frac{a^{m+1} J^{m+1}(aq)}{q} = \int_0^a J^m(qx)\cdot x^{m+1}\,dx,\quad m > -1.$$

35. Posant dans l'intégrale ω_2' $m = -\frac{1}{2}$ et remplaçant $n+\frac{1}{2}$ par m on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(aq\cos\varphi)\,J^{m-\frac{1}{2}}(az\sin\varphi)\sin^{m+\frac{1}{2}}\varphi\,d\varphi$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,z^{m-\frac{1}{2}}\,\frac{J^m\left(a\sqrt{q^2+z^2}\right)}{\left(\sqrt{q^2+z^2}\right)^m},\quad m > -\frac{1}{2},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{aqi\cos\varphi} J^{m-\frac{1}{2}}(az\sin\varphi)\cdot\sin^{m+\frac{1}{2}}\varphi\, d\varphi$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\cdot z^{m-\frac{1}{2}}\frac{J^m(a\sqrt{q^2+z^2})}{(\sqrt{q^2+z^2})^m},\quad m>-\frac{1}{2},$$

d'où, en posant $q=\lambda-\mu\cos\psi$, $z=\mu\sin\psi$ et remplaçant

$J^{m-\frac{1}{2}}(az\sin\varphi)$ par $\dfrac{(az\sin\varphi)^{m-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\cdot 2^{m-\frac{1}{2}}\Pi(m-1)}\displaystyle\int_0^\pi e^{iaz\sin\varphi\cos\chi}\sin^{2m-1}\chi\, d\chi$,

on obtient la formule suivante de M. Gegenbauer (Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. VIII.):

$$\frac{J^m(a\sqrt{\lambda^2-2\lambda\mu\cos\psi+\mu^2})}{(\sqrt{\lambda^2-2\lambda\mu\cos\psi+\mu^2})^m}$$

$$=\frac{a^m}{\pi\cdot 2^m\Pi(m-1)}\int_0^\pi d\varphi\int_0^\pi e^{ai[\lambda\cos\varphi-\mu(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\chi)]}\sin^{2m-1}\varphi\sin^{2m-1}\chi\, d\chi\cdot$$

En substituant encore les mêmes valeurs de q, z, multipliant le résultat par $\sin^{m+\frac{1}{2}}\psi\, d\psi$ et intégrant par rapport à ψ entre les limites 0 et π, on trouve

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{a\lambda i\cos\varphi}\sin^{m+\frac{1}{2}}\varphi\, d\varphi\int_0^\pi e^{-ia\mu\cos\psi\cos\varphi}J^{m-\frac{1}{2}}(a\mu\sin\psi\sin\varphi)\sin^{m+\frac{1}{2}}\psi\, d\psi$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\cdot\mu^{m-\frac{1}{2}}\int_0^\pi\frac{J^m(a\sqrt{\lambda^2-2\lambda\mu\cos\psi+\mu^2})}{(\sqrt{\lambda^2-2\lambda\mu\cos\psi+\mu_2})^m}\sin^{2m}\psi\, d\psi\cdot$$

Mais l'intégration par rapport à ψ au premier membre peut être effectuée au moyen de la première formule de ce No. et lintégrale dont il s'agit sera égale à $\sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}\sin^{m-\frac{1}{2}}\varphi\cdot\mu^{-\frac{1}{2}}J^m(a\mu)$. Donc en substituant et remarquant que l'intégrale par rapport à φ s'exprime aussi par une fonction cylindrique, on trouve finalement

$$J^m(a\lambda)\cdot J^m(a\mu)$$

$$=\frac{a^m\lambda^m\mu^m}{\sqrt{\pi}\cdot 2^m\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi\frac{J^m(a\sqrt{\lambda^2-2\lambda\mu\cos\psi+\mu^2})}{(\sqrt{\lambda^2-2\lambda\mu\cos\psi+\mu^2})^m}\sin^{2m}\psi d\psi,\quad m>-\frac{1}{2}\cdot$$

Cette formule est également due à M. Gegenbauer (Jahrb. üb. d. F. der Math. VII, 303).

36. Posons dans l'intégrale ω_1 $h = \frac{a}{2u} = \frac{a}{2(k+ri)}$, multiplions le résultat par $\frac{1}{2\pi} e^{\frac{au}{2} - \frac{az^2}{2u}} \frac{dr}{u^{n+1}}$ et intégrons par rapport à r entre les limites $-\infty$ et ∞. On obtient, en admettant $q=b$, $n>m>-1$,

$$\int_0^\infty J^m(bx) \cdot x^{m+1}\, dx \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{au}{2} - \frac{a(x^2+z^2)}{2u}} \frac{dr}{u^{n+1}}$$

$$= \frac{b^m}{a^{m+1}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a^2-b^2}{2a}u - \frac{az^2}{2u}} \frac{dr}{u^{n-m}}.$$

Les deux intégrales prises par rapport à r aux deux membres s'expriment au moyen des fonctions cylindriques en vertu des formules (69) et (70) et le résultat final sera

$$\omega_3 = \int_0^\infty J^m(bx) \cdot x^{m+1} \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\, dx$$

$$= \frac{b^m}{a^n} \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2}) \quad \text{pour} \quad a > b,$$

$$\omega_3 = 0 \quad \text{pour} \quad a < b, \quad n > m > -1.$$

Posant $z = c$, $\sqrt{x^2+c^2} = y$, on obtient une autre forme de l'intégrale ω_3:

$$\omega_3 = \int_c^\infty \frac{J^n(ay)}{y^{n-1}} J^m(b\sqrt{y^2-c^2})\, (\sqrt{y^2-c^2})^m\, dy$$

$$= \frac{b^m}{a^n} \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}\right)^{n-m-1} J^{n-m-1}(c\sqrt{a^2-b^2}) \quad \text{pour} \quad a > b,$$

$$\omega_3 = 0 \quad \text{pour} \quad a < b, \quad n > m > -1.$$

37. Divisons l'intégrale ω_3 par b^m et posons $b = 0$. Cela conduit à ces deux formules

$$J^{n-m-1}(az) = \frac{a^{m+1} z^{n-m-1}}{2^m \Pi m} \int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} x^{2m+1}\, dx,$$

$$J^{n-m-1}(ac) = \frac{a^{m+1} c^{n-m-1}}{2^m \Pi m} \int_c^\infty \frac{J^n(ay)}{y^{n-1}} (y^2-c^2)^m dy,$$

$$-1 < m < n > 2m + \tfrac{1}{2}.$$

Posant en particulier $n = \frac{1}{2}$ et remplaçant $m + \frac{1}{2}$ par $-m$ on obtient

$$J^m(ac) = \frac{2^{m+1}c^m}{\sqrt{\pi}\cdot\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)a^m}\int_c^\infty \frac{\sin ay\cdot dy}{(y^2-c^2)^{m+\frac{1}{2}}}, \quad -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}.$$

Pour $m = 0$ cela reproduit la formule de M. Mehler (Mathem. Ann. V, p. 141), (β).

Divisant la première formule de ce No. par z^{n-m-1} et posant $z = 0$, $2m - n + 1 = q$, on trouve

$$\omega_4 = \int_0^\infty J^n(ax)\cdot x^q\,dx = \frac{2^q}{a^{q+1}}\frac{\Pi\frac{n+q-1}{2}}{\Pi\frac{n-q-1}{2}}, \quad q < \frac{1}{2},\ n+q+1>0,\ (\alpha),\ (\gamma).$$

La seconde formule de ce No. donne pour $m = 0$

$$\frac{J^{n-1}(ac)}{ac^{n-1}} = \int_c^\infty \frac{J^n(ay)\,dy}{y^{n-1}}, \quad n > \frac{1}{2}.$$

38. Posons $z = 0$ dans l'intégrale ω_3 et l'on obtient

$$\omega_5 = \int_0^\infty J^m(bx)\cdot J^n(ax)\cdot x^{m-n+1}dx = \frac{b^m}{a^n}\,\frac{(a^2-b^2)^{n-m-1}}{2^{n-m-1}\Pi(n-m-1)} \text{ pour } a > b,$$

$$\omega_5 = 0 \text{ pour } a < b;\quad n > m > -1.$$

On n'a connu jusqu'à présent que quelques cas très-particuliers de cette formule importante, à savoir: 1^0, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 0(\beta)$; 2^0, $m = 0$, $n = \frac{1}{2}(\beta)$; 3^0, $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ le facteur discontinu de Dirichlet; 4^0, $m = 0$, $n = 1(\beta)$. Généralisant un peu ces cas particuliers on tire de la formule ω_5:

$$m = -\frac{1}{2};\quad \int_0^\infty \frac{J^n(ax)}{x^n}\cos bx\cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{(2a)^n}\,\frac{(a^2-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \text{ pour } a > b,$$

$$= 0 \text{ pour } a < b;\quad n > -\frac{1}{2}.$$

$$n = \frac{1}{2};\quad \int_0^\infty J^m(bx)\cdot x^m\cdot\sin(ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\cdot(2b)^m}{\Pi\left(-m-\frac{1}{2}\right)(a^2-b^2)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\text{pour } a > b,$$

$$= 0 \text{ pour } a < b;\ \frac{1}{2} > m > -\frac{1}{2}.$$

$$n=m+1;\quad \omega_6=\int_0^\infty J^m(bx)\cdot J^{m+1}(ax)\,dx=\frac{b^m}{a^{m+1}} \text{ pour } a>b,$$

$$\omega_6=0 \text{ pour } a<b;\ m>-1.$$

39. Remplaçons dans l'intégrale ω_1 h par $h+\frac{a}{2u}$ et après avoir multiplié le résultat par $\frac{1}{2\pi}e^{\frac{au}{2}}\frac{dr}{u^{m+1}}$ intégrons par rapport à r entre les limites $-\infty$ et ∞. On obtient ainsi

$$\int_0^\infty J^m(qx)\,x^{m+1}e^{-hx^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{au}{2}-\frac{ax^2}{2u}}\frac{dr}{u^{m+1}}$$

$$=\frac{q^m}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{au}{2}-\frac{q^2}{4h+\frac{2a}{u}}}\frac{dr}{\left(hu+\frac{a}{2}\right)^{m+1}}.$$

Le premier membre se réduit immédiatement à

$$\int_0^\infty J^m(qx)J^m(ax)e^{-hx^2}x\,dx;$$

quant au second membre, il se transforme en

$$\frac{q^m}{(2h)^{m+1}}e^{-\frac{q^2+a^2}{4h}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{a}{2}\left(u+\frac{a}{2h}\right)+\frac{aq^2}{8h^2\left(u+\frac{a}{2h}\right)}}\frac{dr}{\left(u+\frac{a}{2h}\right)^{m+1}},$$

et comme il est évidemment permis de remplacer sous l'intégrale $u+\frac{a}{2h}$ simplement par u, ce qui équivaut à un changement de la constante k qui entre dans $u=k+ri$, le second membre se réduit finalement à $\frac{i^m}{2h}e^{-\frac{q^2+a^2}{4h}}J^m\left(\frac{aq}{2hi}\right)$. Donc

$$\omega_7=\int_0^\infty J^m(qx)\cdot J^m(ax)\cdot e^{-hx^2}x\,dx=\frac{i^m}{2h}e^{-\frac{a^2+q^2}{4h}}J^m\left(\frac{aq}{2hi}\right),$$

$$m>-1,\ (\alpha),\ (\gamma).$$

Il est évident que la formule reste vraie lorsqu'on change a en une quantité quelconque p.

40. La formule qu'on vient d'écrire conduit aisément à deux développements des fonctions continues en séries procédant suivant les polynomes entiers de la variable.

Le premier de ces développements s'obtient comme il suit.

Posons $h = 1$, $x^2 = y$, $a = 2i\sqrt{r}$, $q = 2i\sqrt{s}$ et désignons

$$e^{-r}\frac{J^m(2i\sqrt{ry})}{(i\sqrt{ry})^m} = \varphi_m(r, y).$$

La formule ω_7 prendra la forme

$$\int_0^\infty e^{-y}y^m\cdot\varphi_m(r,y)\cdot\varphi_m(s,y)\,dy = \frac{J^m(2i\sqrt{rs})}{(i\sqrt{rs})^m} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{r^n s^n}{\Pi n\cdot\Pi(m+n)}.$$

Mais en développant $\varphi_m(r, y)$ suivant les puissances de r on trouve

$$\varphi_m(r, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} T_m^n(y)\,.\,r^n,$$

où

$$T_m^n = \frac{y^n}{\Pi n\,\Pi(m+n)\,\Pi 0} - \frac{y^{n-1}}{\Pi(n-1)\,\Pi(m+n-1)\,\Pi 1} + \frac{y^{n-2}}{\Pi(n-2)\,\Pi(m+n-2)\,\Pi 2} - \ldots$$

Donc, en substituant les développements de $\varphi_m(r, y)$, $\varphi_m(s, y)$, on obtient

$$\int_0^\infty e^{-y}y^m\,T_m^n(y)\cdot T_m^{n_1}(y)\,dy = 0, \quad (n_1 \text{ différent de } n),$$

$$\int_0^\infty e^{-y}y^m\,T_m^n(y)\cdot T_m^n(y)\cdot dy = \frac{1}{\Pi n\,\Pi(m+n)}.$$

Les polynomes $T_m^n(y)$ possédent les propriétés suivantes

$$(m+n+1)\frac{dT_m^{n+1}}{dy} = T_m^n - \frac{dT_m^n}{dy},$$

$$\frac{T_m^{n-1}}{y^{n-1}} = -\frac{d}{d\frac{1}{y}}\,\frac{T_m^n}{y^n},$$

et satisfont à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2T_m^n}{dy^2} - \left(1 - \frac{m+1}{y}\right)\frac{dT_m^n}{dy} + \frac{n}{y}T_m^n = 0.$$

Pour développer une fonction $f(x)$ en une série de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n T_m^n(x),$$

multiplions ce développement supposé par $e^{-x} x^m T_m^n(x)$ et intégrons depuis 0 jusqu'à ∞. On obtient

$$a_n = \Pi n \cdot \Pi(m+n) \int_0^\infty f(x) \cdot e^{-x} x^m \cdot T_m^n(x) \cdot dx .$$

Un des développements les plus importants de ce genre s'obtient de la formule ω_1, lorsqu'on y pose $h = 1 - k$, $x^2 = y$, $y = 2i\sqrt{r}$: on obtient

$$\int_0^\infty e^{ky} \cdot e^{-y} \cdot y^m \varphi_m(r, y) dy = \frac{e^{\frac{kr}{1-k}}}{(1-k)^{m+1}},$$

d'où l'on conclut

$$\int_0^\infty e^{ky} \cdot e^{-y} y^m \cdot T_m^n(y) dy = \frac{k^n}{\Pi n (1-k)^{m+n+1}},$$

et par conséquent en vertu de la valeur de a_n,

$$e^{ky} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Pi(m+n) k^n}{(1-k)^{m+n+1}} T_m^n(y), \qquad Rk < 1.$$

Cela nous fournit la fonction génératrice de $\Pi(m+n) T_m^n$, en posant $\frac{k}{1-k} = \alpha$, savoir

$$\frac{e^{\frac{\alpha y}{1+\alpha}}}{(1+\alpha)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \Pi(m+n) \cdot T_m^n(y) \cdot \alpha^n.$$

La même formule développé suivant les puissances de k donne

$$\frac{y^n}{\Pi n \cdot \Pi(m+n)} = \frac{T_m^n(y)}{\Pi 0} + \frac{T_m^{n-1}(y)}{\Pi 1} + \frac{T_m^{n-2}(y)}{\Pi 2} + \cdots + \frac{T_m^0(y)}{\Pi n}.$$

41. Revenons encore à la formule ω_7 et posons-y $h = 1$, $a = 2ri$, $q = 2si$. On aura

$$2\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot x^{2m+1} \varphi_m(r^2, x^2) \cdot \varphi_m(s^2, x^2) dx = \frac{J^m(2rsi)}{(rsi)^m}.$$

Supposons que $2m + 1$ soit un nombre entier pair ou zéro et écrivons la formule comme ça

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2m+1} \cdot \varphi_m(r^2, x^2) \cdot \varphi_m(s^2, x^2)\, dx = \frac{J^m(2rsi)}{(rsi)^m}.$$

On aura aussi en remplaçant m par $m+1$ et multipliant le résultat par rs

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2m+1} \cdot r x \varphi_{m+1}(r^2, x^2) \cdot s x \varphi_{m+1}(s^2, x^2) = rs \frac{J^{m+1}(2rsi)}{(rsi)^{m+1}}.$$

Si l'on ajoute ces deux formules on obtient un résultat qui peut s'écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2m+1} [\varphi_m(r^2, x^2) + r x \varphi_{m+1}(r^2, x^2] \cdot [\varphi_m(s^2, x^2) + s x \cdot \varphi_{m+1}(s^2, x^2)]\, dx$$
$$= \frac{J^m(2rsi)}{(rsi)^m} + rs \frac{J^{m+1}(2rsi)}{(rsi)^{m+1}},$$

ou, en posant $2m + 1 = 2c$ et désignant

$$\varphi_m(r^2, x^2) + r x \varphi_{m+1}(r^2, x^2) = \Phi_c(r, x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2c} \Phi_c(r, x) \cdot \Phi_c(s, x)\, dx = \frac{J^{c-\frac{1}{2}}(2rsi)}{(rsi)^{c-\frac{1}{2}}} + rs \frac{J^{c+\frac{1}{2}}(2rsi)}{(rsi)^{c+\frac{1}{2}}}.$$

La fonction $\Phi_c(r, x)$ se développe en série toujours convergente

$$\Phi_c(r, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_c^n(x) \cdot r^n,$$

où

$$U_c^{2n}(x) = T^n_{c-\frac{1}{2}}(x^2), \quad U_c^{2n+1} = x T^n_{c+\frac{1}{2}}(x^2),$$

et en substituant les séries $\Phi_c(r, x)$, $\Phi_c(s, x)$ dans la formule précédente, on conclut

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2c}\, U_c^n(x) \cdot U_c^{n_1}(x)\, dx = 0, \quad n_1 > n,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2c}\, U_c^n(x) \cdot U_c^n(x)\, dx = \frac{1}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right) \Pi\left[\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{1}{2} + c\right]},$$

où $\left(\frac{n}{2}\right)$ désigne l'entier de $\frac{n}{2}$.

Les fonctions U_0^n coïncident avec celles que M. Hermite a considérées au Comptes rendus 1864, t. LVIII, p. 93.

42. Revenons maintenant à la formule (54) pour en obtenir une autre qui nous sera très-utile immédiatement et dans la suite.

Posant dans la formule (54) $x = hi$ et remplaçant ensuite h par xh on trouve

$$i^{-n} \cdot J^n(xhi) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\pi e^{xh\cos\sigma}\cos n\sigma\, d\sigma - \sin n\pi \int_1^\infty e^{-\frac{xh}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)} \frac{ds}{s^{n+1}}\right\}$$

et encore, en changeant n en $-n$,

$$i^n J^{-n}(xhi) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\pi e^{xh\cos\sigma}\cos n\sigma\, d\sigma + \sin n\pi \int_1^\infty e^{-\frac{xh}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)} s^{n-1} ds\right\}.$$

Ces deux formules fournissent par la soustraction

$$\int_1^x e^{-\frac{xh}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)} (s^n + s^{-n}) \frac{ds}{s} = \frac{\pi}{\sin n\pi}\left\{i^n J^{-n}(xhi) - i^{-n} J^n(xhi)\right\}.$$

Mais si l'on écrit séparément les deux termes du premier membre et qu'on transforme le premier terme en posant $xs = r$, le second terme en posant $\frac{x}{s} = r$, on obtient la formule dont il s'agit:

$$\int_0^x e^{-\frac{h}{2}\left(r+\frac{x^2}{r}\right)} r^{n-1} dr = \frac{\pi x^n}{\sin n\pi}\left\{i^n J^{-n}(xhi) - i^{-n} J^n(xhi)\right\}.$$

Pour $n = -\frac{1}{2}$ et $n = \frac{1}{2}$ elle donne les formules de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-\frac{h}{2}\left(r+\frac{x^2}{r}\right)} \frac{dr}{r\sqrt{r}} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2\pi}{h}} \cdot e^{-xh},$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{h}{2}\left(r+\frac{x^2}{r}\right)} \frac{dr}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{2\pi}{h}} \cdot e^{-xh}.$$

Pour n entier on détermine la valeur du second membre selon la régle ordinaire du calcul différentiel et l'on trouve

$$\int_0^\infty e^{-\frac{h}{2}\left(r+\frac{x^2}{r}\right)} r^{n-1} dr = (xi)^n\left\{\pi i J^n(xhi) - Y^n(xhi)\right\}.$$

43. Remplaçons dans l'intégrale $\omega_1 h$ par $\frac{h}{2r}$ et après avoir mul-

tiplié le résultat successivement par $e^{-\frac{hr}{2}}\frac{dr}{r\sqrt{r}}$, $e^{-\frac{hr}{2}}\frac{dr}{\sqrt{r}}$ intégrons par rapport à r entre les limites 0 et ∞. On obtient ainsi les deux formules

$$\omega_8 = \int_0^\infty J^m(qx)e^{-hx}x^m \;dx = \frac{\Pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{(2q)^m}{(q^2+h^2)^{m+\frac{1}{2}}},\quad m > -\frac{1}{2},$$

$$\omega_8' = \int_0^\infty J^m(qx)e^{-hx}x^{m+1}\,dx = \frac{\Pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{2h(2q)^m}{(q^2+h^3)^{m+\frac{3}{2}}};\quad m > -1,$$

dont la seconde s'obtient de la première au moyen de la différentiation par rapport à h. Ces deux formules ont lieu seulement lorsque $R(h) > \pm J(q)$ comme cela est nécessaire pour la convergence des intégrales à la limite supérieure.

44. La formule ω_7 posséde une analogie manifeste avec la formule ω_1, surtout lorsqu'on la réduit à la forme

$$\omega_7 = \int_0^\infty J^m(px)J^m(qx)e^{-hx^2}x\,dx$$

$$= \frac{p^m q^m}{\sqrt{\pi}\,2^m\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{(2h)^{m+1}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{p^2+q^2-2pqt}{4h}}(1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}\,dt,\; m > -\frac{1}{2}.$$

Cela donne l'idée de soumettre la formule ω_7 aux mêmes opérations qui, appliquées à ω_1, ont conduit à ω_2, ω_3, ω_7, ω_8.

Ainsi en posant $h = \frac{u}{2c}$, multipliant par $\frac{1}{2\pi}e^{\frac{cu}{2}-\frac{cz^2}{2u}}\frac{dr}{u^{n+1}}$ et intégrant par rapport à r de $-\infty$ jusqu'à ∞, on trouve

$$\omega_9 = \int_0^c J^m(px)\cdot J^m(qx)\cdot J^n\left(z\sqrt{c^2-x^2}\right)\left(\sqrt{c^2-x^2}\right)^n dx$$

$$= \frac{p^m q^m z^n c^{m+n+1}}{\sqrt{\pi}\,2^m\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\frac{J^{m+n+1}\left(c\sqrt{z^2+p^2+q^2-2pqt}\right)}{\left(\sqrt{z^2+p^2+q^2-2pqt}\right)^{m+n+1}}(1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}\,dt,$$

$$m > -\frac{1}{2},\; n > -1.$$

On obtient de là pour $n = 0$, $z = 0$, en différentiant le résultat par rapport à c,

$$J^m(pc)J^m(qc) = \frac{p^m q^m c^m}{\sqrt{\pi}\, 2^m \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} \frac{J^m(c\sqrt{p^2+q^2-2pqt})}{(\sqrt{p^2+q^2-2pqt})^m} (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} dt,$$

$$m > -\frac{1}{2},$$

ce qui est la formule de M. Gegenbauer déduite au No. 35.

45. Posons maintenant dans l'intégrale ω_7 $h = \frac{c}{2u}$, multiplions le résultat par $\frac{1}{2\pi} e^{\frac{cu}{2} - \frac{cz^2}{2u}} \frac{dr}{u^{n+1}}$ et intégrons par rapport à r entre les limites $-\infty$ et ∞. On obtient, en supposant $p = a$, $q = b$,

$$\omega_{10} = \int_0^\infty J^m(ax)\, J^m(bx)\, \frac{J^n(c\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\, x\,dx$$

$$= \frac{a^m b^m c^{-n} z^{m-n+1}}{\sqrt{\pi}\, 2^m \Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \int_\alpha^1 J^{n-m-1}(z\sqrt{c^2-a^2-b^2+2abt})$$

$$\times (\sqrt{c^2-a^2-b^2+2abt})^{n-m-1} (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} dt,$$

$$n > m > -\frac{1}{2},$$

où

$$\alpha = 1 \qquad \text{pour } c^2 < (a-b)^2,$$

$$\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad \text{pour } (a-b)^2 < c^2 < (a+b)^2,$$

$$\alpha = -1 \qquad \text{pour } c^2 > (a+b)^2.$$

Pour $z = 0$, $n = m+1$ on obtient, en multipliant la formule par c^{m+1} et différentiant par rapport à c,

$$\omega_{11} = \int_0^\infty J^m(ax)\cdot J^m(bx)\cdot J^m(cx)\, \frac{dx}{x^{m-1}}$$

$$= \frac{[(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]^{m-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\, 2^{3m-1}\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right) a^m b^m c^m}, \quad m > -\frac{1}{2},$$

ou $\omega_{11} = 0$ suivant qu'on peut former un triangle ayant pour côtés a, b, c ou non.

Pour $c^2 = a^2+b^2$, $z = 0$ la formule ω_{10} donne

$$\int_0^\infty J^m(ax) J^m(bx)\, J^n(x\sqrt{a^2+b^2}) \frac{dx}{x^{n-1}} = \frac{a^{n-1} b^{n-1}}{(\sqrt{a^2+b^2})^n \cdot 2^n \Pi \frac{n+m-1}{2}\, \Pi \frac{n-m-1}{2}},$$

$$n > m > -\frac{1}{2}.$$

46. Les formules que nous avons développées conduisent à plusieurs autres souvent très-remarquables.

Multiplions l'intégrale ω_6 par $b f(b)\,db$ et intégrons entre les limites 0 et c. On trouve

$$a^{m+1}\int_0^\infty J^{m+1}(ax)\,dx\int_0^c f(b)\cdot J^m(bx)\cdot b\,db = \int_0^\alpha b^{m+1} f(b)\,db, \quad m > -1,$$

où α désigne la plus petite des deux quantités a, c.

En différentiant cette formule par rapport à a, on obtient

$$\int_0^\infty J^m(ax)\,x\,dx\int_0^c f(b)\cdot J^m(bx)\cdot b\,db = \begin{cases} f(a) & \text{pour } a < c, \\ 0 & \text{pour } a > c; \quad m > -1. \end{cases}$$

Cette formule a été établie par Hankel pour m entier. Pour $m = \pm\frac{1}{2}$ elle reproduit les formules de Fourier.

47. Soit dans la première formule du No. précédent $c > a$ et par conséquent $\alpha = a$. Remplaçant $J^{m+1}(ax)$ par son expression que l'on obtient de la formule du No. 34., lorsqu'on substitue $m - n$ au lieu de m, à savoir

$$J^{m+1}(ax) = \frac{x^{n+1}}{2^n \Pi n\, a^{m+1}}\int_0^a J^{m-n}(xy)\cdot y^{m-n+1}(a^2-y^2)^n\,dy, \quad m+1 > n > -1,$$

on trouve

$$\int_0^a b^{m+1} f(b)\,db$$

$$= \frac{1}{2^n \Pi n}\int_0^\infty x^{n+1}\,dx\int_0^a J^{m-n}(xy)(a^2-y^2)^n y^{m-n+1}\,dy\int_0^c f(b)\,J^m(bx)\,b\,db.$$

Mais l'intégration par rapport à x peut être effectuée au moyen de la formule ω_5, qui donne par la substitution de $m - n$ au lieu de n, y au lieu de a,

$$\int_0^\infty J^m(bx)\,J^{m-n}(yx)\,x^{n+1}\,dx = \frac{b^m}{y^{m-n}}\,\frac{(y^2-b^2)^{-n-1}}{2^{-n-1}\Pi(-n-1)} \text{ pour } y > b,$$

$$= 0 \text{ pour } y < b; \; n < 0, \; m > -1.$$

Donc en introduisant cette valeur dans la formule précédente et posant $b^{m+1} f(b) = F'(b)$, $n = -p$, on aura

$$F(a) - F(0) = \frac{2\sin p\pi}{\pi}\int_0^1 (a^2-y^2)^{-p}\,y\,dy\int_0^y F'(b)(y^2-b^2)^{p-1}\,db, \quad 0 < p < 1,$$

ou encore, en posant $y = ax$, $b = yt$,

$$F(a) - F(0) = \frac{2a \sin p\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{x^{2p}\,dx}{(1-x^2)^p} \int_0^1 \frac{F'(axt)\,dt}{(1-t^2)^{1-p}}, \quad 0 < p < 1.$$

C'est la généralisation, d'ailleurs connue, d'une formule célèbre d'Abel qui s'obtient pour $p = \frac{1}{2}$.

48. Multipliant la formule générale ω_3 respectivement par $f(b)\,b\,db$, $F(a)\,a\,da$ et intégrant par rapport à b entre les limites 0 et c, par rapport à a entre les limites c et ∞, on trouve, en supposant toujours $n > m > -1$,

$$a^n \int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} x^{m+1}\,dx \int_0^c f(b)\,J^m(bx)\,b\,db$$

$$= \int_0^\alpha f(b)\,J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2}) \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} b^{m+1}\,db,$$

$$\int_0^\infty \frac{J^m(bx)\,x^{m+1}\,dx}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} \int_c^\infty F(a)\,J^n(a\sqrt{x^2+z^2})\,a\,da$$

$$= b^m \int_\beta^\infty F(a)\,J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2}) \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} \frac{da}{a^{n-1}},$$

où α désigne la plus petite des deux quantités a, c et β désigne la plus grande des deux quantités b, c.

Posant $z = 0$ on trouve deux formules moins générales

Pour les déterminations spéciales des fonctions $f(b)$, $F(a)$ ainsi que de la limite c ces formules fournissent une foule d'autres qui ne contiennent plus que les intégrales simples.

Il faut choisir pour cela les fonctions $f(b)$, $F(a)$ et la constante c de telle manière que les intégrales

$$\int_0^c f(b)\,J^m(bx)\,b\,db, \quad \int_c^\infty F(a)\,J^n(a\sqrt{x^2+z^2})\,a\,da$$

puissent être exprimées en termes finies au moyen de fonctions connues.

Les cas où cela réussit sans que l'on donne à c une valeur spéciale sont ceux que nous avons considérées dans la section précédente; ceux où c a une signification spéciale sont à chercher parmi les formules de cette section.

49. Le cas le plus simple est celui qui correspond à $f(b) = b^m$, $F(a) = a^{-n}$. On trouve en ce cas

$$\omega_{12}=\int\limits_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} J^{m+1}(cx)x^m dx$$

$$=a^{-n}c^{-m-1}\int\limits_0^a J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{z}}\right)^{n-m-1} b^{2m+1}db,$$

$$n>m>-1,$$

$$\omega_{13}=\int\limits_0^\infty \frac{J^{n-1}(c\sqrt{x^2+y^2})}{(\sqrt{x^2+y^2})^{n+1}} J^m(bx)x^{m+1}dx$$

$$=b^m c^{n-1}\int\limits_\beta^\infty J^{n-m-1}(y\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{y}\right)^{n-m-1}\frac{da}{a^{2n-1}},$$

$$\tfrac{1}{2}<n>m>-1.$$

Supposant $c>a$ dans la première de ces formules et transformant l'intégrale au second membre par la substitution $y=\sqrt{a^2-b^2}$, on trouve

$$\omega_{12}=\int\limits_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} J^{m+1}(cx)\,x^m dx=\frac{2^m\Pi m}{c^{m+1}}\frac{J^n(az)}{z^n},$$

$$n>m>-1,\qquad c>a,$$

d'où l'on tire pour $z=0$

$$\int\limits_0^\infty J^n(ax)\cdot J^{m+1}(cx)\,x^{m-n}dx=\frac{2^m\Pi m}{2^n\Pi n}\frac{a^n}{c^{m+1}},$$

$$n>m>-1,\qquad c>a.$$

La formule ω_{12} donne encore pour $z=0$, $c<a$

$$\int\limits_0^\infty J^n(ax)\,J^{m+1}(cx)\,x^{m-n}dx$$

$$=\frac{a^{-n}c^{-m-1}}{2^{n-m-1}\Pi(n-m-1)}\int\limits_0^c (a^2-b^2)^{n-m-1}b^{2m+1}db.$$

Le cas particulier correspondant à $m=-\frac{1}{2}$, $n=0$ a été remarqué par M. Weber (β).

Supposant $b>c$ dans l'intégrale ω_{13} et substituant au second membre $\sqrt{a^2-b^2}=x$, on obtient

$$\omega_{13} = \int_0^\infty \frac{J^{n-1}(c\sqrt{x^2+y^2})}{(\sqrt{x^2+y^2})^{n+1}} J^m(bx)\, x^{m+1}\, dx$$

$$= \frac{b^m c^{n-1}}{y^{n-m-1}} \int_0^\infty J^{n-m-1}(yx) \frac{x^{n-m}\, dx}{(x^2+b^2)^n}, \quad \frac{1}{2} < n > m > -1.$$

L'intégrale qui entre au second membre s'exprime au moyen des fonctions cylindriques, comme nous le ferons voir tout-à-l'heure.

50. Considérons l'intégrale

$$\omega_{14} = \int_0^\infty \frac{J^m(bx)\, x^{m+1}\, dx}{(x^2+h^2)^{n+1}}, \quad -1 < m < 2n + \frac{3}{2},$$

et remarquons qu'on a

$$\left(\frac{h}{x^2+h^2}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(h+\frac{x^2}{h}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\Pi n} \int_0^\infty e^{-\left(h+\frac{x^2}{h}\right)y} y^n\, dy.$$

En vertu de cette formule l'intégrale ω_{14} se transforme en la suivante

$$\omega_{14} = \frac{1}{\Pi n \cdot h^{n+1}} \int_0^\infty e^{-hy} y^n\, dy \int_0^\infty J^m(bx)\, e^{-\frac{yx^2}{h}} x^{m+1}\, dx,$$

ou, en effectuant l'intégration par rapport à x au moyen de la formule ω_1,

$$\omega_{14} = \frac{b^m h^{m-n}}{2^{m+1}\Pi n} \int_0^\infty e^{-h\left(y+\frac{b^2}{4y}\right)} y^{n-m-1}\, dy$$

$$= \frac{b^m h^{m-n}}{2^{n+1}\Pi n} \int_0^\infty e^{-\frac{h}{2}\left(x+\frac{b^2}{x}\right)} x^{n-m-1}\, dx.$$

Donc en vertu de la formule du No. 42.

$$\omega_{14} = \int_0^\infty \frac{J^m(bx)\, x^{m+1}\, dx}{(x^2+h^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{\pi b^n h^{m-n}}{2^{n+1}\Pi n \cdot \sin(n-m)\pi} \left\{ i^{n-m} J^{m-n}(bhi) - i^{m-n} J^{n-m}(bhi) \right\},$$

$$n > -1, \quad -1 < m < 2n + \frac{3}{2},$$

et lorsque $n - m =$ nombre entier l,

$$\int_0^\infty \frac{J^m(bx)\, x^{m+1}\, dx}{(x^2+h^2)^{m+l+1}} = \frac{b^{m+l} h^{-l}\, i^l}{2^{m+l+1}\, \Pi(m+l)} \left\{\pi i\, J^l(bhi) - Y^l(bhi)\right\}.$$

Cette dernière formule a été établie par Hankel pour m entier.

D'après cela on écrira

$$\omega_{13} = \int_0^\infty \frac{J^{n-1}(c\sqrt{x^2+y^2})}{(\sqrt{x^2+y^2})^{n+1}}\, J^m(bx)\, x^{m+1}\, dx$$

$$= \frac{\pi c^{n-1} y^m}{2^n\, \Pi(n-1) \sin m\pi} \left\{i^m J^{-m}(byi) - i^{-m} J^m(byi)\right\},$$

$$b > c, \quad \tfrac{1}{2} < n > m > -1.$$

51. Posons maintenant $f(b) = b^m J^p(q\sqrt{c^2-b^2})\,(\sqrt{c^2-b^2})^p$, $F(a) = a^{-n} J^p(y\sqrt{a^2-c^2})\,(\sqrt{a^2-c^2})^p$ et l'on trouvera en vertu des formules ω_2 et ω_3:

$$a^n \cdot c^{m+p+1} \int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{x^2+z^2})^n}\, \frac{J^{m+p+1}(c\sqrt{x^2+q^2})}{(\sqrt{x^2+q^2})^{m+p+1}}\, x^{2m+1}\, dx$$

$$= \int_0^a J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2}) \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} J^p(q\sqrt{c^2-b^2})$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{q}\right)^p b^{2m+1}\, db,$$

$$a < c, \quad n > m > -1, \quad p > -1;$$

$$\int_c^\infty J^{n-m-1}(a\sqrt{x^2-b^2}) \left(\frac{\sqrt{x^2-b^2}}{a}\right)^{n-m-1} J^p(y\sqrt{x^2-c^2}) \left(\frac{\sqrt{x^2-c^2}}{y}\right)^p \frac{dx}{x^{2n-1}}$$

$$= \int_y^\infty J^{n-p-1}(c\sqrt{r^2-y^2}) \left(\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{c}\right)^{n-p-1} J^m(b\sqrt{r^2-a^2}) \left(\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{b}\right)^m \frac{dr}{r^{2n-1}},$$

$$c > b, \quad y > a, \quad n > m > -1, \quad n > p > -1.$$

La première de ces formules fournit pour $z = 0$, $q = 0$, lorsqu'on remplace $m + p + 1$ simplement par p,

$$\int_0^\infty J^n(ax) \cdot J^p(cx)\, x^{2m-n-p+1}\, dx$$

$$= \frac{2^{2m-n-p+2} a^{-n} c^{-p}}{\Pi(n-m-1)\, \Pi(p-m-1)} \int_0^a (a^2-b^2)^{n-m-1} (c^2-b^2)^{p-m-1}\, b^{2m+1}\, db,$$

$$a < c, \quad n > m > -1, \quad p > m > -1,$$

4*

où l'intégrale au second membre s'exprime par

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Pi m\cdot\Pi(n-m-1)}{\Pi n}\,a^{2n}\,c^{2p-2m-2}\,F\left(m-p+1,\ m+1,\ n+1,\frac{a^2}{c^2}\right).$$

52. Soit $c=\infty$ dans la première formule du No. 48., $c=0$ dans la seconde. On aura

$$a^n\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\,x^{m+1}\,dx\int_0^\infty f(b)\,J^m(bx)\cdot b\,db$$

$$=\int_0^a f(b)\cdot J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} b^{m+1}\,db$$

$$=\int_0^a (\sqrt{a^2-x^2})^m\,f(\sqrt{a^2-x^2})\,\frac{J^{n-m-1}(zx)}{z^{n-m-1}}\,x^{n-m}\,dx,$$

$$n>m>-1,$$

$$\int_0^\infty \frac{J^m(bx)\,x^{m+1}\,dx}{(\sqrt{x^2+c^2})^n}\int_0^\infty F(a)\,J^n(a\sqrt{x^2+c^2})\cdot a\,da$$

$$=b^m\int_b^\infty F(a)\,J^{n-m-1}(c\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}\right)^{n-m-1}\frac{da}{a^{n-1}}$$

$$=b^m\int_0^\infty \frac{F(\sqrt{x^2+b^2})}{(\sqrt{x^2+b^2})^n}\,\frac{J^{n-m-1}(cx)}{c^{n-m-1}}\,x^{n-m}\,dx,$$

$$\tfrac{1}{2}<n>m-1.$$

53. Soit $f(b)=b^m e^{-\frac{b^2}{4h}}$. On aura

$$\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\,e^{-hx^2}\,x^{2m+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{a^n(2h)^{m+1}}\int_0^a J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} e^{-\frac{b^2}{4h}}\,b^{2m+1}\,db,$$

$$n>m>-1,$$

et pour $z=0$

$$\int_0^\infty J^n(ax)\, e^{-hx^2} x^{2m-n+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2^n \Pi(n-m-1)\, a^n h^{m+1}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{4h}} (a^2-x^2)^{n-m-1} x^{2m+1}\, dx,$$

$$n > m > -1.$$

Soit $f(b) = b^m \frac{J^p(c\sqrt{b^2+q^2})}{(\sqrt{b^2+q^2})^p}$. On trouve, en supposant
$$n > m > -1, \quad p > m > -1,$$

$$a^n \int_0^c \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} J^{p-m-1}(q\sqrt{c^2-x^2}) \left(\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{q}\right)^{p-m-1} \cdot x^{2m+1}\, dx$$

$$= c^p \int_0^a \frac{J^p(c\sqrt{b^2+q^2})}{(\sqrt{b^2+q^2})^p} J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2}) \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} b^{2m+1}\, db,$$

d'où, en posant $p = m+1$, $q = 0$ et différentiant le résultat par rapport à c on retrouve la formule ω_2. Ainsi cette dernière est la conséquence de la formule ω_3.

Soit $f(b) = J^m(bqi)\, e^{-\frac{b^2}{4h}}$. On obtient pour $n > m > -1$,

$$\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} J^m(2hqx)\, e^{-hx^2} x^{m+1}\, dx$$

$$= \frac{e^{-hq^2}}{2hi^m a^n} \int_0^a J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2}) \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} J^m(bqi)\, e^{-\frac{b^2}{4h}} b^{m+1}\, db,$$

d'où pour $z = 0$, $2hq = p$,

$$\int_0^\infty J^n(ax)\, J^m(px)\, e^{-hx^2} x^{m-n+1}\, dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{b^2}{4h}}}{2^{n-m}\Pi(n-m-1)\, i^m a^n h} \int_0^a J^m\!\left(\frac{bpi}{2h}\right) e^{-\frac{b^2}{4h}} (a^2-b^2)^{n-m-1} b^{m+1}\, db.$$

Soit $f(b) = e^{-hb} \cdot b^m$. On aura, en supposant toujours $n > m > -1$,

$$\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} \frac{x^{2m+1}\,dx}{(x^2+h^2)^{m+\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{m+1}\Pi\left(m+\frac{1}{2}\right)a^n h}\int_0^a J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} e^{-hb}\,b^{2m+1}\,db,$$

d'où pour $z=0$

$$\int_0^\infty \frac{J^n(ax)}{x^n}\cdot\frac{x^{2m+1}\,dx}{(x^2+h^2)^{m+\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n\Pi(n-m-1)\Pi\left(m+\frac{1}{2}\right)a^n h}\int_0^a e^{-hb}(a^2-b^2)^{n-m-1}b^{2m+1}\,db.$$

On en tire pour $m=-\frac{1}{2}$ en remplaçant e^{-hb} par

$\frac{e^{hb}+e^{-hb}}{2}-\frac{e^{hb}-e^{-hb}}{2}$ et posant $b=ay$, $n>-\frac{1}{2}$,

$$\int_0^\infty \frac{J^n(ax)}{x^n}\frac{dx}{x^2+h^2}$$

$$= \frac{\pi}{2h}\frac{J^n(ahi)}{(hi)^n} - \frac{\sqrt{\pi}\cdot a^n}{2^{n+1}\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)h}\int_0^1 (e^{ahy}-e^{-ahy})(1-y^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dy.$$

Un cas particulier ($n=0$) a été calculé par M. Weber d'une manière inexacte: dans sa formule manque le second terme ((β) § 2., form. (15)).

54. Considérons maintenant quelques cas particuliers de la seconde formule du No. 52.

Soit $F(a)=a^n\cdot\frac{J^p(y\sqrt{a^2+q^2})}{(\sqrt{a^2+q^2})^p}$, où $p>n>-1$. On obtient en vertu de la valeur ω_3

$$\omega_{15} = \int_0^\infty \frac{J^p(y\sqrt{a^2+q^2})}{(\sqrt{a^2+q^2})^p}\cdot J^{n-m-1}(c\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}\right)^{n-m-1} a\,da$$

$$= y^{-p}\int_0^{\sqrt{y^2-c^2}} J^{p-n-1}(q\sqrt{y^2-c^2-x^2})\left(\frac{\sqrt{y^2-c^2-x^2}}{q}\right)^{p-n-1}\frac{J^m(bx)}{b^m}x^{m+1}\,dx,$$

pour $y>c$,

$$\omega_{15}=0 \text{ pour } y<c,\quad p>n>m>-1.$$

L'intégrale ω_{15} ne différe essentiellement de l'intégrale ω_3 et se réduit à cette dernière par la transformation $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Si donc on calcule sa valeur selon la formule ω_3, on obtiendra, en remplaçant $p - n - 1$ par une seule lettre n et supposant $y > c$,

$$\left(\frac{\sqrt{y^2-c^2}}{\sqrt{b^2+q^2}}\right)^{n+m+1} J^{n+m+1}\left(\sqrt{b^2+q^2}\cdot\sqrt{y^2-c^2}\right)$$
$$= \int_0^{\sqrt{y^2-c^2}} J^n\left(q\sqrt{y^2-c^2-x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{y^2-c^2-x^2}}{q}\right)^n \frac{J^m(bx)}{b^m}\, x^{m+1}\, dx,$$

ce qui n'est autre chose que la formule ω_2.

Soit $F(a) = e^{-ha} a^{n-1}$. On trouve en ce cas

$$\omega_{16} = \int_b^\infty J^{n-m-1}\left(c\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}\right)^{n-m-1} e^{-ha}\, da$$
$$= \frac{2^n \Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot b^m}\int_0^\infty \frac{J^m(bx)\, x^{m+1}\, dx}{(x^2+h^2+c^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

et comme l'intégrale au second membre s'évalue au moyen de la formule ω_{14}, on aura

$$\omega_{16} = \int_b^\infty J^{n-m-1}\left(c\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}\right)^{n-m-1} e^{-ha}\, da$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{b^{n-m-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{h^2+c^2}\right)^{m-n+\frac{1}{2}}}{\cos(n-m)\pi}\left\{ i^{m-n+\frac{1}{2}} J^{n-m-\frac{1}{2}}\left(ib\sqrt{h^2+c^2}\right) - i^{n-m-\frac{1}{2}} J^{m-n+\frac{1}{2}}\left(ib\sqrt{h^2+c^2}\right)\right\},$$

d'où en particulier pour $c = 0$

$$\omega_{17} = \int_b^\infty e^{-ha}\,(a^2-b^2)^{n-m-1}\, da$$
$$= \frac{2^{n-m-\frac{3}{2}}\,\Pi(n-m-1)\sqrt{\pi}\, b^{n-m-\frac{1}{2}}\, h^{m-n+\frac{1}{2}}}{\cos(n-m)\pi}\left\{ i^{m-n+\frac{1}{2}} J^{n-m-\frac{1}{2}}(bhi) - i^{n-m-\frac{1}{2}} J^{m-n+\frac{1}{2}}(bhi)\right\}.$$

Lorsque $n - m - \frac{1}{2}$ est entier, il faut modifier les formules conformément à l'expression de ω_{11} pour ce cas.

La formule ω_{17} pour $n = m + \frac{1}{2}$ a été donnée par M. Weber (β).

55. Revenons encore à la première formule générale du No. 48. et admettons $c > a$, $f(b) = J^m(bhi)$. Puisqu'on a

$$\int_0^c J^m(bhi)\, J^m(bx)\, b\,db = \frac{J^m(chi)\cdot cxJ^{m+1}(cx) - chiJ^{m+1}(chi)\cdot J^m(cx)}{x^2+h^2},$$

on obtient

$$cJ^m(chi)\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\,\frac{J^{m+1}(cx)x^{m+2}dx}{x^2+h^2}$$

$$-\,chi\,J^{m+1}(chi)\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\,\frac{J^m(cx)x^{m+1}\,dx}{x^2+h^2}$$

$$= a^{-n}\cdot\int_0^a J^m(bhi)\,J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} b^{m+1}\,db$$

$$= (hi)^m\,\frac{J^n(a\sqrt{z^2-h^2})}{(\sqrt{z^2-h^2})^n}, \quad n > m > -1.$$

Si l'on remarque que les deux intégrales au premier membre ne diffèrent l'une de l'autre que par la valeur d'un paramètre, celle de m, qui est remplacé par $m+1$ dans la première intégrale, et que l'on compare l'égalité obtenue avec la formule (82); on est conduit d'admettre

$$\omega_{1S} = \int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\cdot\frac{J^m(cx)\,x^{m+1}\,dx}{x^2+h^2}$$

$$= \frac{\pi}{2\sin m\pi}\,\frac{J^n(a\sqrt{z^2-h^2})}{(\sqrt{z^2-h^2})^n}\,(hi)^m\left\{J^{-m}(chi) + C_m\right\},$$

ce qui, substitué dans la formule précédente, fournit

$$J^m(chi)\,C_{m+1} + J^{m+1}(chi)\,C_m = 0,$$

d'où l'on conclut

$$C_m = -\,\sigma_m\cdot i^{-2m}\,J^m(chi),$$

σ_m étant une fonction périodique de $m(\sigma_m = \sigma_{m+1})$.

56. Pour déterminer cette fonction revenons encore une fois à la première formule du No. 48. et posons $f(b) = J^{-m}(bhi)$, en admettant toujours $c > a$. Si l'on remarque l'égalité

$$\int_0^c J^{-m}(bhi)J^m(bx)b\,db = \frac{J^{-m}(chi)\cdot cxJ^{m+1}(cx)+chiJ^{-m-1}(chi)\cdot J^m(cx)}{x^2+h^2}$$

$$+\frac{2\sin m\pi}{\pi(hi)^m}\,\frac{x^m}{x^2+h^2},$$

on obtient

$$cJ^{-m}(chi)\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\,\frac{J^{m+1}(cx)\,x^{m+2}(dx)}{x^2+h^2}$$

$$+\,chi\,J^{-m-1}(chi)\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\,\frac{J^m(cx)\,x^{m+1}\,dx}{x^2+h^2}$$

$$=a^{-n}\int_0^a J^{-m}(bhi)\,J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1}b^{m+1}\,db$$

$$-\frac{2\sin m\pi}{\pi(hi)^m}\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\,\frac{x^{2m+1}\,dx}{x^2+h^2},\quad n>m>-1,\quad n>2m-\frac{3}{2},$$

et si l'on substitue dans cette équation la valeur de ω_{18} qu'on vient de trouver et que l'on ùtilise la formule (82), on obtient

$$\frac{J^n(a\sqrt{z^2-h^2})}{(\sqrt{z^2-h^2})^n}\,\frac{h^m}{i^m}\cdot\sigma_m$$

$$=a^{-n}\int_0^a J^{-m}(bhi)\,J^{n-m-1}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1}b^{m+1}\,db$$

$$-\frac{2\sin m\pi}{\pi(hi)^m}\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n}\,\frac{x^{2m+1}\,dx}{x^2+h^2}.$$

Cette équation montre que σ_m ne dépend pas de c; quant à la périodicité de la fonction σ_m, déterminée par cette équation, elle se manifeste par la transformation suivante. La première intégrale au second membre peut être écrite

$$-\int_0^a \frac{J^{-m}(bhi)}{b^{-m}}\cdot d\left[J^{n-m}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m}\right]$$

et se réduit au moyen de l'intégration par parties à

$$\frac{(hi)^{-m}}{2^{-m}\Pi(-m)}\,J^{n-m}(az)\left(\frac{a}{z}\right)^{n-m}$$

$$-hi\int_0^a J^{-m+1}(bhi)\,J^{n-m}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^3}}{z}\right)^{n-m}b^m\,db;$$

la seconde intégrale se représente comme

$$\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} \frac{x^{2m-1}(x^2+h-h^2)\,dx}{x^2+h^2}$$

$$=\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} x^{2m-1}\,dx - h^2\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} \frac{x^{2m-1}\,dx}{x^2+h^2},$$

où le premier terme se calcule au moyen de la formule du No. 37.:

$$\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} x^{2m+1}\,dx = 2^m \Pi m\, a^{-n} J^{n-m-1}(az)\left(\frac{a}{z}\right)^{n-m-1}.$$

D'après cela l'équation qui détermine σ_m devient

$$\frac{J^n(a\sqrt{z^2-h^2})}{(\sqrt{z^2-h^2})^n} \frac{h^{m-1}}{i^{m-1}} \sigma_m$$

$$= a^{-n}\int_0^a J^{-m+1}(bhi)\, J^{n-m}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m} b^m\,db$$

$$-\frac{2\sin(m-1)\pi}{\pi(hi)^{m-1}}\int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} \frac{x^{2m-1}\,dx}{x^2+h^2},$$

ce qui prouve la périodicité de cette fonction. Nous allons démontrer maintenant que $\sigma_m = 1$.

57. A cet effet reprenons l'équation qui détermine σ_m et transformons la seconde intégrale au second membre par la substitution

$$\frac{1}{x^2+h^2} = \frac{1}{h}\frac{1}{h+\frac{x^2}{h}} = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-y\left(h+\frac{x^2}{h}\right)}\,dy,$$

qui fournit

$$\omega = \int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} \frac{x^{2m+1}\,dx}{x^2+h^2}$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-hy}\,dy \int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} e^{-\frac{y}{h}x^2} x^{2m+1}\,dx.$$

Mais l'intégrale par rapport à x au second membre peut être remplacée par une autre, prise entre les limites 0 et a, en vertu de la première formule du No. 53., qui donne sa valeur égale à

$$\frac{h^{m+1}}{a^n (2y)^{m+1}} \int_0^a J^{n-m-1}\left(z\sqrt{a^2-b^2}\right) \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} e^{-\frac{b^2 h}{4y}}\, b^{2m+1}\, db.$$

Donc

$$\omega = \frac{h^m}{2a^n} \int_0^a J^{n-m-1}\left(z\sqrt{a^2-b^2}\right) \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} b^{2m+1}\, db$$

$$\times \int_0^\infty e^{-\frac{h}{2}\left(2y+\frac{b^2}{2y}\right)} \frac{d\,2y}{(2y)^{m+1}}$$

ou encore, en vertu de la formule du No. 42.,

$$\omega = \frac{\pi h^m}{2 \sin m\pi \cdot a^n} \int_0^a J^{n-m-1}\left(z\sqrt{a^2-b^2}\right) \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} \left\{ i^m J^{-m}(bhi) - i^{-m} J^m (bhi) \right\} b^{m+1}\, db.$$

En substituant cette valeur dans l'équation qui détermine σ_m on trouve

$$\frac{J^n\left(a\sqrt{z^2-h^2}\right)}{\left(\sqrt{z^2-h^2}\right)^n} \frac{h^m}{i^m} \sigma_m$$

$$= \frac{i^{-2m}}{a^n} \int_0^a J^{n-m-1}\left(z\sqrt{a^2-b^2}\right) \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{n-m-1} J^m(bhi)\, b^{m+1}\, db$$

d'où l'on conclut, en vertu de la formule ω_2, que $\sigma_m = 1$.

Donc finalement

$$\omega_{18} = \int_0^\infty \frac{J^n\left(a\sqrt{x^2+z^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^n} \frac{J^m(cx)\, x^{m+1}\, dx}{x^2+h^2}$$

$$= \frac{\pi}{2 \sin m\pi} \frac{J^n\left(a\sqrt{z^2-h^2}\right)}{\left(\sqrt{z^2-h^2}\right)^n} (hi)^m \left\{ J^{-m}(chi) - i^{-2m} J^m(chi) \right\},$$

$$n > m > -1, \quad a < c.$$

En multipliant cette formule par a^n, et la différentiant par rapport à a on s'assure qu'elle a lieu pour $n > m - 1 > -2$.

Pour $z = h$ la formule qu'on vient de trouver ne sera qu'une généralisation de la formule ω_{13}.

Lorsqu'on suppose m entier, tous les calculs précédents tombent en défaut, parce qu'alors il faut employer la formule (83) au lieu de (82); mais le résultat final sera le même qui s'obtient lorsqu'on détermine la valeur du second membre de la formule ω_{18} par la régle ordinaire du calcul différentiel. Donc en ce cas

$$\omega_{18} = \int_0^\infty \frac{J^n(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^n} \frac{J^m(cx)\, x^{m+1}\, dx}{x^2+h^2}$$
$$= \frac{J^n(a\sqrt{z^2-h^2})}{2(\sqrt{z^2-h^2})^n}(hi)^m \left\{ \pi i J^m(chi) - Y^m(chi) \right\}.$$

Cette formule pour $z = 0$, n entier a été obtenue par Hankel.

Posant dans la formule générale ω_{18} $m = \pm \frac{1}{2}$ et différentiant les résultats par rapport à c, on trouve pour $z = 0$, l entier

$$\int_0^\infty \frac{J^n(ax)}{x^n} \frac{x^{2l}\cos(cx)\, dx}{x^2+h^2}$$
$$= \frac{\pi i}{2}(hi)^{2l-n-1} e^{-ch} J^n(ahi), \quad n > -\frac{1}{2}, \quad a < c, \quad 2l < n + \frac{5}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{J^n(ax)}{x^n} \frac{x^{2l+1}\sin(cx)\, dx}{x^2+h^2}$$
$$= \frac{\pi}{2}(hi)^{2l-n} e^{-ch} \cdot J^n(ahi), \quad n > -\frac{1}{2}, \quad a < c, \quad 2l < n + \frac{3}{2}.$$

Ces formules ont été communiquées sans démonstration par Hankel.

Dans le second mémoire de M. Weber se trouvent aussi les cas particuliers de ces formules correspondants à $n = 0$, $l = 0$, ainsi que le cas particulier de la formule générale ω_{18} correspondant à $z = 0$, $n = \frac{1}{2}$, $m = 0$.

58. Considérons l'intégrale qui s'obtient de ω_{18} pour $z = 0$, $n = m$,

$$\omega_{19} = \int_0^\infty \frac{J^m(ax)\, J^m(cx)\, x\, dx}{x^2+h^2}$$
$$= \frac{\pi}{2\sin m\pi} J^m(ahi)\left\{J^{-m}(chi) - i^{-2m} J^m(chi)\right\},$$

et substituons-y

$$\frac{1}{x^2+h^2} = \frac{1}{2h} \frac{1}{\frac{h}{2}+\frac{x^2}{2h}} = \frac{1}{2h}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{h}{2}+\frac{x^2}{2h}\right)y}\, dy.$$

On obtient

$$\omega_{19}=\frac{1}{2h}\int_0^\infty e^{-\frac{h}{2}y}\,dy\int_0^\infty J^m(ax)\,J^m(cx)\,e^{-\frac{yx^2}{2h}}x\,dx$$

$$=\frac{i^m}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{h}{2}\left(y+\frac{a^2+c^2}{y}\right)}J^m\left(\frac{ach}{yi}\right)\frac{dy}{y}.$$

de sorte qu'on peut écrire

$$\int_0^\infty e^{-\frac{h}{2}\left(y+\frac{a^2+c^2}{y}\right)}J^m\left(\frac{ach}{yi}\right)\frac{dy}{y}$$

$$=\frac{\pi}{i^m\sin m\pi}J^m(ahi)\left\{J^{-m}(chi)-i^{-2m}J^m(chi)\right\},\quad a<c,\quad m>-1.$$

Remarquons maintenant que les deux membres de cette égalité deviennent synectiques par rapport à a si on les divise par a^m, et comme ellé a lieu pour $a<c$, on en conclut que, divisée par a^m, elle aura lieu à condition mod $a<c$. Donc en substituant ai au lieu de a et posant au premier membre $\frac{c^2-a^2}{y}=x$, on obtient

$$\int_0^\infty e^{-\frac{h}{2}\left(x+\frac{c^2-a^2}{x}\right)}J^m\left(\frac{achx}{c^2-a^2}\right)\frac{dx}{x}$$

$$\frac{\pi i^m}{\sin m\pi}J^m(ah)\left\{J^{-m}(chi)-i^{-2m}J^m(chi)\right\},\quad a<c,$$

ou enfin, en supposant h réel et désignant

$$\frac{h}{2}=p^2,\quad \frac{h}{2}(c^2-a^2)=q^2,\quad \frac{ach}{c^2-a^2}=r,$$

$$\omega_{20}=\int_0^\infty e^{-\left(p^2x+\frac{q^2}{x}\right)}J^m(rx)\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{\pi}{\sin m\pi}J^m(ah)\left\{i^mJ^{-m}(chi)-i^{-m}J^m(chi)\right\},$$

où

$$h=2p^2,\quad a=\frac{q}{\sqrt{2}\cdot p^2}\sqrt{\sqrt{p^4+r^2}-p^2},\quad c=\frac{q}{\sqrt{2}\cdot p^2}\sqrt{\sqrt{p^4+r^2}+p^2},$$
$$m>-1.$$

Pour $m=\pm\frac{1}{2}$ on obtient les formules connues.

59. L'intégrale ω_{20} se transforme au moyen de la formule ω_1 en une autre qui ne contient pas d'exponentielles.

La formule mentionnée donne

$$e^{-\frac{q^2}{x}} = \left(\frac{x}{2}\right)^{m+1} \frac{1}{q^m} \int_0^\infty J^m(qy)\, e^{-\frac{x}{4}y^2}\, y^{m+1}\, dy$$

$$= \frac{2x^{m+1}}{q^m} \int_0^\infty J^m(2qt)\, e^{-xt^2}\, t^{m+1}\, dt.$$

Donc

$$\omega_{20} = \frac{2}{q^m} \int_0^\infty J^m(2qt)\, t^{m+1}\, dt \int_0^\infty e^{-(t^2+p^2)x}\, J^m(rx)\, x^m\, dx$$

$$= \frac{2^{m+1}\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{r}{q}\right)^m \int_0^\infty \frac{J^m(2qt)\, t^{m+1}\, dt}{\left\{r^2+(t^2+p^2)^2\right\}^{m+\frac{1}{2}}}, \quad m > -\frac{1}{2},$$

Cette dernière intégrale s'exprime en conséquence par les fonctions cylindriques. (Comp. pour $m = +\frac{1}{2}$ Meyer Vorles. üb. d. Theorie d. best. Int., p. 310.)

60. Posons $q = b$ dans la formule ω_8, multiplions-la par $b^{m+1} J^n(z\sqrt{a^2-b^2}) \left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{z}}\right)^n db$ et intégrons entre les limites 0 et a; on obtient en vertu de ω_2:

$$\int_0^\infty \frac{J^{n+m+1}(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^{n+m+1}}\, e^{-hx}\, x^{2m}\, dx$$

$$= \frac{2^m\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, a^{n+m+1}} \int_0^a J^n(z\sqrt{a^2-b^2}) \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^n \frac{b^{2m+1}\, db}{(b^2+h^2)^{m+\frac{1}{2}}},$$

$$m > -\frac{1}{2}, \quad n > -1.$$

Pour $z = 0$ cela donne

$$\int_0^\infty \frac{J^{n+m+1}(ax)}{x^{n-m+1}}\, e^{-hx}\, dx = \frac{2^{m-n}\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Pi n\, a^{n+m+1}} \int_0^a b^{2m+1}(a^2-b^2)^n (h^2+b^2)^{-m-\frac{1}{2}}\, db$$

$$= \frac{\Pi 2m\, a^{m+n+1}\, h^{-2m-1}}{2^{n+m+1}\Pi(n+m+1)} F\left(m+\frac{1}{2},\ m+1,\ m+n+2,\ -\frac{a^2}{h^2}\right), \ (\gamma).$$

61. Multiplions la formule ω_{14} par $b^{m+1} J^{p-1}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{p-1} db$ et intégrons entre les limites 0 et a. En désignant par $\Omega^{n-m}(bhi)$ l'expression

$$\frac{\pi}{\sin(n-m)\pi}\left\{i^{n-m}J^{m-n}(bhi)-i^{m-n}J^{n-m}(bhi)\right\},$$

on trouve pour $p>0$, $n>-1$, $-1<m<2n+\frac{3}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{J^{p+m}(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^{p+m}}\,\frac{x^{2m+1}\,dx}{(x^2+h^2)^{n+1}}$$

$$=\frac{h^{m-n}a^{-m-p}}{2^{n+1}\Pi n}\int_0^a J^{p-1}(z\sqrt{a^2-b^2})\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^{p-1}\Omega^{n-m}(bhi)\,b^{n+m+1}\,db.$$

Remarquons maintenant que $\Omega^{n-m}(z)=\Omega^{m-n}(z)$. Si donc on pose successivement $n=q+s$, $m=q-s$ et puis $n=q-s$, $m=q+s$, on obtient deux formules contenant au second membre une même intégrale dont l'élimination fournit

$$2^s\Pi(q+s)h^{2s}a^{-s}\int_0^\infty \frac{J^{p+q-s}(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^{p+q-s}}\cdot\frac{x^{2q-2s+1}\,dx}{(x^2+h^2)^{q+s+1}}$$

$$=2^{-s}\Pi(q-s)h^{-2s}a^{s}\int_0^\infty \frac{J^{p+q+s}(a\sqrt{x^2+z^2})}{(\sqrt{x^2+z^2})^{p+q+s}}\,\frac{x^{2q+2s+1}\,dx}{(x^2+h^2)^{q-s+1}},$$

$$p>0,\quad q\pm s>-1,\quad q\pm 3s>-\frac{3}{2}.$$

Soit $z=0$, $s=\frac{1}{4}$, $p+q-\frac{1}{4}=n$. On trouve en ce cas

$$\int_0^\infty J^{n+\frac{1}{2}}(ax)\cdot\frac{x^{2q+1-n}\,dx}{(x^2+h^2)^{q+\frac{3}{4}}}=\frac{\Pi\left(q+\frac{1}{4}\right)}{\Pi\left(q-\frac{1}{4}\right)}\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot h\int_0^\infty\frac{J^n(ax)}{x^n}\,\frac{x^{2q+\frac{1}{2}}\,dx}{(x^2+h^2)^{q+\frac{5}{4}}},$$

$$n>q-\frac{1}{4},\quad q>-\frac{3}{4},$$

d'où pour $q=-\frac{1}{4}$ on obtient

$$\int_0^\infty\frac{J^{n+\frac{1}{2}}(ax)}{x^{n+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+h^2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\cdot h\int_0^\infty\frac{J^n(ax)}{x^n}\,\frac{dx}{x^2+h^2},\quad n>-\frac{1}{2},$$

62. Une autre relation élégante entre deux intégrales définies fournit la formule ω_8. Si l'on y remplace h par $h+y$ et qu'après

avoir multiplié par $e^{-ky}J^n(py)y^n dy$ on intègre entre les limites 0 et ∞, on obtient

$$\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)(2p)^n\int_0^\infty J^m(qx)e^{-hx}\frac{x^m dx}{\{p^2+(k+x)^2\}^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$=\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)(2q)^m\int_0^\infty J^n(py)e^{-ky}\frac{y^n dy}{\{q^2+(h+y)^2\}^{m+\frac{1}{2}}},$$

$$n>-\frac{1}{2},\quad m>-\frac{1}{2},\quad R(h)>\pm J(q),\quad R(k)>\pm J(p).$$

On en trouve pour $p=0$, après avoir divisé la formule par p^n:

$$\int_0^\infty J^m(qx)e^{-hx}\frac{x^m dx}{(k+x)^{2n+1}}=\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)(2q)^m}{\sqrt{\pi}\cdot\Pi 2n}\int_0^\infty e^{-ky}\frac{y^{2n}dy}{(q^2+(h+y)^2)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Cette formule reste évidemment vraie, lorsqu'on admet $h=-ai$ et qu'on prend en même temps $q=b$, $m<2n+\frac{1}{2}$. Si l'on pose encore $a=b=1$, on obtient finalement

$$\int_0^\infty J^m(x)e^{i(x+k)}\frac{x^m dx}{(k+x)^{2n+1}}=\frac{2^m\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Pi(2n)}e^{ki}\int_0^\infty e^{-ky}\frac{y^{2n-m-\frac{1}{2}}dy}{(y-2i)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Pour $n=0$ cela donne

$$\int_0^\infty J^m(x)\,e^{i(x+k)}\,\frac{x^m dx}{x+k}$$

$$=\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}e^{\left[k+\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]i}\int_0^\infty e^{-ky}y^{-m-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{yi}{2}\right)^{-m-\frac{1}{2}}dy,$$

$$-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}.$$

Or l'intégrale au second membre est connue: elle a été employée par Hankel pour obtenir les développements sémiconvergents des fonctions cylindriques (Math. Ann. I, p. 491); sa valeur est

$$\pi\frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}}{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}k^m e^{-ki+\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi i}\,\frac{J^{-m}(k)-e^{-m\pi i}J^m(k)}{i\sin 2m\pi}.$$

Donc on aura

$$\int_0^\infty J^m(x)\, e^{i(x+k)} \frac{x^m\, dx}{x+k} = -\pi k^m \frac{J^m(k) - e^{m\pi i} J^{-m}(k)}{\sin 2m\pi}, \quad -\tfrac{1}{2} < m < \tfrac{1}{2},$$

et pour $m = 0$

$$\int_0^\infty J^0(x)\, e^{i(x+k)} \frac{dx}{x+k} = -\tfrac{1}{2}\, Y^0(k) + \tfrac{\pi i}{2}\, J^0(k).$$

On en conclut

$$J^{-m}(k) = \frac{2\cos m\pi}{\pi k^m} \int_0^\infty J^m(x)\, \frac{\sin(x+k)}{x+k}\, x^m\, dx, \qquad -\tfrac{1}{2} < m < \tfrac{1}{2},$$

$$J^0(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty J^0(x)\, \frac{\sin(x+k)}{x+k}\, dx,$$

$$Y^0(k) = -2 \int_0^\infty J^0(x) \cdot \frac{\cos(x+k)}{x+k}\, dx.$$

On peut transformer cette expression élégante de la fonction $Y^0(k)$ de la manière suivante. Remarquons qu'on a

$$\frac{\cos(x+k)}{x+k} = \frac{1}{x+k} - \int_0^1 \sin t(x+k) \cdot dt;$$

donc, en substituant

$$Y^0(k) = -2 \int_0^\infty \frac{J^0(x)\, dx}{x+k}$$
$$+ 2 \int_0^1 dt \left\{ \cos kt \int_0^\infty J^0(x) \sin tx \cdot dx + \sin kt \int_0^\infty J^0(x) \cos tx\, dx \right\},$$

ou enfin, en vertu des formules du No. 38.,

$$Y^0(k) = -2 \int_0^\infty \frac{J^0(x)\, dx}{x+k} + 2 \int_0^1 \sin kt \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$$= -2 \int_0^\infty \frac{J^0(x)\, dx}{x+k} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(k\cos\varphi)\, d\varphi.$$

Partant de cette expression on trouve en vertu de la formule (77)

$$Y^n(k) = -2\int_0^\infty J^0(x)\,O^n(x+k)\,dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(k\cos\varphi - \frac{n\pi}{z}\right)\cos n\varphi\,d\varphi.$$

V.

Equation différentielle des fonctions cylindriques.

Les fonctions cylindriques $J^n(x)$, $J^{-n}(x)$, $Y^n(x)$ satisfont, comme on sait, à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \tag{85}$$

dont nous avons complètement ignorée l'existance dans tout ce qui précéde.

C'est en partant de cette équation que Hankel a construit les séries et les intégrales définies de la forme

$$x^n \int_a^b e^{xti}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt,$$

qui représentent les fonctions cylindriques.

Nous reprenons cette équation pour étudier la forme symbolique de sa solution.

63. La solution symbolique de l'équation (85) a été donnée par M. Hargreave (Philos. Trans. 1848 p. 31) sous la forme

$$y = x^n(1+D^2)^{n-\frac{1}{2}}\,\frac{C\sin x + C_1\cos x}{x}, \qquad n > -\frac{1}{2}.$$

Considérons les solutions particulières qui en résultent.

Soit $C_1 = 0$, $C = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n\,\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}$. La fonction $\frac{\sin x}{x}$ est développable suivant les puissances entières *positives* de x. Si l'on effectue ce développement ainsi que celui de $(1+D^2)^{n-\frac{1}{2}}$ selon la formule du binôme, on obtient la série qui coïncide précisément avec la série de $J^n(x)$. Donc

$$J^n(x) = \frac{2x^n}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n\,\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1+D^2)^{n-\frac{1}{2}}\,\frac{\sin x}{x}, \quad n > -\frac{1}{2}. \tag{86}$$

64. En remarquant qu'on a

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos xt\cdot dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^{ixt}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}\sin\varphi\,d\varphi,$$

on trouve immédiatement la forme ordinaire de la fonction $J^n(x)$

$$J^n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n \Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} e^{ixt}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{x^n}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n \Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \int_{0}^{\pi} e^{ix\cos\varphi}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi .$$

Faisons ici une remarque importante. Lorsqu'on a à effectuer une opération quelconque $\varphi(D)$ sur une intégrale définie et qu'on l'accomplit, comme nous venons de faire, sur la fonction qui se trouve sous le signe $\int$, il est nécessaire, pour que le résultat ne soit pas faux, que cette opération n'ait introduit aucune fonction qui ne serait pas uniforme entre les limites de l'intégrale. Pour éclaircir cette idée, prenons comme exemple la fonction $J^0(x)$. Si on la représente par $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}d\varphi$, on trouve

$$\sqrt{1+D^2}\cdot J^0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}\sqrt{1-\cos^2\varphi}\cdot d\varphi = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin x}{x},$$

ce qui est vraie, la fonction $\sqrt{1-\cos^2\varphi}$ introduite par l'opération $\sqrt{1+D^2}$ restant uniforme entre les limites 0 et π. Mais si l'on prend

$$J^0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(e^{ix\sin\varphi}+e^{-ix\sin\varphi}\right)d\varphi,$$

on obtient

$$\sqrt{1+D^2}\cdot J^0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = 0,$$

ce qui est faux, et la raison en est que l'opération $\sqrt{1+D^2}$ a introduit la fonction $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$ qui perd son uniformité entre les limites pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

65. On a

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty . \alpha} e^{-xt}dt, \quad R(x\alpha) > 0 .$$

D'après cela on peut écrire

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2i}\int_0^{\infty\cdot\alpha}\left\{e^{-x(t-i)} - e^{-x(t+i)}\right\}dt,$$

d'où l'on obtient

$$J^n(x) = \frac{2x^n}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2i}\int_0^{\infty\cdot\alpha}\left\{e^{-x(t-i)}(t^2-2it)^{n-\frac{1}{2}} - e^{-x(t+i)}(t^2+2it)^{n-\frac{1}{2}}\right\}dt$$

$$= \frac{x^n}{\sqrt{2\pi}\cdot\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\left\{e^{xi-\frac{2n+1}{4}\pi i}\int_0^{\infty\cdot\alpha}e^{-xt}\left(1-\frac{t}{2i}\right)^{n-\frac{1}{2}}t^{n-\frac{1}{2}}\,dt\right.$$

$$\left. - e^{-xi+\frac{2n+1}{4}\pi i}\int_0^{\infty\cdot\alpha}e^{-xt}\left(1+\frac{t}{2i}\right)^{n-\frac{1}{2}}t^{n-\frac{1}{2}}\,dt\right\}$$

et finalement, posant $xt = u$,

$$J^n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}\cdot\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\left\{\cos\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\int_0^{\infty}e^{-u}u^{n-\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{ui}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right.\right.$$

$$\left. + \left(1-\frac{ui}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right]du$$

$$\left. + i\sin\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\int_0^{\infty}e^{-u}u^{n-\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{ui}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{ui}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right]du\right\}.$$

C'est d'une formule analogue que Hankel a obtenu le développement sémiconvergent de la fonction $J^n(x)$.

66. La formule (86) fournit

$$J^n(x) = \frac{2x^n}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1+D^2)^{n-m}(1+D^2)^{m-\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x}$$

$$= x^n\frac{2^m\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{2^n\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1+D^2)^{n-m}\frac{J^m(x)}{x^m}, \quad m > -\frac{1}{2}.$$

Mais en vertu de la formule ω_8 on aura

$$(1+D^2)^{n-m} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{m-n-\frac{1}{2}}\Pi(m-n-1)}\int_0^{\infty}J^{m-n-\frac{1}{2}}(y)\cdot y^{m-n-\frac{1}{2}}\cdot e^{-yD}\cdot dy,$$

$$m > n.$$

Donc

$$J^n(x) = \sqrt{2\pi}\,\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)x^n}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi(m-n-1)}\int_0^\infty J^{m-n-\frac{1}{2}}(y)\cdot y^{m-n-\frac{1}{2}}\frac{J^m(x-y)}{(x-y)^m}\,dy$$

ou, en remplaçant x par $-x$ et remarquant que la fonction $\frac{J^p(x)}{x^p}$ est pair,

$$J^n(x) = \sqrt{2\pi}\,\frac{\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)x}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi(m-n-1)}\int_0^\infty J^{m-n-\frac{1}{2}}(y)\cdot y^{m-n-\frac{1}{2}}\frac{J^m(x+y)}{(x+y)^m}\,dy,$$

$$m > n > -\frac{1}{2}.$$

Pour $m = \frac{1}{2}$ on retrouve une formule du No. 62., en remplaçant n par $-n$.

67. Considérons maintenant la seconde solution particulière qui s'obtient de la solution générale pour $C = 0$, $C_1 = \frac{2\sin n\pi}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}$ lorsque n n'est pas entier, et $C_1 = -\frac{2\sqrt{\pi}}{2^n\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}$ lorsque n est un nombre entier. Nous nommerons cette solution $C_n(x)$ de sorte que

$$C_n(x) = C_1 x^n (1+D^2)^{n-\frac{1}{2}}\frac{\cos x}{x}. \tag{87}$$

Comme on a

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} - \int_0^1 \sin xt\cdot dt = \int_0^{\infty.\alpha} e^{-tx}dt - \int_0^1 \frac{e^{txi}-e^{-txi}}{2i}\,dt, \qquad R(x\alpha) > 0,$$

on trouve

$$\text{(a)}\quad C_n(x) = C_1 x^n\left\{\int_0^{\infty.\alpha} e^{-tx}(1+t^2)^{n-\frac{1}{2}}dt - \int_0^1 \sin tx\cdot(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}dt\right\}$$

ou, en posant $tx = \omega$ dans la première intégrale, $t = \cos\varphi$ dans la seconde,

$$\text{(b)}\quad C_n(x) = C_1\left\{x^{-n}\int_0^\infty e^{-\omega}(x^2+\omega^2)^{n-\frac{1}{2}}d\omega - x^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi)\cdot\sin^{2n}\varphi\,d\varphi\right\},$$

$$n > -\frac{1}{2}.$$

La forme (a) de la solution particulière de l'équation (85) a été considérée par M. Weber au tome 75 du Journal für Mathematik. La forme (b) nous semble préférable parce qu'elle a lieu pour chaque valeur de x.

68. La solution particulière $C_n(x)$ doit s'exprimer linéairement au moyen de $J^n(x)$ et $J^{-n}(x)$, ou $J^n(x)$ et $Y^n(x)$ et l'on peut admettre

$$C_n(x) = A_n J^n(x) + B_n J^{-n}(x) \quad \text{ou} \quad = a_n J^n(x) + b_n Y^n(x).$$

En considérant la valeur de $x^n C_n(x)$ pour $x = 0$, on trouve aisément $B_n = b_n = 1$, parce que c'est à cette condition que nous avons déterminé la constante C_1. Quant à la constante A_n ou a_n elle peut être déterminée, à l'exemple de M. Weber, au moyen de l'intégration définie. Si l'on multiplie la fonction $C_n(x)$ par $x^q dx$ et que l'on intégre par rapport à x entre les limites 0 et ∞ on obtient, après un calcul assez compliqué, $A_n = -\cos n\pi$, en supposant $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$, $q < \frac{1}{2}$. Cette valeur de A_n reste vraie pour $n = \frac{1}{2}$, comme on s'en assure immédiatement, et pour $n > \frac{1}{2}$, parce qu'on trouve aisément

$$\frac{d}{dx}\,\frac{C_n(x)}{x^n} = \frac{C_{n+1}(x)}{x^n},$$

ce qui conduit à admettre $A_{n+1} = -A_n$. Donc finalement $A_n = -\cos n\pi$ pour $n > -\frac{1}{2}$. Quant à la constante a_n, elle a été déterminée par M. Weber et doit être admise égale à 0. Remarquons en passant que les formules nécessaires pour cette détermination s'obtiennent immédiatement de l'intégrale ω_4 si on la différentie par rapport à q et qu'on pose $q = 0$, ou, encore mieux, si on la différentie par rapport à n et qu'après avoir introduit sous le signe $\int$ la différence $\frac{dJ^{-n}x}{dn} - \frac{dJ^n x}{dn}$ on admet $n = 0$.

69. Posant

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty . \alpha} \left\{e^{-x(t-i)} + e^{-x(t+i)}\right\} dt,$$

on obtiendrait une formule analogue à celle du No. 65.

Enfin l'application de la formule ω_8 fournit

$$Y^0(x) = -2\int_0^{\infty} J^0(y)\,\frac{\cos(x-y)}{x-y}\,dy,$$

ce qui est assurément faux, l'intégrale contenant les éléments infiniment grands. Pour éviter cette circonstance, écrivons

$$Y^0(x) = 2\,\frac{1}{\sqrt{1+D^2}}\,\frac{\cos(-x)}{-x}$$

et l'on obtient un résultat juste

$$Y^0(x) = -2\int_0^\infty J^0(y)\cdot\frac{\cos(x+y)}{x+y}\,dy\,.$$

La formule (87) fournit encore

$$Y^n(x) = \frac{\sqrt{\pi}\cdot x^n}{2^n\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}(1+D^2)^n Y^0(x)$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\Pi n}{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}x^n\int_0^\infty J^0(y)\,\frac{C_{n+\frac{1}{2}}(x+y)}{(x+y)^{n+\frac{1}{2}}}\,dy\,.$$

VI.

Nouvelle méthode pour obtenir les développements d'une fonction continue en séries.

Si l'on réfléchit sur la méthode que nous avons suivie dans la prémière section pour obtenir les développements (22) et (23), on découvre aisément que son succès repose essentiellement sur les deux faits suivants: 1° que toutes les fonctions de la série (1) sont exprimables au moyen d'une initiale $S_0(x)$ par les formules (6) et (10), et 2° que l'on sait développer $e^{\alpha i\cos\Delta}$ en une série procédant suivant les cosinus de multiples de Δ, ou, ce qui et la même chose, que l'on sait développer $e^{\alpha D}$ en une série suivant les fonctions

$$\frac{(-D+\sqrt{D^2+1})^n+(-D-\sqrt{D^2+1})^n}{2}\,.$$

On voit d'après cela que les considérations de la première section se prêtent tout naturellement à une grande généralisation.

70. Supposons que l'on ait formé une série de fonctions

(I) $$S_0(x),\ S_1(x),\ S_2(x),\cdots S_n(x),\cdots$$

en suivant la loi, exprimée symboliquement par la relation

(II) $$S_n(x) = \varphi_n(D)\cdot S_0(x),\quad \varphi_0(D) = 1\,.$$

Supposons de plus que l'on ait obtenu d'une manière quelconque le développement suivant

(III) $$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\psi_n(\alpha)\cdot\varphi_n(x),$$

qui a lieu pour *chaque* valeur de x et pour une série plus ou moins restreinte de valeurs de α.

En remplaçant x par le symbole $D = \frac{d}{dx}$ et multipliant l'égalité (III) par $S_0(x)$, on obtient

$$\text{(IV)} \qquad S_0(\alpha + x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} S_n(x) \cdot \psi_n(\alpha),$$

d'où pour $x = 0$ on trouve encore

$$\text{(V)} \qquad S_0(\alpha) = \sum_{n=0}^{n=\infty} S_n(0) \cdot \psi_n(\alpha).$$

Les limites entre lesquelles ces deux développements ont lieu se déterminent dans chaque cas particulier comme on verra plus loin.

Si le développement (III) reste vrai aussi pour chaque valeur de α, on peut écrire, en échangeant entre elles les lettres α, x,

$$\text{(VI)} \qquad e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n(\alpha) \cdot \psi_n(x),$$

d'où, en remplaçant de nouveau x par D et multipliant par $S_0(x)$, on obtient

$$\text{(VII)} \qquad S_0(\alpha + x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} T_n(x) \cdot \varphi_n(\alpha),$$

et pour $x = 0$

$$\text{(VIII)} \qquad S_0(\alpha) = \sum_{n=0}^{n=\infty} T_n(0) \cdot \varphi_n(\alpha),$$

où

$$\text{(IX)} \qquad T_0(x),\ T_1(x),\ T_2(x),\ \cdots\ T_n(x),\ \cdots$$

représente une série de fonctions formée selon la loi symbolique

$$\text{(X)} \qquad T_n(x) = \psi_n(D) \cdot S_0(x).$$

Ainsi partant du développement (III) de la fonction exponentielle nous avons obtenu les développements (V) et (VIII) d'une fonction quelconque $S_0(\alpha)$ suivant les fonctions de la série

$$\varphi_0(\alpha),\ \varphi_1(\alpha),\ \varphi_2(\alpha),\ \cdots,\ \varphi_n(\alpha),\ \cdots$$

ou de la série

$$\psi_0(\alpha),\ \psi_1(\alpha),\ \psi_2(\alpha),\ \cdots,\ \psi_n(\alpha),\ \cdots$$

Ces deux développements ainsi que les deux séries de fonctions peuvent être appelés *correlatifs*.

Faisons quelques applications de ces formules générales.

71. On établit très-simplement la formule suivante

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\beta}^{\infty\beta} e^{\alpha t}\frac{dt}{t^{\nu}} = \frac{\alpha^{\nu-1}}{\Pi(\nu-1)}, \quad R(\alpha\beta) < 0$$

où ν est arbitraire et le chemin d'intégration commence au point $\infty\,\beta$, entoure en sens positif le point $t = 0$ et revient au point de départ.

En introduisant au lieu de t une nouvelle variable $r = t + z$, on trouve

$$e^{\alpha z} = \frac{\Pi(\nu-1)}{\alpha^{\nu-1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\beta}^{\infty\beta} e^{\alpha r}\frac{dr}{(r-z)^{\nu}},$$

où le chemin d'intégration entoure le point $r = z$, correspondant à $t = 0$. Comme ce chemin est du reste arbitraire, on peut le supposer formé d'une ellipse aux demiaxes $\frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$, décrite autour du point $r = 0$ comme centre, et d'une ligne droite qui conduit d'un point de cette ellipse à $\infty\cdot\beta$.

Cela posé, transformons la dernière intégrale, en y introduisant une nouvelle variable et admettant $r = \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)$. On s'assure aisément qu'à l'ellipse que parcourt r correspond une circonférence de rayon R que doit parcourir s et qu'à la ligne droite qui conduit r à $\infty\,\beta$ correspond un fragment de l'hyperbole qui conduit s au même point $\infty\,\beta$. On aura donc

$$\text{(XI)}\quad e^{\alpha z} = \frac{\Pi(\nu-1)}{\alpha^{\nu-1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\beta}^{\infty\beta} e^{\frac{\alpha}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)}\left[\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right) - z\right]^{-\nu} d\cdot\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{2^{\nu}\Pi(\nu-1)}{\alpha^{\nu-1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\beta}^{\infty\beta} e^{\frac{\alpha}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)}\left(1 - 2z\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)^{-\nu}\cdot s^{-\nu}\cdot d\cdot\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right).$$

La fonction $\left(1 - 2z\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)^{-\nu}$ se développe en série suivant les puissances entières de $\frac{1}{s}$, à savoir

$$\left(1 - 2z\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n^{\nu}(z)\cdot s^{-n},$$

où

$$C_n^{\nu}(z) = \frac{\Pi(n+\nu-1)2^n}{\Pi(\nu-1)\Pi n}\left\{z^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot(n+\nu-1)}\,\frac{z^{n-2}}{2^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot(n+\nu-1)(n+\nu-2)}\cdot\frac{z^{n-4}}{2^4} - \dots\right\}$$

et cette série sera assurément convergente tant que mod $\frac{1}{s}$ reste moindre que le plus petit des deux modules de $z \pm \sqrt{z^2 - 1}$, ou tant que mod s reste plus grand que le plus grand de ces deux modules. Comme dans notre intégrale mod $s \geqq R$, il faut admettre mod $(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) < R$ et alors on peut développer la fonction qui se trouve sous le signe $\int$. Ainsi en supposant mod $(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) < R$ on aura

$$e^{\alpha z} = \frac{2^\nu \Pi(\nu-1)}{\alpha^{\nu-1}} \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n^\nu(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty\beta}^{\infty\beta} e^{\frac{\alpha}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)} s^{-n-\nu} d \cdot \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{2^\nu \Pi(\nu-1)}{\alpha^\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n^\nu(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty\beta}^{\infty\beta} d \cdot e s^{-n-\nu} {}^{\frac{\alpha}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)},$$

ou encore, en effectuant les intégrations par parties,

$$e^{\alpha z} = \frac{2^\nu \Pi(\nu-1)}{\alpha^\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+\nu) C_n^\nu(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty\beta}^{\infty\beta} e^{\frac{\alpha}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)} \frac{ds}{s^{n+\nu+1}}.$$

Or la première forme (43) de la fonction cylindrique $J^n(x)$ peut s'écrire

$$J^n(\alpha i) = \frac{i^n}{2\pi i} \int_{\infty.\gamma}^{\infty.\gamma} e^{\frac{\alpha}{2}\left(ti + \frac{1}{ti}\right)} \frac{dti}{(ti)^{n+1}}, \quad R(\alpha\gamma i) < 0,$$

ou, en posant $ti = s$, $\gamma i = \beta$,

$$J^n(\alpha i) = \frac{i^n}{2\pi i} \int_{\infty\beta}^{\infty\beta} e^{\frac{\alpha}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)} \frac{ds}{s^{n+1}}, \quad R(\alpha\beta) < 0.$$

Donc finalement

$$\text{(XII)} \qquad e^{\alpha z} = 2^\nu \Pi(\nu-1) \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+\nu) C_n^\nu(z) \cdot \frac{J^{n+\nu}(\alpha i)}{i^n (\alpha i)^\nu},$$

$$\operatorname{mod}(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) < R.$$

Ce développement conduit à deux développements d'une fonction continue.

72. Si l'on remplace en premier lieu α par le symbole $D = \frac{d}{dx}$ et qu'on multiplie le résultat par $S_0(x)$ on obtient

$$\text{(XIII)} \qquad S_0(z+x) = 2^\nu \Pi(\nu-1) \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+\nu) C_n^\nu(z) \frac{J^{n+\nu}(iD)}{(iD)^{n+\nu}} D^n S_0(x),$$

$$\operatorname{mod}(z \pm \sqrt{z^2-1}) < R,$$

d'où pour $x = 0$ on trouve encore

$$\text{(XIV)} \qquad S_0(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+\nu)\, a_n C_n^\nu(z), \quad \operatorname{mod}(z \pm \sqrt{z^2-1}) < R,$$

$$a_n = \Pi(\nu-1) \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{S_0^{(n+2p)}(0)}{2^{n+2p}\Pi p \cdot \Pi(n+\nu+p)} \cdot {}^{*)}$$

Remarquons que les coefficients dans les formules (XIII) et (XIV) s'expriment aisément au moyen des intégrales définies, lorsque $\nu > -\frac{1}{2}$. On aura en ce cas

$$\frac{J^{n+\nu}(iD)}{(iD)^{n+\nu}} D^n S_0(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{n+\nu} \Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{\cos\omega \cdot D} \cdot \sin^{2n+2\nu}\omega \cdot d\omega \cdot D^n S_0(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{n+\nu} \Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi S_0^{(n)}(x+\cos\omega) \cdot \sin^{2n+2\nu}\omega \cdot d\omega$$

et

$$a_n = \frac{\Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi} \cdot 2^n \Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi S^{(n)}(\cos\omega) \cdot \sin^{2n+2\nu}\omega \cdot d\omega.$$

Quant aux conditions de convergence des deux développements (XIII) et (XIV), on les détermine aisément. Soit z_1 le point critique de la fonction $S_0(z+x)$, le plus proche à l'origine. Le développement de Taylor, c'est-à-dire la représentation de la fonction $S_0(z+x)$ par

*) $S_0^{(m)}(0)$ désigne la valeur de la derivée $\frac{d^m S_0(x)}{dx^m}$ pour $x = 0$.

l'expression $e^{zD} S_0(x)$ n'aura lieu qu'à condition mod $z <$ mod z_1 et comme au développement (XIII) correspond la condition de la forme mod $(z \pm \sqrt{z^2-1}) < R$, on doit admettre mod $(z \pm \sqrt{z^2-1}) <$ mod $(z_1 \pm \sqrt{z_1^2-1})$.

73. En supposant $R = \infty$ dans la formule (XI), on pourra considérer la condition mod $(z \pm \sqrt{z^2-1}) < R$ comme satisfaite pour chaque valeur de z, quelle qu'elle soit. Si l'on remplace alors dans la formule (XII) α par $\frac{\alpha}{i}$, z par iD et qu'on multiplie le résultat par $S_0(x)$, on obtient

$$\text{(XV)} \qquad S_0(\alpha + x) = 2^\nu \Pi(\nu-1) \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+\nu) \frac{J^{n+\nu}(\alpha)}{\alpha^\nu} \cdot \frac{C_n^\nu(iD)}{i^n} S_0(x),$$

et ce développement aura lieu en même temps que la formule de Taylor.

74. Soit $S_0(x) = \frac{1}{x}\cdot$ La formule (XIII) donnera après le changement de x en $-x$

$$\frac{1}{x-z} = 2^\nu \Pi(\nu-1) \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+\nu)\, C_n^\nu(z) \frac{J^{n+\nu}(iD)}{(iD)^{n+\nu}} \frac{\Pi n}{x^{n+1}},$$

$$\text{mod}\,(z \pm \sqrt{z^2-1}) < \text{mod}\,(-x \pm \sqrt{x^2-1}),$$

où

$$\frac{J^{n+\nu}(iD)}{(iD)^{n+\nu}} \frac{\Pi n}{x^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+\nu}} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\Pi(n+2p)}{2^{2p}\Pi p \Pi(n+\nu+p)} \frac{1}{x^{n+2p+1}}$$

$$= \frac{\Pi n}{\sqrt{\pi}\cdot 2^{n+\nu}\Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n+2\nu}\omega \cdot d\omega}{(x-\cos\omega)^{n+1}},$$

$$\text{mod}\, x > 1.$$

La formule (XV) donne aussi

$$\frac{1}{x-\alpha} = 2^\nu \Pi(\nu-1) \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+\nu) \frac{J^{n+\nu}(\alpha)}{\alpha^\nu} \cdot \frac{C_n^\nu(-iD)}{i^n} \cdot \frac{1}{x}.$$

Le développement de $\frac{1}{x-z}$ a été donné par M. Heine pour le cas $\nu = \frac{1}{2}\cdot$ Je l'ai généralisé au cas de ν quelconque dans un mémoire „Sur le développement des fonctions en séries infinies" lu devant la

Société mathématique de Moscou le $\frac{29}{17}$ janvier 1870 et imprimé en russe au tome V. du Journal de la dite Société en 1871. [J'y ai employé la notation de M. Heine

$$(1-2z\beta+\beta^2)^{-\frac{p-1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Pi\frac{p-3}{2}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[J^n\,[p,z]\cdot\beta^n\right].$$

A la fin du même mémoire (p. 372) j'ai donné aussi le développement de la fraction $\frac{1}{x-\alpha}$ pour le cas $\nu=\frac{1}{2}\cdot$ La méthode que j'ai suivie pour obtenir ce développement conduirait au développement de $\frac{1}{x-\alpha}$ pour ν quelconque, si, au lieu de la formule particulière de M. Heine, j'avais employé ma formule généralisée.

Plus tard, mais assurément sans la connaissance de mon mémoire, M. Gegenbauer a publié les deux développements de ce No. aux Comptes rendus de l'Academie de Vienne en 1874.

75. Soit dans la formule (XV) $S_0(x)=\frac{J^\nu}{x^\nu}\cdot$ On obtient en ce cas

$$\frac{J^\nu(\alpha+x)}{(\alpha+x)^\nu} = 2^\nu\,\Pi(\nu-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+\nu)\frac{J^{n+\nu}(\alpha)}{\alpha^\nu}\cdot\frac{C_n^\nu(iD)}{i^n}\cdot\frac{J^\nu(x)}{x^\nu}.$$

La formule (68) fournit de l'autre coté pour $\varphi=\pi$

$$\frac{J^\nu(\alpha+x)}{(\alpha+x)^\nu} = 2^\nu\,\Pi(\nu-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+\nu)\frac{J^{n+\nu}(\alpha)}{\alpha^\nu}\,\frac{J^{n+\nu}(x)}{x^\nu}\,C_n^\nu(-1),$$

où $C_n^\nu(-1)$ se détermine aisément et se trouve égale à

$$(-1)^n\frac{\Pi(2\nu+n-1)}{\Pi(2\nu-1)\,\Pi n}.$$

Si l'on compare les deux développements de ce No., on conclut

$$\text{(XVI)}\qquad \frac{J^{n+\nu}(x)}{x^\nu} = (-1)^n\frac{\Pi(2\nu-1)\,\Pi n}{\Pi(2\nu+n-1)}\,\frac{C_n^\nu(iD)}{i^n}\cdot\frac{J^\nu(x)}{x^\nu}.$$

En supposant $\nu>-\frac{1}{2}$ et remplaçant $\frac{J^\nu(x)}{x^\nu}$ par

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot 2^\nu\,\Pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi e^{-ix\cos\omega}\sin^{2\nu}\omega\,d\omega$$

on obtient encore

$$J^{n+\nu}(x) = \frac{2^{\nu-1}\Pi(\nu-1)\Pi n \cdot i^n \cdot x^\nu}{\Pi(n+2\nu-1)}$$

$$\cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-ix\cos\omega}\, C_n^\nu(\cos\omega)\cdot\sin^{2\nu}\omega\cdot d\omega,$$

et si l'on développe $e^{-ix\cos\omega}$ selon la formule (XII), en admettant $z = \cos\omega$, $\alpha = \frac{x}{i}$, on trouve

$$\frac{J^{n+\nu}(x)}{x^\nu} = \frac{2^{2\nu-1}(\Pi(\nu-1))^2\,\Pi n\cdot i^n}{\Pi(n+2\nu-1)}$$

$$\cdot\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{p=\infty}(p+\nu)\int_0^\pi C_p^\nu(\cos\omega)\cdot\frac{J^{p+\nu}(x)}{i^p x^\nu}\,C_n^\nu(\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\, d\omega,$$

d'où l'on conclut tout de suite

$$\int_0^\pi C_p^\nu(\cos\omega)\cdot C_n^\nu(\cos\omega)\cdot\sin^{2\nu}\omega\cdot d\omega = 0, \qquad p \gtrless n,$$

$$\int_0^\pi C_n^\nu(\cos\omega)\cdot C_n^\nu(\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\, d\omega = \frac{\pi\cdot\Pi(n+2\nu-1)}{2^{2\nu-1}(\Pi(\nu-1))^2\,\Pi n\cdot(n+\nu)}.$$

76. Les fonctions $C_n^\nu(x)$, $2^\nu\Pi(\nu-1)(n+\nu)\frac{J^{n+\nu}(i\alpha)}{i^n(i\alpha)^\nu}$ étant corrélatives en vertu de l'équation (XII), leurs propriétés récurrentes doivent être intimement liées entre elles.

Désignons pour brévité $\frac{J^{n+\nu}(i\alpha)}{i^n(i\alpha)^\nu}$ par $H^n(\alpha)$. Les deux propriétés récurrentes des fonctions $H^n(\alpha)$ s'obtiennent aisément des deux propriétés (40) et (2) des fonctions cylindriques, à savoir

a) $$\frac{n+\nu}{\alpha}H^n(\alpha) = \frac{1}{2}\left[H^{n-1}(\alpha) - H^{n+1}(\alpha)\right],$$

b) $$\frac{dH^n(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\nu}{\alpha}H^n(\alpha) = \frac{1}{2}\left[H^{n-1}(\alpha) + H^{n+1}(\alpha)\right],$$

d'où l'on tire encore par soustraction une propriété indépendante de ν

c) $$\frac{dH^n(\alpha)}{d\alpha} - \frac{n}{\alpha}H^n(\alpha) = H^{n+1}(\alpha).$$

Si l'on remarque maintenant que la formule (XII) devient

(XII′) $$e^{\alpha z} = 2^{\nu}\Pi(\nu-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+\nu)\,C_n^{\nu}(z)\,H^n(\alpha),$$

et qu'on la différentie par rapport à z, on trouve

$$e^{\alpha z} = 2^{\nu}\Pi(\nu-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{dC_n^{\nu}(z)}{dz}\cdot\frac{n+\nu}{\alpha}H^n(\alpha)$$

$$= 2^{\nu-1}\Pi(\nu-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}C_n^{\nu}(z)\left\{H^{n-1}(\alpha)-H^{n+1}(\alpha)\right\}$$

$$= 2^{\nu-1}\Pi(\nu-1)\left\{\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{dC_{n+1}^{\nu}(z)}{dz}H^n(\alpha)-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{dC_{n-1}^{\nu}(z)}{dz}H^n(\alpha)\right\},$$

d'où l'on conclut, en comparant cette formule avec (XII′),

A) $$(n+\nu)\,C_n^{\nu}(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{dC_{n+1}^{\nu}(z)}{dz}-\frac{dC_{n-1}^{\nu}(z)}{dz}\right],\qquad n=1,2,3,\cdots$$

$$\nu C_0^{\nu}(z) = \frac{1}{2}\,\frac{dC_1^{\nu}(z)}{dz}.$$

La propriété A) s'obtient de la propriété a) lorsqu'après avoir multiplié cette dernière par α on remplace ce multiplicateur par le symbole $-\frac{d}{d\alpha}$ et qu'en même temps on met $C_n^{\nu}(\alpha)$ au lieu de $H^{\nu}(\alpha)$.

En différentiant l'égalité (XII′) par rapport à α on trouve

$$e^{\alpha z} = 2^{\nu}\Pi(\nu-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{n+\nu}{z}C_n^{\nu}(z)\frac{dH^n(\alpha)}{d\alpha}$$

$$= 2^{\nu}\Pi(\nu-1)\left\{-\frac{\nu}{z}\sum_{n=0}^{n=\infty}C_n^{\nu}(z)\frac{n+\nu}{\alpha}H^n(\alpha)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{n+\nu}{z}C_n^{\nu}(z)\left[H^{n-1}(\alpha)+H^{n+1}(\alpha)\right]\right\},$$

d'où l'on obtient finalement

B) $$(n+\nu)\,C_n^{\nu} = \frac{n+1}{2z}C_{n+1}^{\nu}+\frac{n-1+2\nu}{2z}C_{n-1}^{\nu}.$$

Cette propriété peut s'écrire

$$(n+\nu)\left[zC_n^{\nu}-\frac{1}{2}C_{n+1}^{\nu}-\frac{1}{2}C_{n-1}^{\nu}\right] = -\frac{\nu-1}{z}\left[C_{n+1}^{\nu}-C_{n-1}^{\nu}\right],$$

et si on la différentie par rapport à z, on trouve en vertu de la propriété A)

C) $$z\frac{dC_n^{\nu}}{dz}+\nu C_n^{\nu} = \frac{1}{2}\left[\frac{dC_{n+1}^{\nu}}{dz}+\frac{dC_{n-1}^{\nu}}{dz}\right].$$

La combinaison des équations C) et A) conduit à une propriéte indépendante de ν, à savoir

$$\text{D)} \qquad z\frac{dC_n^\nu}{dz} - nC_n^\nu = \frac{dC_{n-1}^\nu}{dz}.$$

Nous arrêtons là les applications des considérations générales de cette section pour y revenir bientôt dans un mémoire spécial qui ne sera en substance qu'une reproduction amplifiée et sous une nouvelle forme du mémoire sur le développement des fonctions cité au No. 74.

Varsovie, Août 1879.