ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Band 141.

N^o 3366.

6.

Ueber die Genauigkeit photographischer Messungen

und über eine Bestimmung

des Thermometercoefficienten des Potsdamer photographischen Refractors.

Von Prof. *J. Wilsing*.

Die folgenden Bemerkungen über die Genauigkeit photographischer Positionsbestimmungen stützen sich auf zahlreiche Messungen von Distanzen, welche ich zum Zwecke einer Bestimmung der Parallaxe von 61 Cygni ausgeführt habe. Die Aufnahmen sind mit dem photographischen Refractor des Potsdamer Observatoriums angefertigt. (Vogel, Instrumentenkunde Jahrg. IX 1889.) Die Ausmessung der Platten geschah mit dem Repsold'schen Messapparat, welcher in Bd. 5 der Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums beschrieben und abgebildet ist. Der Apparat gestattet nur die Messung von Distanzen. Das Mikroskop lässt sich an einem eisernen T-Träger mittels einer Schlittenführung bewegen und wird nach Einstellung auf das Object durch ein Excenter gehoben, so dass die Striche eines der Führung parallel auf einem zweiten Träger liegenden Maassstabes in das Gesichtsfeld kommen. Da für eine bestimmte Sterndistanz stets die gleichen Striche des in halbe Millimeter getheilten Maassstabes benutzt werden können, so ist die Kenntniss der Theilungsfehler nicht erforderlich.

Unruhe der Luft und Mängel in der Führung des Instruments bewirken, dass die photographischen Sternscheibchen nicht vollkommen rund erscheinen. Der constante Fehler, welcher bei der Beurtheilung des einzustellenden Punktes begangen wird, ist ein der betreffenden Aufnahme eigenthümlicher Auffassungsfehler, der sich durch Vermehrung der Einstellungen oder Wiederholung der Messung nicht beseitigen lässt. Um den Betrag dieses constanten Fehlers und des zufälligen Einstellungsfehlers zu finden, muss man die Längenmessungen durch Reduction auf Bogenmaass vergleichbar machen. Die Beziehung zwischen dem wahrscheinlichen Fehler einer Messung, ausgedrückt in Längeneinheiten, und dem Fehler des entsprechenden Winkelwerthes findet man auf folgende Weise. Der Winkelwerth v , welcher einer in Längeneinheiten ausgedrückten Strecke l_1 entspricht, wird näherungsweise durch den Ausdruck $\frac{l_1}{l_2} \varphi$ bestimmt,

wo l_2 die einem bekannten Winkel φ entsprechende Strecke bedeutet. Zwischen den wahrscheinlichen Fehlern von v l_1 l_2

besteht dann die Gleichung: $\frac{r_v^2}{v^2} = \frac{r_{l_1}^2}{l_1^2} + \frac{r_{l_2}^2}{l_2^2}$. Ist l_1 das Mittel aus den Abständen der beiden Componenten eines Doppelsterns vom Vergleichstern, so kann man die beiden Fälle unterscheiden, wenn der zufällige Einstellungs-

fehler gegen den constanten Auffassungsfehler vernachlässigt werden darf oder umgekehrt. Diesen beiden Fällen entsprechen die Gleichungen:

$$\frac{r_v^2}{v^2} = r_l^2 \left(\frac{3}{4} \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right) \text{ resp. } \frac{r_v^2}{v^2} = r_l^2 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right),$$

wo r_l den gesuchten Messungsfehler einer Strecke bezeichnet, und r_v mit Hülfe der Abweichungen der aus den verschiedenen Messungen folgenden Winkelwerthe direct berechnet werden kann. Die Vergleichung zweier Messungen derselben Distanzen (12' und 14') auf jeder Platte ergab nun:

$$r_l = \pm 0''.065 \text{ (Formel I) resp. } r_l = \pm 0''.072 \text{ (Formel II).}$$

Aus den Messungen zweier anderen Distanzen von 23' und 19' folgte $r_l = \pm 0''.060$ (Formel II). Diese Fehler geben die zufällige Unsicherheit der Messung einer Strecke, welche wesentlich von der Beschaffenheit des Apparats abhängt. Die Grösse des constanten Messungsfehlers lässt sich aus den Abweichungen der Messungen verschiedener Aufnahmen desselben Abends finden. Bezeichnet man wieder den wahrscheinlichen Fehler, wie er sich aus den Abweichungen der Winkelwerthe ergibt, mit r_v , den nach den oben angegebenen Formeln berechneten Fehler der Messung einer einzelnen Strecke mit r_m , so setzt sich r_m aus dem zufälligen Messungsfehler r_l und dem gesuchten constanten Auffassungsfehler r_c zusammen: $r_m^2 = r_c^2 + r_l^2$. Mit $r_m = \pm 0''.098$ resp. $\pm 0''.091$ und $r_l = \pm 0''.065$ ergibt sich: $r_c = \pm 0''.073$ resp. $\pm 0''.064$ für den constanten Theil des wahrscheinlichen Fehlers einer Streckenmessung, ausgedrückt in Bogenmaass. Der constante Fehler tritt am meisten bei Verbindung von Sternen sehr verschiedener Helligkeit hervor, indem die Bilder der helleren Sterne durch die unvermeidlichen Oscillationen während der Exposition stärker deformirt werden, so dass die Einstellung nicht auf symmetrische Punkte erfolgt. Uebrigens sind von diesen durch die Beschaffenheit der Bilder veranlassten constanten Fehlern die auf subjectiven Auffassungsunterschieden beruhenden constanten Fehler wohl zu unterscheiden. Diese Fehler, auf welche Herr Prof. Scheiner bei seinen Messungen des Sternhaufens Messier 13 (Abhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften 1892) hingewiesen hat, hängen gleichfalls von der Helligkeit der Sterne

resp. dem Bilddurchmesser ab und können einen Betrag von mehreren Zehntel-Bogensekunden erreichen. Bei relativen Messungen, wie die vorliegenden, kann man jedoch diese Auffassungsfehler ganz unschädlich machen, wenn die Richtung der Strecke im Gesichtsfelde beim Uebergang vom helleren zum schwächeren Sterne stets die gleiche ist.

Nach Ermittlung des zufälligen und constanten Einstellungsfehlers lässt sich auch ein Urtheil über den Betrag des von Unregelmässigkeiten in der photographischen Schicht herrührenden Fehlers gewinnen, insofern dieser gleichfalls als ein zufälliger angesehen wird, und gesetzmässige, von der Lage und Richtung der gemessenen Strecke auf der Platte abhängige Abweichungen, die sich, wie bereits Herr Prof. Scheiner (Instrumentenkunde XI p. 317) gezeigt hat, nicht mit Sicherheit nachweisen lassen, ausgeschlossen werden. Vergleicht man nämlich, wie es bisher geschehen ist, zwei gleiche und gleichgerichtete Strecken, welche ausserdem auf der Platte dicht nebeneinander liegen, also etwa mehrere Aufnahmen derselben Distanz, mit einander, so trifft eine Unregelmässigkeit in der Schicht die Messung beider Strecken in gleicher Weise. Haben die Strecken dagegen verschiedene Grösse und Lage, so wird der Messungsfehler einer einzelnen Strecke um den zufälligen Fehler der Schichtverziehung r_s vermehrt. Setzt man: $r_m^2 = r_l^2 + r_c^2 + r_s^2$, so wird für $r_m = \pm 0''117$ $r_l = \pm 0''065$ $r_c = \pm 0''068$, der Fehler der Schichtverziehung $r_s = \pm 0''070$.

Ich fasse das Ergebniss in die folgenden Sätze zusammen. Wenn als Fehlergrenze bei einem Maassstab von 1 mm für die Bogenminute, wie dies beim Potsdamer Refractor des Fall ist, das Zehntel der Bogensekunde festgesetzt wird, so bedarf es nur weniger Einstellungen um den zufälligen Einstellungsfehler unter diesen Betrag herabzudrücken. Die constanten Fehler, welche aus der Unsicherheit in der Beurtheilung des Mittelpunkts des Sternbildes entstehen, bestimmen aber die Grenze der durch Ausmessung einer einzelnen Aufnahme überhaupt erreichbaren Genauigkeit zu $\pm 0''07$, während der Einfluss von Unregelmässigkeiten in der photographischen Schicht auf einige Hundertstel Bogensekunde geschätzt werden kann. Die Genauigkeit der Messung einer Strecke lässt sich in Folge dessen bei Aufnahmen mittlerer Qualität nicht erheblich unter $0''1$ entsprechend 0.0017 mm herabdrücken.

Die oben angegebenen Werthe für die verschiedenen Fehler stimmen vollkommen mit den Ergebnissen der Messungen überein, die Herr Prof. Thiele an drei mit dem Pariser Refractor angefertigten Platten ausgeführt hat. (Note sur l'Application de la Photographie aux Mesures micrométriques des étoiles; Bulletin du comité international permanent pour l'exécution fotogr. de la carte du ciel, Tom. I pag. 51.) Als Ausdruck für den Theil des Quadrats des

mittleren Fehlers einer Messung, welcher von den zufälligen Einstellungsfehlern abhängt, findet Herr Prof. Thiele:

$$\varepsilon_l^2 = \frac{r}{1000''m} (0.0216 + 0.00192 (d - 5.5)) ,$$

wo r die gemessene Distanz in Bogensekunden, m die Zahl der Einstellungen und d der Durchmesser des Bildes ist. Hierzu kommt als constanter, von der Deformation der photographischen Bilder herrührender Betrag:

$$\varepsilon_c^2 = \frac{r}{1000''} \cdot 0.0082 ,$$

und endlich noch ein wahrscheinlich durch Schichtverziehung verursachter Betrag: $\varepsilon_s^2 = 0.0093$, so dass

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_l^2 + \varepsilon_c^2 + \varepsilon_s^2$$

wird. Für den mittleren Bilddurchmesser $d = 5.5$, eine Distanz $r = 1000''$, welche dem Mittel der von mir gemessenen Distanzen (22'6 19'2 14'0 11'9) entspricht, und für $m = 3$ ergibt die Thiele'sche Formel:

$$r_l = \pm 0''057 (\pm 0''065)$$

$$r_c = \pm 0''061 (\pm 0''068) \quad r_m = \pm 0''106 (\pm 0''117)$$

$$r_s = \pm 0''065 (\pm 0''070)$$

wo die von mir gefundenen Werthe in Klammern beigefügt sind.

Im Anschluss an diese Untersuchungen habe ich eine Bestimmung des Temperaturcoefficienten des photographischen Refractors ausgeführt. Zur Reduction der Messungen wird der Bogenwerth der Längeneinheit für jede Platte gewöhnlich aus Normaldistanzen abgeleitet, deren Winkelwerth bekannt ist. Bei stabil construirten Instrumenten kann jedoch der jedesmalige Bogenwerth, wie sich aus den folgenden Bemerkungen ergibt, auch durch die Thermometerablesung, der eine bestimmte Focaleinstellung entspricht, mit grosser Genauigkeit dargestellt werden, sobald derselbe für eine bestimmte Temperatur bekannt ist.

Der Bogenwerth der Längeneinheit ändert sich unter der Voraussetzung, dass sich die Platte stets genau im Brennpunkt befindet, mit der Focallänge des Objectivs, welche selbst von seiner Temperatur abhängig ist. Der Bogenwerth p_1 von 1 mm in der Mitte der Platte kann ausgedrückt werden durch die Formel:

$$\sin \frac{p_1}{2} = \sin \frac{p_{ab}}{2} \frac{k}{l_{ab}} \sqrt{\sec \delta_a \cdot \sec \delta_b} ,$$

wo l_{ab} die durch Messung gefundene Sterndistanz bei der Temperatur τ der Aufnahme bezeichnet, ferner p_{ab} den entsprechenden Winkelwerth, δ_a und δ_b die Winkelabstände der Endpunkte der Strecke l_{ab} vom Mittelpunkte der Platte bezeichnen, und

$$k = 1 + \frac{1}{2} \sec \delta_a \sec \delta_b \sin \frac{\delta_a + \delta_b}{2} \cdot \sin \frac{\delta_a - \delta_b}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{p_{ab}}{2} \text{ ist.}$$

Nennt man l die bei der Temperatur t der Messung gefundene Distanz, ausgedrückt in Einheiten des Maassstabes bei der Temperatur T , so ist:

$$l_{ab} = l (1 + \alpha (T - t) + \beta (\tau - t)) ,$$

wenn α und β die Ausdehnungscoefficienten des Stabes und der Platte bezeichnen.

Setzt man nun:

$$\sin \frac{p_0}{2} = \sin \frac{p_{ab}}{2} \frac{k}{l} \sqrt{\sec \delta_a \sec \delta_b}, \text{ und}$$

$$dp_0 = -2 \sec \frac{p_0}{2} \sin \frac{p_{ab}}{2} \frac{k}{l} \sqrt{\sec \delta_a \sec \delta_b} (\alpha (T - t) + \beta (\tau - t)),$$

so wird:

$$p_1 = p_0 + dp_0.$$

Wird die Verbesserung des für Null Grad angenommenen Winkelwerths 59"9600 mit x , der Thermometercoefficient mit y bezeichnet, und ist

$$\alpha = 0.000018,$$

$$\beta = 0.000009,$$

so hat man zur Bestimmung von x und y die folgenden Normalgleichungen:

	Mittel der Temperatur	Gew.
+0"0079 = $x - 9.0y$	- 9.0	1/2
+0.0016 = $x - 0.1y$	- 0.1	1
-0.0040 = $x + 3.8y$	+ 3.8	1/2
-0.0091 = $x + 8.4y$	+ 8.4	1
-0.0115 = $x + 12.1y$	+ 12.1	1
-0.0156 = $x + 15.6y$	+ 15.6	1
-0.0208 = $x + 20.0y$	+ 20.0	1/2

Astrophysikal. Observatorium, Potsdam, Mai 1896.

welchen die Werthe genügen:

$$x = +0.00017 \pm 0.00035$$

$$y = -0.001014 \pm 0.000031$$

Die einer Temperaturzunahme von 1° C. entsprechende Aenderung der Focallänge beträgt

$$\frac{df}{f} = 0.0000168.$$

Beträgt die Unsicherheit in der Angabe des Thermometers bei der Aufnahme 1° C., so erreicht der Fehler in der Annahme des Bogenwerths von 1 mm kaum die Einheit der dritten Decimale (0"001), so dass Distanzen von einem Grad nur um 0"06 fehlerhaft werden. Eine grössere Genauigkeit lässt sich aber auch bei directer Bestimmung des Bogenwerths mit Hülfe von Normaldistanzen nach den früheren Ausführungen nicht erreichen.

Prof. J. Wilsing.

Maxima und Minima veränderlicher Sterne

beobachtet von Jos. Hisgen, S. J.

Die im Folgenden mitgetheilten Beobachtungen wurden von September 1895–März 1896 an der Sternwarte des Georgetown College unter Leitung des Herrn P. Hagen, S. J. angestellt. Das benutzte Instrument war das 5 zöllige Aequatoreal, das schon in früheren Jahren zu gleichen Beobachtungen verwendet wurde (A. J. vol. X pag. 177).

Die Beobachtungsmethode ist die Argelander's mittelst Stufenschätzungen; der Stufenwerth ist für den Fünfzöller im Mittel 0^m078.

Die Grössenangaben schliessen sich an die BD. an und die Bruchtheile von Tagen beziehen sich auf den Meridian von Greenwich.

806. o Ceti.

Die Beobachtungen dieses Sterns vertheilen sich auf 21 Abende zwischen dem 18. Oct. 1895 und 5. März 1896. Während der ersten 30 Tage war die Helligkeit nur wenig gewachsen von 8^m9–8^m5, dann nahm sie schneller zu, erreichte Mitte December 7^m5 und stieg von da ab gleichmässig durch 4 Grössenklassen in einem Monat zur mittlern Maximalhelligkeit.

Die graphisch ausgeglichene Lichtcurve zeigt den Stern von Mitte Jan. bis fast Mitte Febr. nahezu in constanter Helligkeit und die Pogson'sche Curve giebt das Maximum

1896 Jan. 28, 3^m4.

Demnach hat die Ephemeride (A. J. XIV p. 119) daselbe 50 Tage zu früh angesagt. Eine sehr niedrige Schätzung 4^m2 am 28. Jan. ist wohl dem starken Mondlicht jenes Tages zuzuschreiben und wurde bei Bestimmung des Maximums unberücksichtigt gelassen. Die Lichtabnahme erfolgte langsamer als die Zunahme und konnte nur noch 3–4 Wochen lang nahe am Horizont bis 4^m5 beobachtet werden.

6984. U Aquilae.

Seit der Entdeckung dieses Veränderlichen kurzer Periode 1886 durch Sawyer (A. J. VII p. 22) hat ausser dem Entdecker sich Herr Yendell vielfach mit ihm beschäftigt, die einzeln bekannt gegebenen Resultate von 1886–92 schliesslich zusammengestellt und aus ihnen neue Elemente und eine kürzere Periode bestimmt (A. J. XIII Nr. 294).

Von Oct. 1 bis Nov. 21 liegen 25 Beobachtungen vor, aus denen sich 7 Max. und 8 Min. erkennen lassen. Dieselben wurden zunächst mit Hülfe der I. Lichtcurve Sawyer's festgelegt und nachher durch eine eigene mittlere Lichtcurve noch einmal bestimmt. Letztere soll hier mitgetheilt werden, um zu zeigen, dass sie mit denen von Sawyer (I) und Yendell übereinstimmt, namentlich aber, dass das steile Aufsteigen und auch die Einbiegung nach dem Max. bestätigt wird.